Karl R. Popper

LA LOGICA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
The Logic of Scientific Discovery
publicada por HUTCHINSON & Co. LTD., de Londres,
son propiedad de
EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción por
VICTOR SANCHEZ DE ZAVALA

1.ª edición, 1962.
1.ª reimpresión, 1967.
2.ª reimpresión, 1971.
3.ª reimpresión, 1973.
4.ª reimpresión, 1977.
5.ª reimpresión, 1980.

O'Donnell, 27. Madrid-9

ISBN: 84-309-0711-4
Depósito legal: M. 1.112.—1980

Printed in Spain. Impreso en España por ARTES GRÁFICAS BENZAL. - Virtudes, 7. - MADRID-3

A MI ESPOSA,

a quien se debe que haya renacido este libro.

Nota del traductor *

La lógica de la investigación científica es traducción de la *Logik der Forschung*, publicada en Viena en el otoño de 1934 (pero con la fecha «1935»); la versión ha sido hecha por el autor, ayudado por el doctor Julius Freed y Lan Freed.

No se ha alterado el texto original de 1934 con vistas a la traducción. Como suele ocurrir, ésta es un poco más larga que el original: ha sido menester emplear paráfrasis para palabras y frases que no tenían equivalentes, y ha habido que fragmentar y reordenar las oraciones; tanto más cuanto que el texto a traducir estaba enormemente condensado, pues incluso se le había podado drásticamente en varias ocasiones, para cumplir los requisitos del editor. Pero el autor se ha decidido a no aumentar el texto, así como a no restaurar los pasajes cercenados.

Con objeto de ponerlo al día se han añadido al libro apéndices y notas nuevos: algunos amplían meramente el texto, o lo corrigen; pero otros indican en qué puntos el autor ha variado de opinión, o cómo reorganizaría sus razonamientos.

Todas las adiciones actuales —apéndices nuevos y notas nuevas a pie de página— están marcadas por medio de números precedidos de asterisco; y este último signo indica también los sitios en que se han ampliado las notas antiguas (a menos que la ampliación consista únicamente en la alusión a la edición inglesa de un libro publicado originalmente en alemán).

En las adiciones mencionadas se encontrarán referencias a una continuación de este volumen (continuación que no se había publicado antes y cuyo título es *Postscript: After Twenty Years*): sus capítulos y apartados están precedidos también por asterisco, pero como no tiene apéndices, todos éstos, tengan o no asterisco, corresponden al presente volumen. Las dos obras tratan de los mismos problemas, si bien —aunque se complementan— son independientes.

Debe señalarse también que ha cambiado la numeración de los capítulos de este libro: en el original estaban numerados de primero a segundo (primera parte) y de primero a octavo (segunda parte), mientras que ahora lo están correlativamente: de primero a décimo.

* La versión española se ha hecho sobre la edición inglesa, siguiendo el consejo del autor. Unicamente se han vertido directamente del alemán alguna palabra aislada y la carta de A. Einstein, que constituye el apéndice *XII (aunque teniendo en cuenta, naturalmente, las aclaraciones intercaladas por K. R. Popper).

Sumario

Las teorías son redes: sólo quien lance cogerá.

NOVALIS

Prefacio de la primera edición (1934)

> La *sospecha de que el hombre, por fin, ha resuelto sus problemas más* recalcitrantes... proporciona menguado solaz al gustador de la filosofía: pues lo que no puede dejar de temer es que ésta nunca llegue lo suficientemente lejos como para proponer un auténtico problema.
>
> M. SCHLICK (1930).

> Por *mi parte, sostengo la opinión exactamente opuesta y afirmo que* siempre que una disputa se ha desencadenado durante cierto tiempo, especialmente en filosofía, en el fondo no se trataba nunca de un mero problema acerca de palabras, sino de un auténtico problema acerca de cosas.
>
> I. KANT (1786).

El científico que se ocupa con una investigación determinada, digamos de física, puede atacar su problema de modo directo: puede dirigirse inmediatamente al corazón del asunto, esto es, al corazón de una estructura organizada. Pues existe ya una estructura de las doctrinas científicas; y, con ella, una situación de los problemas que tiene aceptación general. Esta es la razón por la que puede dejar a otros la tarea de encajar su colaboración en el marco general del conocimiento científico.

El filósofo se encuentra en muy distinta posición. No se enfrenta con una estructura organizada, sino más bien con algo que se asemeja a un montón de ruinas (aunque tal vez con un tesoro sepultado debajo). No puede apelar a una situación de los problemas que realmente sea de aceptación general, pues quizá el único hecho aceptado por todos es que no existe tal cosa. En realidad, la cuestión de si la filosofía llegará nunca a proponer un auténtico problema reaparece una y otra vez en los círculos filosóficos.

A pesar de ello, todavía hay algunos que creen que la filosofía puede proponer auténticos problemas acerca de cosas, y que, por tanto, siguen confiando en discutirlos, y en haber acabado con los deprimentes monólogos que hoy pasan por discusiones filosóficas. Y si por ventura se encuentran incapaces de aceptar ninguno de los credos existentes, lo único que pueden hacer es empezar de nuevo desde el principio.

VIENA, *otoño de 1934.*

No hay nada más necesario para el hombre de ciencia que la historia de ésta y la lógica de la investigación... La forma de descubrir los errores, el uso de hipótesis y de la imaginación, el modo de someter a contraste.

LORD ACTON

Prefacio de la edición inglesa (1958)

En mi antiguo prefacio de 1934 traté de exponer —demasiado sucintamente, temo— mi actitud con respecto a la situación entonces dominante en la filosofía, y especialmente para con la filosofía lingüística y la escuela de analistas del lenguaje de aquel entonces. En este nuevo prefacio pretendo exponer mi actitud frente a la situación actual y acerca de las dos escuelas principales de analistas del lenguaje de nuestros días. Lo mismo entonces que ahora, los analistas que digo tienen gran importancia para mí: no sólo como contrincantes, sino como aliados —en cuanto que parecen ser casi los únicos filósofos que conservan vivas algunas de las tradiciones de la filosofía racional.

Los analistas del lenguaje creen que no existen auténticos problemas filosóficos; o que los problemas de la filosofía, si es que hay alguno, son problemas del uso lingüístico o del sentido de las palabras. Creo, sin embargo, que, al menos, existe un problema filosófico por el que se interesan todos los hombres que reflexionan: es el de la cosmología, *el problema de entender el mundo —incluidos nosotros y nuestro conocimiento como parte de él.* Creo que toda la ciencia es cosmología, y, en mi caso, el único interés de la filosofía, no menos que el de la ciencia, reside en las aportaciones que ha hecho a aquélla; en todo caso, tanto la filosofía como la ciencia perderían todo su atractivo para mí si abandonasen tal empresa. Reconozco que entender las funciones de nuestro lenguaje es una parte importante de ésta, pero no lo es acabar con nuestros problemas presentándolos como meros «rompecabezas» lingüísticos.

Los analistas del lenguaje se consideran a sí mismos como los que utilizan cierto método privativo de la filosofía. A mi entender están equivocados, pues yo creo en las siguientes tesis.

Los filósofos son tan libres como cualesquiera otras personas de emplear cualquier método en la búsqueda de la verdad. *No hay un método propio de la filosofía.*

Quiero proponer ahora también la siguiente segunda tesis: el problema central de la epistemología ha sido siempre, y sigue siéndolo, el del aumento del conocimiento. *Y el mejor modo de estudiar el aumento del conocimiento es estudiar el del conocimiento científico.*

No pienso que el estudio del aumento del conocimiento pueda remplazarse por el estudio de los usos lingüísticos, ni por el de los sistemas lingüísticos.

Y con todo, estoy completamente dispuesto a admitir que existe un método al que podría llamarse «el único método de la filosofía». Pero no es característico solamente de ésta, sino que es, más bien, el único método de toda *discusión racional*, y, por ello, tanto de las ciencias de la Naturaleza como de la filosofía: me refiero al de enunciar claramente los propios problemas y de examinar *críticamente* las diversas soluciones propuestas.

He escrito en cursiva las palabras «*discusión racional*» y «*críticamente*» con objeto de subrayar que hago equivalentes la actitud *racional* y la *actitud crítica*. *Aludo a que siempre que proponemos* una solución a un problema deberíamos esforzarnos todo lo que pudiésemos por echar abajo nuestra solución, en lugar de defenderla; desgraciadamente, este precepto se lleva a la práctica por pocos de entre nosotros; pero, por fortuna, otros aducen las críticas en lugar nuestro si dejamos de hacerlo por nosotros mismos. Mas la crítica será fecunda únicamente si enunciamos nuestro problema todo lo claramente que podamos y presentamos nuestra solución en una forma suficientemente definida: es decir, que pueda discutirse críticamente.

No niego que algo a lo que podría llamarse «análisis lógico» sea capaz de desempeñar un papel en el proceso citado de aclarar y escudriñar los problemas y las soluciones que hemos planteado y propuesto; de modo que no asevero que los métodos del «análisis lógico» y del «análisis del lenguaje» carezcan necesariamente de valor. Mi tesis es, más *bien, que estos métodos están lejos de ser los únicos que* puede emplear ventajosamente un filósofo, y que en modo alguno son característicos de la filosofía: no lo son más que cualquier otro método de indagación científica o racional.

Podría preguntarse quizá qué otros «métodos» puede utilizar un filósofo. Mi respuesta es que, aunque hay un número indefinido de «métodos» diferentes, no tengo ningún interés en enumerarlos: me da lo mismo el método que pueda emplear un filósofo (o cualquier otra persona), con tal de que se las haya con un problema interesante y de que trate sinceramente de resolverlo.

Entre los muchos métodos que puede usar —que dependerán siempre, desde luego, del problema que se tenga entre manos— me parece que hay uno digno de ser mencionado (y que es una variante del método histórico, que actualmente no está de moda): consiste simplemente en intentar averiguar qué han pensado y dicho otros acerca del problema en cuestión, por qué han tenido que afrontarlo, cómo lo han formulado y cómo han tratado de resolverlo. Esto me parece muy importante, porque es parte del método general de la discusión racional: si ignoramos lo que otros piensan, o lo que han pensado, ésta tiene que acabar, aun cuando cada uno de nosotros continúe tan contento hablándose a sí mismo. Algunos filósofos han hecho una virtud del hablarse a sí mismos, tal vez porque piensan que no hay nadie con quien merezca la pena de hablar. Pero temo que la costumbre de filosofar en este plano algo eminente sea un síntoma de la decadencia de la discusión racional; sin duda alguna, Dios se habla principalmente a Sí mismo porque no tiene a nadie a quien valga la pena de hablar; pero un filósofo debería saber que no es más divino que los demás hombres.

Hay varias interesantes razones históricas de la creencia, tan extendida, de que el llamado «análisis lingüístico» es el verdadero método de la filosofía.

Una de ellas es la creencia, exacta, de que las *paradojas lógicas* —como la del mentiroso («en este momento no estoy diciendo la verdad») y las encontradas por Russell, Richard y otros—necesitan para su solución el método del análisis lingüístico, con su famosa distinción entre expresiones lingüísticas con sentido («bien formadas») y carentes de sentido. Con esta creencia exacta se combina luego la equivocada de que los problemas tradicionales de la filosofía habrían surgido de un intento de resolver *paradojas filosóficas*, cuya estructura sería análoga a la de las *paradojas lógicas*, de suerte que la distinción entre hablar con sentido y sin sentido habría de tener, asimismo, una importancia central para la filosofía. Puede ponerse de manifiesto muy fácilmente que esta creencia es errónea, e incluso por medio del análisis lógico: pues éste revela que cierto tipo característico de reflexividad o autorreferencia, que está presente en todas las paradojas lógicas, no se encuentra en las llamadas paradojas filosóficas, ni siquiera en las antinomias kantianas.

Parece, sin embargo, que la principal razón que ha habido para exaltar el método del análisis lógico ha sido la siguiente. Se tenía la sensación de que era necesario remplazar el llamado «*nuevo camino de las ideas*» de Locke, Berkeley y Hume —es decir, el método psicológico (o, mejor, pseudopsicológico) de analizar nuestras ideas y su origen en los sentidos— por un método más «objetivo» y menos genético; la de que deberíamos analizar palabras y sus usos y sentidos en lugar de «ideas», «concepciones» o «nociones»: que habríamos de analizar proposiciones o enunciados en vez de «pensamientos», «creencias» o «juicios». Admito gustoso que esta sustitución del «nuevo camino de las ideas» de Locke por un «nuevo camino de las palabras» constituía un progreso y que se necesitaba urgentemente.

Es perfectamente comprensible que los que antes habían visto en el «nuevo camino de las ideas» el único método de la filosofía se hayan convertido a la creencia de que lo es el «nuevo camino de las palabras». Yo disiento enérgicamente de esta desafiadora creencia, pero haré nada más dos comentarios críticos sobre ella. En primer término, nunca debería haberse tomado el «nuevo camino de las ideas» por el método principal de la filosofía, no digamos por el único: incluso Locke lo introdujo meramente como un método para tratar ciertas cuestiones preliminares (preliminares para la ciencia de la ética), y tanto Berkeley como Hume lo emplearon, ante todo, como arma para batir a sus adversarios. Su propia interpretación del mundo —el mundo de las cosas y de los hombres—, que estaban deseosos de comunicarnos, nunca se basó en dicho método: ni Berkeley apoyó en él sus opiniones religiosas ni Hume su determinismo ni sus teorías políticas.

Pero la objeción más grave que opongo a la creencia de que, ya el «nuevo camino de las ideas», ya el «nuevo camino de las palabras», sea el método principal de la epistemología —o quizá, incluso, de la filosofía— es la siguiente:

Cabe abordar el problema de la epistemología por dos lados distintos: 1) como el problema del *conocimiento del sentido común* u ordinario, y 2) como el del *conocimiento científico*. Los filósofos que se inclinan al primer enfoque piensan —con toda razón— que el conocimiento científico sólo puede ser una ampliación del correspondiente al sentido común; y también —equivocadamente— que este último es el más fácil de analizar. De esta forma, tales filósofos se ponen a remplazar el «nuevo camino de las ideas» por un análisis del *lenguaje ordinario*, o sea, de aquél en que se formula el conocimiento de sentido común; y en lugar de analizar la visión, la percepción, el conocimiento o la creencia, analizan las expresiones «veo», «percibo», «conozco», «creo» o «me parece probable», o quizá la palabra «*quizá*».

Pues bien, yo respondería como sigue a los que tienden a este modo de abordar la teoría del conocimiento. Aunque estoy de acuerdo en que el conocimiento científico no es sino un desarrollo del ordinario o de sentido común, sostengo que los problemas más importantes y más atractivos de la epistemología han de ser completamente invisibles para los que se limitan al análisis del conocimiento últimamente citado o de su expresión en el lenguaje ordinario.

Quiero mencionar ahora únicamente un ejemplo del tipo de problemas a que me refiero: el del *aumento* de nuestros conocimientos. Basta una ligera reflexión para convencerse de que la mayoría de los problemas que se encuentran en conexión con dicho aumento han de trascender, necesariamente, todo estudio que permanezca confinado en el conocimiento de sentido común, frente al conocimiento científico: pues la manera más importante de aumentar aquél es, precisamente, volviéndose conocimiento científico. Y, además, parece evidente que el aumento de este último es el caso más importante y más interesante del aumento de los conocimientos.

A este respecto debería recordarse que casi todos los problemas de la epistemología tradicional están relacionados con el aumento de los conocimientos. Me siento inclinado a decir incluso más: desde Platón a Descartes, Leibniz, Kant, Duhem y Poincaré, y desde Bacon, Hobbes y Locke a Hume, Mill y Russell, la teoría del conocimiento se ha inspirado en la confianza de que nos permitiría, no solamente conocer más y más acerca del conocimiento, sino contribuir al avance del mismo —esto es, del *conocimiento científico*—. (Entre los grandes filósofos la única excepción a esta regla de que puedo acordarme es la de Berkeley.) La mayoría de los filósofos que creen que el método característico de la filosofía es el análisis del lenguaje ordinario parecen haber perdido aquel optimismo admirable que inspiraba la tradición racionalista: su actitud semeja ser de resignación, si no de desesperanza; no solamente abandonan el progreso de los conocimientos a los científicos, sino que definen la filosofía de modo tal que, por su misma definición, se hace incapaz de aportar nada a nuestro conocimiento del mundo. La automutilación que exige esta definición de filosofía, tan sorprendentemente persuasiva, no me atrae. No existe una esencia de la filosofía, algo que pudiera destilarse y condensarse en una definición: todas las de la palabra «filosofía» podrán tener tan sólo el carácter de una convención, de un acuerdo; y, en todo caso, no veo mérito alguno en la propuesta arbitraria de definir dicha palabra de modo que impida a todo estudioso de la filosofía el que intente contribuir, *qua* filósofo, al avance de nuestro conocimiento del mundo.

Asimismo, me resulta paradójico que los filósofos que están orgullosos de especializarse en el estudio de los lenguajes ordinarios crean —no obstante tal cosa— que saben lo suficiente acerca de la cosmología para estar seguros de que ésta es de esencia tan diferente a la filosofía que esta última jamás podrá aportar nada a aquélla. Y, ciertamente, se equivocan: pues es un hecho real que las ideas puramente metafísicas —y, por tanto, filosóficas— han tenido la máxima importancia para la cosmología. Desde Tales a Einstein, desde el atomismo antiguo a la especulación cartesiana sobre la materia, desde las especulaciones de Gilbert, Newton, Leibniz y Boscovich acerca de las fuerzas a las de Faraday y Einstein en torno a los campos de fuerzas, las ideas metafísicas han señalado el camino.

Estas son, expuestas brevemente, mis razones para creer que, incluso dentro de la provincia de la epistemología, el primer enfoque que he mencionado —es decir, el análisis del conocimiento analizando el lenguaje ordinario— es demasiado estrecho, y que forzosamente han de escapársele los problemas más interesantes.

Pero estoy muy lejos de encontrarme de acuerdo con todos aquellos filósofos que se declaran a favor del otro modo de abordar la epistemología, o sea, aquél que sigue el camino de un análisis del conocimiento científico. Con objeto de explicar más fácilmente en qué cosas estoy de acuerdo y en qué no, voy a dividirlos en dos grupos: algo así como las ovejas y los cabritos.

El primer grupo está formado por los que tienen por meta estudiar «el lenguaje de la ciencia» y que han escogido como método filosófico la construcción de modelos artificiales de lenguajes: esto es, la construcción de los que creen ser modelos del «lenguaje de la ciencia».

El segundo grupo no se limita a estudiar el lenguaje de la ciencia —ni ningún otro lenguaje—, ni posee un método filosófico ya escogido. Sus miembros filosofan de muchos modos diferentes, pues se encuentran con muchos problemas distintos que pretenden resolver; y acogen con gusto cualquier método cuando consideran que puede ayudarles a ver más claramente sus problemas, o a dar con una solución, aunque sea provisional.

Me ocuparé primero de los que han elegido el método de construir modelos artificiales del lenguaje de la ciencia. Desde un punto de vista histórico, también ellos parten del «nuevo camino de las ideas»: también remplazan el método (pseudo-) psicológico del «nuevo camino» antiguo por el análisis lingüístico. Pero, debido quizá a los consuelos espirituales que proporciona la esperanza en un conocimiento que sea «exacto», «preciso» o «formalizado», han elegido como objeto de su análisis lingüístico «el lenguaje de la *ciencia*», en vez del lenguaje ordinario. Mas, por desdicha, al parecer no existe semejante «lenguaje de la ciencia», por lo cual se les hace necesario construir uno; sin embargo, la construcción de un modelo a tamaño natural y que funcione del lenguaje de la ciencia —un modelo en que pudiera manejarse una verdadera ciencia, como la física— resulta ser algo dificultosa en la práctica: y, por tal razón, los encontramos embarcados en la construcción de complicadísimos modelos que funcionan, pero en miniatura —de enormes sistemas de diminutos chirimbolos.

En mi opinión, este grupo de filósofos toma lo peor de ambos mundos. Y debido a su método de construir modelos lingüísticos en miniatura, se les escapan asimismo los problemas más apasionantes de la teoría del conocimiento, esto es, los relacionados con su progreso; pues lo intrincado del artefacto no está en proporción con su eficacia, y en la práctica no hay teoría científica de ningún interés que pueda expresarse por medio de tan inmensos sistemas de minucias. Estos modelos carecen de importancia para la ciencia y para el sentido común.

En realidad, los modelos del «lenguaje de la ciencia» que construyen estos filósofos no tienen nada que ver con el lenguaje de la ciencia moderna, como puede verse teniendo en cuenta las observaciones que siguen, que se refieren a los tres modelos lingüísticos más conocidos (a ellos aluden las notas 13 y 15 del apéndice *VII y la nota *2 del apartado 38). Al primero le faltan, incluso, los medios para expresar la identidad, y, en consecuencia, no puede representar igualdad alguna: de modo que no contiene ni siquiera la aritmética más primitiva. El segundo funciona únicamente con tal de que no le añadamos los medios de demostrar los teoremas corrientes de la aritmética: por ejemplo, el teorema de Euclides de que no existe un número primo que sea mayor que cualquier otro, y hasta el principio de que todo número tiene un sucesivo. En el tercero —el más desarrollado y famoso de todos— tampoco pueden formularse las matemáticas; y —lo que es aún más interesante— tampoco pueden expresarse en él propiedades mensurables de ningún tipo. Debido a estas razones, y a muchas otras, estos tres modelos lingüísticos son demasiado pobres para ser útiles en ciencia alguna; y —desde luego— son esencialmente más pobres que los lenguajes ordinarios, inclusive los más primitivos.

Los autores de estos modelos los han impuesto las limitaciones mencionadas simplemente porque, de otro modo, las soluciones que proponían a sus problemas no hubieran sido eficaces. Es fácil demostrar este hecho, y esta demostración la han ofrecido, en parte, los mismos autores. No obstante lo cual, todos parecen plantear las siguientes pretensiones: *a)* que sus métodos son capaces, en una u otra forma, de resolver problemas de la teoría del conocimiento científico, o sea, dicho de otro modo, que son aplicables a la ciencia (mientras que, en realidad, sólo son aplicables con precisión a un discurso de tipo extremadamente primitivo), y *b)* que son «exactos» o «precisos». Está claro que no es posible mantener ambas pretensiones.

Así pues, el método de construir modelos lingüísticos artificiales no es capaz de abordar los problemas del aumento de los conocimientos, menos aún que lo sería el de analizar los lenguajes ordinarios —y ello meramente porque tales modelos son más pobres que estos últimos—. Como resultado de su pobreza nos ofrecen sólo el modelo más tosco y más engañoso del aumento del conocimiento: el de un montón de enunciados de observación que se acumulan progresivamente.

Volvámonos ahora al tercer grupo de epistemólogos, a los que no se entregan por anticipado a ningún método filosófico, los que en los trabajos epistemológicos utilizan el análisis de los problemas científicos, de las teorías, de los procedimientos y —lo que es más importante— de las discusiones científicas. Este grupo pretende que entre sus antepasados se encuentran casi todos los grandes filósofos occidentales (incluso puede reclamar para sí a Berkeley, a pesar de haber sido —en cierto sentido muy importante —un enemigo de la misma idea de conocimiento científico racional, cuyo adelanto temía): sus representantes más ilustres durante los últimos doscientos años han sido Kant, Whewell, Mill, Peirce, Duhem, Poincaré, Meyerson, Russell y Whitehead —este último, al menos, en algunas de sus fases—. La mayoría de los pertenecientes a este grupo estarían conformes con la idea de que el conocimiento científico es el resultado del aumento del de sentido común: pues es algo así como el *conocimiento de sentido común, en grande;* sus problemas son los de éste, pero ampliados —por ejemplo, sustituye el problema de Hume de la «creencia razonable» por el de las razones para aceptar o rechazar las teorías científicas—. Y, puesto que tenemos muchos informes detallados de las discusiones concernientes al problema de si habría que aceptar teorías tales como la de Newton, la de Maxwell o la de Einstein, podemos mirar estas discusiones como si fuese a través de un microscopio que nos permitiera estudiar en detalle, y de un modo objetivo, algunos de los problemas más importantes de la «creencia razonable».

Este enfoque de los problemas de la epistemología se desentiende (como también los otros dos mencionados) del método pseudopsicológico o «subjetivo» del nuevo camino de las ideas (método todavía empleado por Kant). Nos sugiere que no sólo analicemos las discusiones científicas, sino también las situaciones problemáticas de la ciencia; y de este modo nos puede ayudar, asimismo, a comprender la historia del pensamiento científico.

He intentado hacer ver que los problemas epistemológicos tradicionales más importantes —los que guardan relación con el *aumento de los conocimientos*— trascienden los dos métodos usuales de análisis lingüístico, y exigen un análisis del conocimiento científico. Defender un dogma más es, sin embargo, lo último que quisiera hacer: incluso el análisis de la ciencia—la «filosofía de la ciencia»—amenaza convertirse en una moda, en una especialidad; mas los filósofos no deben ser especialistas. Por mi parte, me interesan la ciencia y la filosofía exclusivamente porque quisiera saber algo del enigma del mundo en que vivimos y del otro enigma del conocimiento humano de este mundo. Y creo que sólo un renacer del interés por estos secretos puede salvar las ciencias y la filosofía de una especialización estrecha y de una fe obscurantista en la destreza singular del especialista y en su conocimiento y autoridad personales: fe que se amolda tan perfectamente a nuestra época «postrracionalista» y «postcrítica», orgullosamente dedicada a destruir la tradición de una filosofía racional, y el pensamiento racional mismo.

PENN, BUCKINGHAMSHIRE, *primavera de 1958.*

RECONOCIMIENTO

Quiero dar las gracias aquí a Mr. David G. Nicholls por haberme comunicado el admirable pasaje por él descubierto entre los Acton Manuscripts de la Library of Cambridge University (Add. Mss. 5011: 266), y que he reproducido en la página 15.

PENN, BUCKINGHAMSHIRE, *verano de 1959.*

PRIMERA PARTE

Introducción a la lógica de la ciencia

CAPÍTULO PRIMERO

Panorama de algunos problemas fundamentales

El hombre de ciencia, ya sea teórico o experimental, propone enunciados —o sistemas de enunciados— y los contrasta paso a paso. En particular, en el campo de las ciencias empíricas construye hipótesis —o sistemas de teorías— y las contrasta con la experiencia por medio de observaciones y experimentos.

Según mi opinión, la tarea de la lógica de la investigación científica —o lógica del conocimiento— es ofrecer un análisis lógico de tal modo de proceder: esto es, analizar el método de las ciencias empíricas.

Pero, ¿cuáles son estos «métodos de las ciencias empíricas»? Y, ¿a qué cosa llamamos «ciencia empírica»?

1. El problema de la inducción

De acuerdo con una tesis que tiene gran aceptación —y a la que nos opondremos en este libro—, las ciencias empíricas pueden caracterizarse por el hecho de que emplean los llamados «*métodos inductivos*»: según esta tesis, la lógica de la investigación científica sería idéntica a la lógica inductiva, es decir, al análisis lógico de tales métodos inductivos.

Es corriente llamar «inductiva» a una inferencia cuando pasa de *enunciados singulares* (llamados, a veces, enunciados «particulares»), tales como descripciones de los resultados de observaciones o experimentos, a *enunciados universales*, tales como hipótesis o teorías.

Ahora bien, desde un punto de vista lógico dista mucho de ser obvio que estemos justificados al inferir enunciados universales partiendo de enunciados singulares, por elevado que sea su número; pues cualquier conclusión que saquemos de este modo corre siempre el riesgo de resultar un día falsa: así, cualquiera que sea el número de ejemplares de cisnes blancos que hayamos observado, no está justificada la conclusión de que *todos* los cisnes sean blancos.

Se conoce con el nombre del *problema de la inducción* la cuestión acerca de si están justificadas las inferencias inductivas, o de bajo qué condiciones lo están.

El problema de la inducción puede formularse, asimismo, como la cuestión sobre cómo establecer la verdad de los enunciados universales basados en la experiencia —como son las hipótesis y los sistemas teóricos de las ciencias empíricas—. Pues muchos creen que la verdad de estos enunciados se «*sabe por experiencia*»; sin embargo, es claro que todo informe en que se da cuenta de una experiencia —o de una observación, o del resultado de un experimento— no puede ser originariamente un enunciado universal, sino sólo un enunciado singular. Por lo tanto, quien dice que sabemos por experiencia la verdad de un enunciado universal suele querer decir que la verdad de dicho enunciado puede reducirse, de cierta forma, a la verdad de otros enunciados —éstos singulares— que son verdaderos según sabemos por experiencia; lo cual equivale a decir que los enunciados universales están basados en inferencias inductivas. Así pues, la pregunta acerca de si hay leyes naturales cuya verdad nos conste viene a ser otro modo de preguntar si las inferencias inductivas están justificadas lógicamente.

Mas si queremos encontrar un modo de justificar las inferencias inductivas, hemos de intentar, en primer término, establecer un *principio de inducción*. Semejante principio sería un enunciado con cuya ayuda pudiéramos presentar dichas inferencias de una forma lógicamente aceptable. A los ojos de los mantenedores de la lógica inductiva, la importancia de un principio de inducción para el método científico es máxima: «...este principio —dice Reichenbach— determina la verdad de las teorías científicas; eliminarlo de la ciencia significaría nada menos que privar a ésta de la posibilidad de decidir sobre la verdad o falsedad de sus teorías; es evidente que sin él la ciencia perdería el derecho de distinguir sus teorías de las creaciones fantásticas y arbitrarias de la imaginación del poeta» [1].

Pero tal principio de inducción no puede ser una verdad puramente lógica, como una tautología o un enunciado analítico. En realidad, si existiera un principio de inducción puramente lógico no habría problema de la inducción; pues, en tal caso, sería menester considerar todas las inferencias inductivas como transformaciones puramente lógicas, o tautológicas, exactamente lo mismo que ocurre con las inferencias de la lógica deductiva. Por tanto, el principio de inducción tiene que ser un enunciado sintético: esto es, uno cuya negación no sea contradictoria, sino lógicamente posible. Surge, pues, la cuestión acerca de por qué habría que aceptar semejante principio, y de cómo podemos justificar racionalmente su aceptación.

Algunas personas que creen en la lógica inductiva se precipitan a señalar, con Reichenbach, que «la totalidad de la ciencia acepta sin reservas el principio de inducción, y que nadie puede tampoco dudar de este principio en la vida corriente» [2]. No obstante, aun suponiendo que fuese así —después de todo, «la totalidad de la ciencia» podría estar en un error— yo seguiría afirmando que es superfluo todo principio de inducción, y que lleva forzosamente a incoherencias (incompatibilidades) lógicas.

---

[1] H. REICHENBACH, *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 186. (Cf. también las págs. 64 y sig.) *Cf. los comentarios de Russell acerca de Hume, que he citado en el apartado *2 de mi *Postscript*.

[2] REICHENBACH, *ibid.*, pág. 67.

A partir de la obra de Hume *[1] debería haberse visto claramente que aparecen con facilidad incoherencias cuando se admite el principio de inducción; y también que difícilmente pueden evitarse (si es que es posible tal cosa): ya que, a su vez, el principio de inducción tiene que ser un enunciado universal. Así pues, si intentamos afirmar que sabemos por experiencia que es verdadero, reaparecen de nuevo justamente los mismos problemas que motivaron su introducción: para justificarlo tenemos que utilizar inferencias inductivas; para justificar éstas hemos de suponer un principio de inducción de orden superior, y así sucesivamente. Por tanto, cae por su base el intento de fundamentar el principio de inducción en la experiencia, ya que lleva, inevitablemente, a una regresión infinita.

Kant trató de escapar a esta dificultad admitiendo que el principio de inducción (que él llamaba «principio de causación universal») era «válido *a priori*». Pero, a mi entender, no tuvo éxito en su ingeniosa tentativa de dar una justificación *a priori* de los enunciados sintéticos.

Por mi parte, considero que las diversas dificultades que acabo de esbozar de la lógica inductiva son insuperables. Y me temo que lo mismo ocurre con la doctrina, tan corriente hoy, de que las inferencias inductivas, aun no siendo «estrictamente válidas», *pueden alcanzar cierto grado de «seguridad» o de «probabilidad»*. Esta doctrina sostiene que las inferencias inductivas son «inferencias probables»[3]. «Hemos descrito —dice Reichenbach— el principio de inducción como el medio por el que la ciencia decide sobre la verdad. Para ser más exactos, deberíamos decir que sirve para decidir sobre la probabilidad: pues no le es dado a la ciencia llegar a la verdad ni a la falsedad..., mas los enunciados científicos pueden alcanzar únicamente grados continuos de probabilidad, cuyos límites superior e inferior, inalcanzables, son la verdad y la falsedad»[4].

Por el momento, puedo hacer caso omiso del hecho de que los creyentes en la lógica inductiva alimentan una idea de la probabilidad que rechazaré luego por sumamente inoportuna para sus propios fines (véase, más adelante, el apartado 80). Puedo hacer tal cosa, porque con recurrir a la probabilidad ni siquiera se rozan las dificultades mencionadas: pues si ha de asignarse cierto grado de probabilidad a los enunciados que se basan en inferencias inductivas, tal proceder tendrá que justificarse invocando un nuevo principio de inducción, modificado convenientemente; el cual habrá de justificarse a su vez, etc. Aún más: no se gana nada si el mismo principio de inducción no se toma como «verdadero», sino como meramente «probable». En resumen: la lógica de la inferencia probable o «lógica

---

*[1] Los pasajes decisivos de Hume se citan en el apédice *VII (texto correspondiente a las notas 4, 5 y 6); véase también, más adelante, la nota 2 del apartado 81.

[3] Cf. J. M. Keynes, *A Treatise on Probability* (1921); O. Külpe, *Vorlesungen über Logik* (ed. por Selz, 1923); Reichenbach (que emplea el término «implicaciones probabilísticas»), *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathem.-Zeitschr*, **34** (1932), y otros lugares.

[4] Reichenbach, *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 186.

de la probabilidad», como todas las demás formas de la lógica inductiva, conduce, bien a una regresión infinita, bien a la doctrina del *apriorismo* *2.

La teoría que desarrollaremos en las páginas que siguen se opone directamente a todos los intentos de apoyarse en las ideas de una lógica inductiva. Podría describírsela como la teoría del *método deductivo de contrastar***, o como la opinión de que una hipótesis sólo puede *contrastarse* empíricamente —y únicamente después de que ha sido formulada.

Para poder desarrollar esta tesis (que podría llamarse «deductivismo», por contraposición al «inductivismo» [5]) es necesario que ponga en claro primero la distinción entre la *psicología del conocimiento*, que trata de hechos empíricos, y la *lógica del conocimiento*, que se ocupa exclusivamente de relaciones lógicas. Pues la creencia en una lógica inductiva se debe, en gran parte, a una confusión de los problemas psicológicos con los epistemológicos; y quizá sea conveniente advertir, de paso, que esta confusión origina dificultades no sólo en la lógica del conocimiento, sino en su psicología también.

2. Eliminación del psicologismo

He dicho más arriba que el trabajo del científico consiste en proponer teorías y en contrastarlas.

La etapa inicial, el acto de concebir o inventar una teoría, no me parece que exija un análisis lógico ni sea susceptible de él. La cuestión acerca de cómo se le ocurre una idea nueva a una persona —ya sea un tema musical, un conflicto dramático o una teoría científica— puede ser de gran interés para la psicología empírica, pero carece de importancia para el análisis lógico del conocimiento científico.

---

*2 Véanse también el capítulo X —especialmente, la nota 2 del apartado 81— y el capítulo *II del *Postscript*, en los que se hallará una exposición más completa de esta crítica.

** Se habrá observado ya que empleamos las expresiones *contraste*, *contrastación*, *contrastar*, *someter a contraste*, etc., para traducir los términos ingleses *test*, *testing*, *to test*, etc. Los autores de habla inglesa —incluyendo al de esta obra— utilizan también *to contrast*, pero puede verterse sin dificultad —e incluso más conforme a su sentido— por *contraponer* o *contraponerse*. *(N. del T.)*

[5] Liebig (en *Induktion und Deduktion*, 1865) fue probablemente el primero que rechazó el método inductivo desde el punto de vista de la ciencia natural: su ataque se dirigía contra Bacon. Duhem (en *La Théorie physique, son objet et sa structure*, 1906; vers. ingl. por P. P. Wiener, *The Aim and Structure of Physical Theory*, 1954) ha mantenido tesis marcadamente deductivistas. (* Pero en el libro de Duhem se encuentran también tesis inductivistas, por ejemplo, en el cap. III de la primera parte, en el que se nos dice que con sólo experimentación, inducción y generalización se ha llegado a la ley de la refracción de Descartes: cf. la trad. ingl., pág. 455.) Véanse, asimismo, V. Kraft, *Die Grundformen der wissenschaftlichen Methoden*, 1925, y Carnap, *Erkenntnis* 2, 1932, pág. 440.

Este no se interesa por *cuestiones de hecho* (el *quid facti?* de Kant), sino únicamente por cuestiones de *justificación o validez* (el *quid juris?* kantiano); sus preguntas son del tipo siguiente: ¿puede justificarse un enunciado?; en caso afirmativo, ¿de qué modo?; ¿es contrastable?; ¿depende lógicamente de otros enunciados?; ¿o los contradice quizá? Para que un enunciado pueda ser examinado lógicamente de esta forma tiene que habérsenos propuesto antes: alguien debe haberlo formulado y habérnoslo entregado para su examen lógico.

En consecuencia, distinguiré netamente entre el proceso de concebir una idea nueva y los métodos y resultados de su examen lógico. En cuanto a la tarea de la lógica del conocimiento —que he contrapuesto a la psicología del mismo—, me basaré en el supuesto de que consiste pura y exclusivamente en la investigación de los métodos empleados en las contrastaciones sistemáticas a que debe someterse toda idea nueva antes de que se la pueda sostener seriamente.

Algunos objetarán, tal vez, que sería más pertinente considerar como ocupación propia de la epistemología la fabricación de lo que se ha llamado una «*reconstrucción racional*» de los pasos que han llevado al científico al descubrimiento, a encontrar una nueva verdad. Pero la cuestión se convierte entonces en: ¿qué es, exactamente, lo que queremos reconstruir? Si lo que se trata de reconstruir son los procesos que tienen lugar durante el estímulo y formación de inspiraciones, me niego a aceptar semejante cosa como tarea de la lógica del conocimiento: tales procesos son asunto de la psicología empírica, pero difícilmente de la lógica. Otra cosa es que queramos reconstruir racionalmente las *contrastaciones subsiguientes*, mediante las que se puede descubrir que cierta inspiración fue un descubrimiento, o se puede reconocer como un conocimiento. En la medida en que el científico juzga críticamente, modifica o desecha su propia inspiración, podemos considerar —si así nos place— que el análisis metodológico emprendido en esta obra es una especie de «reconstrucción racional» de los procesos intelectuales correspondientes. Pero esta reconstrucción no habrá de describir tales procesos según acontecen realmente: sólo puede dar un esqueleto lógico del procedimiento de contrastar. Y tal vez esto es todo lo que quieren decir los que hablan de una «reconstrucción racional» de los medios por los que adquirimos conocimientos.

Ocurre que los razonamientos expuestos en este libro son enteramente independientes de este problema. Sin embargo, mi opinión del asunto —valga lo que valiere— es que no existe, en absoluto, un método lógico de tener nuevas ideas, ni una reconstrucción lógica de este proceso. Puede expresarse mi parecer diciendo que todo descubrimiento contiene «un elemento irracional» o «una intuición creadora» en el sentido de Bergson. Einstein habla de un modo parecido de la «búsqueda de aquellas leyes sumamente universales... a partir de las cuales puede obtenerse una imagen del mundo por pura deducción. No existe una senda lógica —dice— que encamine a estas...

leyes. Sólo pueden alcanzarse por la intuición, apoyada en algo así como una introyección *('Einfühlung')* de los objetos de la experiencia»[1].

3. Contrastación deductiva de teorías

De acuerdo con la tesis que hemos de proponer aquí, el método de contrastar críticamente las teorías y de escogerlas, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en su contraste, procede siempre del modo que indicamos a continuación. Una vez presentada a título provisional una nueva idea, aún no justificada en absoluto —sea una anticipación, una hipótesis, un sistema teórico o lo que se quiera—, se extraen conclusiones de ella por medio de una deducción lógica; estas conclusiones se comparan entre sí y con otros enunciados pertinentes, con objeto de hallar las relaciones lógicas (tales como equivalencia, deductibilidad, compatibilidad o incompatibilidad, etc.) que existan entre ellas.

Si queremos, podemos distinguir cuatro procedimientos de llevar a cabo la contrastación de una teoría. En primer lugar, se encuentra la comparación lógica de las conclusiones unas con otras: con lo cual se somete a contraste la coherencia interna del sistema. Después, está el estudio de la forma lógica de la teoría, con objeto de determinar su carácter: si es una teoría empírica —científica— o si, por ejemplo, es tautológica. En tercer término, tenemos la comparación con otras teorías, que tiene por principal mira la de averiguar si la teoría examinada constituiría un adelanto científico en caso de que sobreviviera a las diferentes contrastaciones a que la sometemos. Y finalmente, viene el contrastarla por medio de la aplicación empírica de las conclusiones que pueden deducirse de ella.

Lo que se pretende con el último tipo de contraste mencionado es descubrir hasta qué punto satisfarán las nuevas consecuencias de la teoría —sea cual fuere la novedad de sus asertos— a los requerimientos de la práctica, ya provengan éstos de experimentos puramente científicos o de aplicaciones tecnológicas prácticas. También en este caso el procedimiento de contrastar resulta ser deductivo; veámoslo. Con ayuda de otros enunciados anteriormente aceptados se deducen de la teoría a contrastar ciertos enunciados singulares —que podremos denominar «predicciones»—; en especial, predicciones que sean fácilmente contrastables o aplicables. Se eligen entre estos enunciados los que no sean deductibles de la teoría vigente, y, más en particular, los que se en-

---

[1] Comunicación en el sesenta cumpleaños de Max Planck. El pasaje citado comienza con las palabras: «La tarea suprema del físico es la búsqueda de aquellas leyes sumamente universales», etc. (citado según A. Einstein, *Mein Weltbild*, 1934, pág. 168; traducción ingl. por A. Harris, *The World as I see It*, 1935, pág. 125). En Liebig, *op. cit.*, se hallan con anterioridad ideas parecidas; cf. también Mach, *Principien der Wärmelehre* (1896), págs. 443 y sigs. *La palabra alemana «*Einfühlung*» es difícil de traducir; Harris vierte: «sympathetic understanding of experience» *(comprensión sim-pática de la experiencia).*

cuentren en contradicción con ella. A continuación tratamos de decidir en lo que se refiere a estos enunciados deducidos (y a otros), comparándolos con los resultados de las aplicaciones prácticas y de experimentos. Si la decisión es positiva, esto es, si las conclusiones singulares resultan ser aceptables, o *verificadas*, la teoría a que nos referimos ha pasado con éxito las contrastaciones (por esta vez): no hemos encontrado razones para desecharla. Pero si la decisión es negativa, o sea, si las conclusiones han sido *falsadas***, esta falsación revela que la teoría de la que se han deducido lógicamente es también falsa.

Conviene observar que una decisión positiva puede apoyar a la teoría examinada sólo temporalmente, pues otras decisiones negativas subsiguientes pueden siempre derrocarla. Durante el tiempo en que una teoría resiste contrastaciones exigentes y minuciosas, y en que no la deja anticuada otra teoría en la evolución del progreso científico, podemos decir que ha «demostrado su temple» o que está «*corroborada*» *[1] por la experiencia.

En el procedimiento que acabamos de esbozar no aparece nada que pueda asemejarse a la lógica inductiva. En ningún momento he asumido que podamos pasar por un razonamiento de la verdad de enunciados singulares a la verdad de teorías. No he supuesto un solo instante que, en virtud de unas conclusiones «verificadas», pueda establecerse que unas teorías sean «verdaderas», ni siquiera meramente «probables».

En este libro pretendo dar un análisis más detallado de los métodos de contrastación deductiva; e intentaré mostrar que todos los problemas que se suelen llamar «*epistemológicos*» pueden tratarse dentro del marco de dicho análisis. En particular, los problemas a que da lugar la lógica inductiva pueden eliminarse sin dar origen a otros nuevos en su lugar.

4. El problema de la demarcación

Entre las muchas objeciones que pueden hacerse contra las tesis que he propuesto ahora mismo, la más importante es, quizá, la siguiente: al rechazar el método de la inducción —podría decirse— privo a la ciencia empírica de lo que parece ser su característica más importante; esto quiere decir que hago desaparecer las barreras que

** Empleamos el verbo *falsar* y sus derivados (*falsable, falsación, falsador*, etc.) como versión de *to falsify* y los suyos (*falsifiable, falsification, falsifier*, etc.): pues tanto *falsificar* como *falsear* tienen en castellano un sentido perfectamente vivo, que provocaría incesantes malentendidos si se empleasen aquí para traducir *to falsify* (que el autor emplea exclusivamente en el sentido de «poner de manifiesto que algo es o era falso»). *Falsar* es un término técnico del juego del tresillo, al cual podemos dotar de este otro contenido semántico sin grave riesgo, al parecer; por otra parte, no es inexistente en la historia del idioma con significado próximo al que aquí le damos: cf. Berceo, *Vida de Santo Domingo de Silos*, 114 c, *Milagros de Nuestra Señora*, 91 *c; Historia troyana polimétrica*, poema X, 151 *(N. del T.)*.

*[1] Acerca de este término, véanse la nota *1 antes del apartado 79 y el apartado *29 de mi *Postscript*.

separan la ciencia de la especulación metafísica. Mi respuesta a esta objeción es que mi principal razón para rechazar la lógica inductiva es precisamente que *no proporciona un rasgo discriminador apropiado* del carácter empírico, no metafísico, de un sistema teórico; o, en otras palabras, que *no proporciona un «criterio de demarcación» apropiado.*

Llamo *problema de la demarcación* [1] al de encontrar un criterio que nos permita distinguir entre las ciencias empíricas, por un lado, y los sistemas «metafísicos», por otro.

Hume conoció este problema e intentó resolverlo [2]; con Kant se convirtió en el problema central de la teoría del conocimiento. Si, siguiendo a Kant, llamamos «problema de Hume» al de la inducción, deberíamos designar al problema de la demarcación como «problema de Kant».

De estos dos problemas —que son fuente de casi todos los demás de la teoría del conocimiento— el de la demarcación es, según entiendo, el más fundamental. En realidad, la razón principal por la que los epistemólogos con inclinaciones empiristas tienden a prender su fe en el «método de la inducción», parece ser que la constituye su creencia de que éste es el único método que puede proporcionar un criterio de demarcación apropiado: esto se aplica, especialmente, a los empiristas que siguen las banderas del «positivismo».

Los antiguos positivistas estaban dispuestos a admitir únicamente como científicos o legítimos aquellos *conceptos* (o bien nociones, o ideas) que, como ellos decían, derivaban de la experiencia; o sea, aquellos conceptos que ellos creían lógicamente reducibles a elementos de la experiencia sensorial, tales como sensaciones (o datos sensibles), impresiones, percepciones, recuerdos visuales o auditivos, etc. Los positivistas modernos son capaces de ver con mayor claridad que la ciencia no es un sistema de conceptos, sino más bien un sistema de *enunciados* [*1]. En consecuencia, están dispuestos a admitir únicamente como científicos o legítimos los enunciados que son reducibles a enunciados elementales (o «atómicos») de experiencia —a «juicios de percepción», «proposiciones atómicas», «cláusulas protocolarias»

---

[1] Acerca de esto (y, asimismo, de lo tratado en los apartados 1 a 6 y 13 a 24), compárese mi nota: *Erkenntnis* 3, 1933, pág. 426; *la incluyo aquí, traducida, formando el apéndice *I.

[2] Cf. la última frase de su *Enquiry Concerning Human Understanding.* * Compárese con el próximo párrafo y la alusión a los epistemólogos, por ejemplo, la cita de Reichenbach del texto correspondiente a la nota 1 del apartado 1.

[*1] Veo ahora que cuando escribí este texto sobreestimé a los «positivistas modernos». Debería haber recordado que, *a este respecto*, el prometedor comienzo del *Tractatus* de Wittgenstein —«El mundo es la totalidad de los hechos, *no de las cosas*»— queda anulado por su final, en el que ataca a la persona que «no había dado significado a ciertos signos de sus proposiciones». Véase también mi *Open Society and its Enemies*, cap. 11, apartado II [vers. cast. de E. Lödel, *La sociedad abierta y sus enemigos*, Paidós, Buenos Aires, 1957, págs. 230 y sig. *(T.)*], así como el capítulo *I de mi *Postscript*, especialmente los apartados *11 (nota 5), *24 (los cinco últimos párrafos) y *25.

o como los quieran llamar *[2]—. No cabe duda de que el criterio de demarcación implicado de este modo se identifica con la lógica inductiva que piden.

Desde el momento en que rechazo la lógica inductiva he de rechazar también todos estos intentos de resolver el problema de la demarcación: con lo cual este problema aumenta de importancia en el presente estudio. El hallazgo de un criterio de demarcación aceptable tiene que ser una tarea crucial de cualquier epistemología que no acepte la lógica inductiva.

Los positivistas suelen interpretar el problema de la demarcación de un modo *naturalista:* como si fuese un problema de la ciencia natural. En lugar de considerar que se encuentran ante la tarea de proponer una convención apropiada, creen que tienen que descubrir una diferencia —que existiría, por decirlo así, en la naturaleza de las cosas— entre la ciencia empírica por una parte y la metafísica por otra. Tratan constantemente de demostrar que la metafísica, por su misma naturaleza, no es sino un parloteo absurdo —«sofistería e ilusión», como dice Hume, que deberíamos «arrojar al fuego» *[3].

Pero si con las expresiones «absurdo» o «carente de sentido» no queremos expresar otra cosa, por definición, que «no perteneciente a la ciencia empírica», en tal caso la caracterización de la metafísica como un absurdo carente de sentido será trivial: pues a la metafísica se la define normalmente como no empírica. Pero —naturalmente— los positivistas creen que pueden decir de la metafísica muchas otras cosas, además de que sus enunciados son no empíricos. Las expresiones «absurdo» y «carente de sentido» comportan una evaluación peyorativa (y se pretende que la comporten); y, sin duda alguna, lo que los positivistas tratan realmente de conseguir no es tanto una demarcación acertada como derribar definitivamente [3] y aniquilar la metafísica. Como quiera que sea, nos encontramos con que cada vez que los positivistas han intentado decir con mayor claridad lo que significaba «con sentido» la tentativa conducía al mismo resultado: a una definición de «cláusula con sentido» (en contraposición a «pseudocláusula sin sentido») que simplemente reitera el criterio de demarcación de su *lógica inductiva.*

Esto «se hace patente» con gran claridad en el caso de Wittgens-

---

*[2] Desde luego, nada depende de los nombres. Cuando inventé el nuevo nombre «enunciado básico» (o «proposición básica»: véanse, más abajo, los apartados 7 y 28), lo hice *sólo* porque necesitaba un término *no* cargado con la connotación de enunciado perceptivo; pero, desgraciadamente, lo adoptaron pronto otras personas, y lo utilizaron para transmitir justamente la clase de significado que yo había querido evitar. Cf. también mi *Postscript,* apartado *29.

*[3] Hume, por tanto, condenó su propia *Enquiry* en la última página, de igual modo que Wittgenstein, más tarde, ha condenado su propio *Tractatus* en la última página. (Véase la nota 2 al apartado 10.)

[3] CARNAP, *Erkenntnis* 2, 1932, págs. 219 y sigs. Anteriormente, Mill había usado la expresión «carente de sentido» de forma análoga, *sin duda alguna bajo la influencia de Comte; cf. también los *Early Essays on Social Philosophy* de COMTE, ed. por H. D. Hutton, 1911, citados en mi *Open Society,* nota 51 del capítulo 11.

tein, según el cual toda proposición con sentido tiene que ser ***lógicamente reducible***[4] a proposiciones elementales (o «atómicas»), que caracteriza como descripciones o «imágenes de la realidad»[5] (caracterización, por cierto, que ha de cubrir todas las proposiciones con sentido). Podemos darnos cuenta de que el criterio de sentido de Wittgenstein coincide con el criterio de demarcación de los inductivistas, sin más que remplazar las palabras «científica» o «legítima» por «con sentido». Y es precisamente al llegar al problema de la inducción donde se derrumba este intento de resolver el problema de la demarcación: los positivistas, en sus ansias de aniquilar la metafísica, aniquilan juntamente con ella la ciencia natural. Pues tampoco las leyes científicas pueden reducirse lógicamente a enunciados elementales de experiencia. Si se aplicase con absoluta coherencia, el criterio de sentido de Wittgenstein rechazaría por carentes de sentido aquellas leyes naturales cuya búsqueda, como dice Einstein[6], es «la tarea suprema del físico»: nunca podrían aceptarse como enunciados auténticos o legítimos. La tentativa wittgensteiniana de desenmascarar el problema de la inducción como un pseudoproblema vacío, ha sido expresada por Schlick [*4] con las siguientes palabras: «El problema de la inducción consiste en preguntar por la justificación lógica de los *enunciados universales* acerca de la realidad... Reconocemos, con Hume, que no existe semejante justificación lógica: no puede haber ninguna, por el simple hecho de que *no son auténticos* enunciados»[7].

Esto hace ver que el criterio inductivista de demarcación no consigue trazar una línea divisoria entre los sistemas científicos y los metafísicos, y por qué ha de asignar a unos y otros el mismo estatuto:

---

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus* (1918 y 1922), Proposición 5. [vers. cast. de E. TIERNO GALVÁN, Revista de Occidente, Madrid, 1957 *(T.)*]. *Esto se escribió en 1934, y, por tanto, me refiero *exclusivamente*, como es natural, al *Tractatus* («se hace patente» es una de sus expresiones favoritas).

[5] WITTGENSTEIN, *op. cit.*, Proposiciones 4.01, 4.03 y 2.221.

[6] Cf. la nota 1 del apartado 2.

[*4] Schlick atribuyó a Wittgenstein la idea de tratar las leyes científicas como pseudoproposiciones, con lo cual se resolvía el problema de la inducción. (Cf. mi *Open Society*, notas 46 y 51 y sig. del capítulo 11.) Pero, en realidad, es mucho más antigua: forma parte de la tradición instrumentalista que puede hacerse remontar a Berkeley e incluso más atrás. [Véanse, por ejemplo, mi trabajo «Three Views Concerning Human Knowledge», en *Contemporary British Philosophy*, 1956, y «A Note on Berkeley as a Precursor of Mach», en *The British Journal for the Philosophy of Science*, IV, 4, 1953, págs. 26 y sigs., reimpreso en mi *Conjectures and Refutations*, 1959; se encontrarán otras referencias en la nota *1 que precede al apartado 12 (pág. 57). En mi *Postscript* trato asimismo este problema: apartados *11 a *14 y *19 a *26.]

[7] SCHLICK, *Naturwissenschaften* 19, 1931, pág. 156 (la cursiva es mía). En lo que se refiere a las leyes naturales, Schlick escribe (pág. 151): «Se ha hecho notar a menudo que, estrictamente, no podemos hablar nunca de una verificación absoluta de una ley, pues hacemos siempre —por decirlo así— la salvedad de que puede ser modificada a la vista de nuevas experiencias. Si puedo añadir, entre paréntesis —continúa Schlick—, algunas palabras acerca de esta situación lógica, el hecho mencionado arriba significa que una ley natural no tiene, en principio, el carácter de un enunciado, sino que es más bien una prescripción para la formación de enunciados». *(No cabe duda de que se pretendía incluir en «formación» la transformación y la deducción.) Schlick atribuía esta teoría a una comunicación personal de Wittgenstein. Véase también el apartado *12 de mi *Postcript.*

pues el veredicto del dogma positivista del sentido es que ambos son sistemas de pseudoaserciones sin sentido. Así pues, en lugar de descastar radicalmente la metafísica de las ciencias empíricas, el positivismo lleva a una invasión del campo científico por aquélla [8].

Frente a estas estratagemas antimetafísicas —antimetafísicas en la intención, claro está— no considero que haya de ocuparme en derribar la metafísica, sino, en vez de semejante cosa, en formular una caracterización apropiada de la ciencia empírica, o en definir los conceptos de «ciencia empírica» y de «metafísica» de tal manera que, ante un sistema dado de enunciados, seamos capaces de decir si es asunto o no de la ciencia empírica el estudiarlo más de cerca.

Mi criterio de demarcación, por tanto, ha de considerarse como una *propuesta para un acuerdo o convención*. En cuanto a si tal convención es apropiada o no lo es, las opiniones pueden diferir; mas sólo es posible una discusión razonable de estas cuestiones entre partes que tienen cierta finalidad común a la vista. Por supuesto que la elección de tal finalidad tiene que ser, en última instancia, objeto de una decisión que vaya más allá de toda argumentación racional [*5].

Por tanto, quienquiera que plantee un sistema de enunciados absolutamente ciertos, irrevocablemente verdaderos [9], como finalidad de la ciencia, es seguro que rechazará las propuestas que voy a hacer aquí. Y lo mismo harán quienes ven «la esencia de la ciencia... en su dignidad», que consideran reside en su «carácter de totalidad» y en su «verdad y esencialidad reales» [10]. Difícilmente estarán dispuestos a otorgar esta dignidad a la física teórica moderna, en la que tanto otras personas como yo vemos la realización más completa hasta la fecha de lo que yo llamo «ciencia empírica».

Las metas de la ciencia a las que me refiero son otras. No trato de justificarlas, sin embargo, presentándolas como el blanco verdadero o esencial de la ciencia, lo cual serviría únicamente para perturbar la cuestión y significaría una recaída en el dogmatismo positivista. No alcanzo a ver más que *una* sola vía para argumentar racionalmente en apoyo de mis propuestas: la de analizar sus consecuencias lógicas —señalar su fertilidad, o sea, su poder de elucidar los problemas de la teoría del conocimiento.

Así pues, admito abiertamente que para llegar a mis propuestas me he guiado, en última instancia, por juicios de valor y por predilecciones. Mas espero que sean aceptables para todos los que no sólo aprecian el rigor lógico, sino la libertad de dogmatismos; para quienes buscan la aplicabilidad práctica, pero se sienten atraídos aún en

---

[8] Cf. el apartado 78 (por ejemplo, la nota 1). * Véanse también mi *Open Society*, notas 46, 51 y 52 del capítulo 11, y mi trabajo «The Demarcation between Science and Metaphysics», entregado en enero de 1955 para el tomo dedicado a Carnap (aún no publicado) de la *Library of Living Philosophers*, ed. por P. A. SCHILPP.

[*5] Creo que siempre es posible una discusión razonable entre partes interesadas por la verdad y dispuestas a prestarse atención mutuamente (cf. mi *Open Society*, capítulo 24).

[9] Esta es la tesis de Dingler; cf. nota 1 del apartado 19.

[10] Tesis de O. SPANN (*Kategorienlehre*, 1924).

mayor medida por la aventura de la ciencia y por los descubrimientos que una y otra vez nos enfrentan con cuestiones nuevas e inesperadas, que nos desafían a ensayar respuestas nuevas e insospechadas.

El hecho de que ciertos juicios de valor hayan influido en mis propuestas no quiere decir que esté cometiendo el error de que he acusado a los positivistas —el de intentar el asesinato de la metafísica por medio de nombres infamantes—. Ni siquiera llego a afirmar que la metafísica carezca de valor para la ciencia empírica. Pues no puede negarse que, así como ha habido ideas metafísicas que han puesto una barrera al avance de la ciencia, han existido otras —tal el atomismo especulativo— que la han ayudado. Y si miramos el asunto desde un ángulo psicológico, me siento inclinado a pensar que la investigación científica es imposible sin fe en algunas ideas de una índole puramente especulativa (y, a veces, sumamente brumosas): fe desprovista enteramente de garantías desde el punto de vista de la ciencia, y que —en esta misma medida— es «metafísica» [11].

Una vez que he hecho estas advertencias, sigo considerando que la primera tarea de la lógica del conocimiento es proponer un *concepto de ciencia empírica* con objeto de llegar a un uso lingüístico —actualmente algo incierto— lo más definido posible, y a fin de trazar una línea de demarcación clara entre la ciencia y las ideas metafísicas —aun cuando dichas ideas puedan haber favorecido el avance de la ciencia a lo largo de toda su historia.

5. La experiencia como método

La tarea de formular una definición aceptable de la idea de ciencia empírica no está exenta de dificultades. Algunas de ellas surgen del *hecho de que tienen que existir muchos sistemas teóricos* cuya estructura lógica sea muy parecida a la del sistema aceptado en un momento determinado como sistema de la ciencia empírica. En ocasiones se describe esta situación diciendo que existen muchísimos «mundos lógicamente posibles» —posiblemente un número infinito de ellos—. Y, con todo, se pretende que el sistema llamado «ciencia empírica» represente únicamente *un* mundo: el «mundo real» o «mundo de nuestra experiencia» [*1].

Con objeto de precisar un poco más esta afirmación, podemos distinguir tres requisitos que nuestro sistema teórico empírico tendrá que satisfacer. Primero, ha de ser *sintético,* de suerte que pueda representar un mundo no contradictorio, *posible;* en segundo lugar, debe satisfacer el criterio de demarcación (cf. los apartados 6 y 21), es decir, no será metafísico, sino representará un mundo de *experiencia*

---

[11] Cf. también: Plank, *Positivismus und reale Aussenwelt* (1931), y Einstein, «Die Religiosität der Forschung», en *Mein Weltbild* (1934), pág. 43; trad. ingl. por A. Harris, *The World as I see It* (1935), págs. 23 y sigs. * Véanse, asimismo, el apartado 85 y mi *Postscript.*

[*1] Cf. el apéndice *X.

posible; en tercer término, es menester que sea un sistema que se distinga —de alguna manera— de otros sistemas semejantes por ser el que represente *nuestro* mundo de experiencia.

Mas, ¿cómo ha de distinguirse el sistema que represente nuestro mundo de experiencia? He aquí la respuesta: por el hecho de que se le ha sometido a contraste y ha resistido las contrastaciones. Esto quiere decir que se le ha de distinguir aplicándole el método deductivo que pretendo analizar y describir.

Según esta opinión, la «experiencia» resulta ser un *método* distintivo mediante el cual un sistema teórico puede distinguirse de otros; con lo cual la ciencia empírica se caracteriza —al parecer— no sólo por su forma lógica, sino por su *método* de distinción. (Desde luego, ésta es también la opinión de los inductivistas, que intentan caracterizar la ciencia empírica por su empleo del método inductivo.)

Por tanto, puede describirse la teoría del conocimiento, cuya tarea es el análisis del método o del proceder peculiar de la ciencia empírica, como una teoría del método empírico —*una teoría de lo que normalmente se llama experiencia.*

6. La falsabilidad como criterio de demarcación

El criterio de demarcación inherente a la lógica inductiva —esto es, el dogma positivista del significado o sentido [en ingl., *meaning*]— equivale a exigir que todos los enunciados de la ciencia empírica (o, todos los enunciados «con sentido») sean susceptibles de una decisión definitiva con respecto a su verdad y a su falsedad; podemos decir que tienen que ser «*decidibles de modo concluyente*». Esto quiere decir que han de tener una forma tal que sea lógicamente posible *tanto verificarlos como falsarlos*. Así, dice Schlick: «... un auténtico enunciado tiene que ser susceptible de *verificación concluyente*» [1]; y Waismann escribe, aún con mayor claridad: «Si no es posible *determinar si un enunciado es verdadero*, entonces carece enteramente de sentido: pues el sentido de un enunciado es el método de su verificación» [2].

Ahora bien; en mi opinión, no existe nada que pueda llamarse inducción [*1]. Por tanto, será lógicamente inadmisible la inferencia de teorías a partir de enunciados singulares que estén «verificados por la experiencia» (cualquiera que sea lo que esto quiera decir). Así pues, las teorías no son *nunca* verificables empíricamente. Si queremos evitar el error positivista de que nuestro criterio de demarcación elimine los sistemas teóricos de la ciencia natural [*2], debemos elegir

---

[1] Schlick, *Naturwissenschaften* **19**, 1931, pág. 150.

[2] Waismann, *Erkenntnis* **1**, 1930, pág. 229.

[*1] No me refiero aquí, desde luego, a la llamada «inducción matemática»; lo que niego es que exista nada que pueda llamarse inducción en lo que se denominan «ciencias inductivas»: que existan «procedimientos inductivos» o «inferencias inductivas».

[*2] En su *Logical Syntax* (1937, págs. 321 y sig.), Carnap admitía que se trataba de un error (y mencionaba mis críticas); y todavía avanzó más en este sentido en

un criterio que nos permita admitir en el dominio de la ciencia empírica incluso enunciados que no puedan verificarse.

Pero, ciertamente, sólo admitiré un sistema entre los científicos o empíricos si es susceptible de ser *contrastado* por la experiencia. Estas consideraciones nos sugieren que el criterio de demarcación que hemos de adoptar no es el de la *verificabilidad*, sino el de la *falsabilidad* de los sistemas *[3]. Dicho de otro modo: no exigiré que un sistema científico pueda ser seleccionado, de una vez para siempre, en un sentido positivo; pero sí que sea susceptible de selección en un sentido negativo por medio de contrastes o pruebas empíricas: *ha de ser posible refutar por la experiencia un sistema científico empírico* [3].

(Así, el enunciado «lloverá o no lloverá aquí mañana» no se considerará empírico, por el simple hecho de que no puede ser refutado; mientras que a este otro, «lloverá aquí mañana», debe considerársele empírico.)

Pueden hacerse varias objeciones al criterio de demarcación que acabamos de proponer. En primer lugar, puede muy bien parecer que toda sugerencia de que la ciencia —que, según se admite, nos proporciona informaciones positivas— haya de caracterizarse por satisfacer una exigencia negativa, como es la de refutabilidad, se encamina en una dirección falsa. Sin embargo, haré ver (en los apartados 31 a 46) que esta objeción carece de peso, pues el volumen de información positiva que un enunciado científico comporta es tanto mayor cuanto más fácil es que choque —debido a su carácter lógico— con enunciados singulares posibles. (No en vano llamamos «leyes» a las leyes de la Naturaleza: cuanto más prohiben más dicen.)

Puede también hacerse de nuevo un intento de volver contra mí mi propia crítica del criterio inductivista de demarcación: pues podría parecer que cabe suscitar objeciones contra la falsabilidad como criterio de demarcación análogas a las que yo he suscitado contra la verificabilidad.

Testability and Meaning, donde reconoció el hecho de que las leyes universales no son solamente «convenientes» para la ciencia, sino incluso «esenciales» *(Philosophy of Science* 4, 1937, pág. 27). Pero en su obra inductivista *Logical Foundations of Probability* (1950) vuelve a una posición muy semejante a la que aquí criticamos: al encontrar que las leyes universales tienen probabilidad cero (pág. 571) se ve obligado a decir (pág. 575) que, aunque no es necesario expulsarlas de la ciencia, ésta puede manejárselas perfectamente sin ellas.

*[3] Obsérvese que propongo la falsabilidad como criterio de demarcación, pero *no de sentido*. Adviértase, además, que anteriormente (en el apartado 4) he criticado enérgicamente el empleo de la idea de sentido como criterio de demarcación, y que ataco el dogma del sentido, aún más enérgicamente, en el apartado 9. Por tanto, es un puro mito (aunque gran número de refutaciones de mi teoría están basadas en él) decir que haya propuesto jamás la falsabilidad como criterio de sentido. La falsabilidad separa dos tipos de enunciados perfectamente dotados de sentido, los falsables y los no falsables: traza una línea dentro del lenguaje con sentido, no alrededor de él. Véanse también el apéndice *I y el capítulo *1 de mi *Postscript*, especialmente los apartados *17 y *19.

[3] En otros autores se encuentran ideas análogas: por ejemplo, en FRANK, *Die Kausalität und ihre Grenzen* (1931), capítulo I, § 10 (págs. 15 y sig.), y en DUBISLAV, *Die Definition* (3.ª ed., 1931), págs. 100 y sig. (Cf. asimismo, más arriba, la nota 1 del apartado 4.)

Este ataque no me alteraría. Mi propuesta está basada en una *asimetría* entre la verificabilidad y la falsabilidad: asimetría que se deriva de la forma lógica de los enunciados universales *[4]. Pues éstos no son jamás deductibles de enunciados singulares, pero sí pueden estar en contradicción con estos últimos. En consecuencia, por medio de inferencias puramente deductivas (valiéndose del *modus tollens* de la lógica clásica) es posible argüir de la verdad de enunciados singulares la falsedad de enunciados universales. Una argumentación de esta índole, que lleva a la falsedad de enunciados universales, es el único tipo de inferencia estrictamente deductiva que se mueve, como si dijéramos, en «dirección inductiva»: esto es, de enunciados singulares a universales.

Más grave puede parecer una tercera objeción. Podría decirse que, incluso admitiendo la asimetría, sigue siendo imposible —por varias razones— falsar de un modo concluyente un sistema teórico: pues siempre es posible encontrar una vía de escape de la falsación, por ejemplo, mediante la introducción *ad hoc* de una hipótesis auxiliar o por cambio *ad hoc* de una definición; se puede, incluso, sin caer en incoherencia lógica, adoptar la posición de negarse a admitir cualquier experiencia falsadora. Se reconoce que los científicos no suelen proceder de este modo, pero el procedimiento aludido siempre es lógicamente posible; y puede pretenderse que este hecho convierte en dudoso —por lo menos— el valor lógico del criterio de demarcación que he propuesto.

Me veo obligado a admitir que esta crítica es justa; pero no necesito, por ello, retirar mi propuesta de adoptar la falsabilidad como criterio de demarcación. Pues voy a proponer (en los apartados 20 y siguientes) que se caracterice el *método empírico* de tal forma que excluya precisamente aquellas vías de eludir la falsación que mi imaginario crítico señala insistentemente, con toda razón, como lógicamente posibles. De acuerdo con mi propuesta, lo que caracteriza al método empírico es su manera de exponer a falsación el sistema que ha de contrastarse: justamente de todos los modos imaginables. Su meta no es salvarles la vida a los sistemas insostenibles, sino, por el contrario, elegir el que comparativamente sea más apto, sometiendo a todos a la más áspera lucha por la supervivencia.

El criterio de demarcación propuesto nos conduce a una solución del problema de Hume de la inducción, o sea, el problema de la validez de las leyes naturales. Su raíz se encuentra en la aparente contradicción existente entre lo que podría llamarse «la tesis fundamental del empirismo» —la de que sólo la experiencia puede decidir acerca de la verdad o la falsedad de los enunciados científicos— y la inadmisibilidad de los razonamientos inductivos, de la que se dio cuenta Hume. Esta contradicción surge únicamente si se supone que todos los enunciados científicos empíricos han de ser «decidibles de modo concluyente», esto es, que, en principio, tanto su verificación como

*[4] Me ocupo ahora más a fondo de esta asimetría en el apartado *22 de mi *Postscript*.

su falsación han de ser posibles. Si renunciamos a esta exigencia y admitimos como enunciados empíricos también los que sean decidibles en un solo sentido —decidibles unilateralmente, o, más en particular, falsables— y puedan ser contrastados mediante ensayos sistemáticos de falsación, desaparece la contradicción: el método de falsación no presupone la inferencia inductiva, sino únicamente las transformaciones tautológicas de la lógica deductiva, cuya validez no se pone en tela de juicio [4].

7. El problema de la «base empírica»

Para que la falsabilidad pueda aplicarse de algún modo como criterio de demarcación deben tenerse a mano enunciados singulares que puedan servir como premisas en las inferencias falsadoras. Por tanto, nuestro criterio aparece como algo que solamente desplaza el problema —que nos retrotrae de la cuestión del carácter empírico de las teorías a la del carácter empírico de los enunciados singulares.

Pero incluso en este caso se ha conseguido algo. Pues en la práctica de la investigación científica la demarcación presenta, a veces, una urgencia inmediata en lo que se refiere a los sistemas teóricos, mientras que rara vez se suscitan dudas acerca de la condición empírica de los enunciados singulares. Es cierto que se tienen errores de observación, y que dan origen a enunciados singulares falsos, pero un científico casi nunca se encuentra en el trance de describir un enunciado singular como no empírico o metafísico.

Por tanto, los *problemas de la base empírica* —esto es, los concernientes al carácter empírico de enunciados singulares y a su contrastación— desempeñan un papel en la lógica de la ciencia algo diferente del representado por la mayoría de los demás problemas de que habremos de ocuparnos. Pues gran parte de éstos se encuentran en relación estrecha con la *práctica* de la investigación, mientras que el problema de la base empírica pertenece casi exclusivamente a la *teoría* del conocimiento. Me ocuparé de ellos, sin embargo, ya que dan lugar a muchos puntos obscuros: lo cual ocurre, especialmente, con las relaciones entre *experiencias perceptivas* y *enunciados básicos*. (Llamo «enunciado básico» o «proposición básica» a un enunciado que puede servir de premisa en una falsación empírica: brevemente dicho, a la enunciación de un hecho singular.)

Se ha considerado con frecuencia que las experiencias perceptivas proporcionan algo así como una justificación de los enunciados básicos: se ha mantenido que estos enunciados están «basados sobre» tales experiencias, que mediante éstas se «manifiesta por inspección» la verdad de aquéllos, o que dicha verdad se hace «patente» en las experiencias mencionadas, etc. Todas estas expresiones muestran una ten-

[4] Acerca de esta cuestión, véase también mi trabajo mencionado en la nota 1 del apartado 4, * que ahora está incluido aquí en el apéndice *I, y, asimismo, mi *Postscript*, especialmente el apartado *2.

dencia perfectamente razonable a subrayar la estrecha conexión existente entre los enunciados básicos y nuestras experiencias perceptivas. Con todo, se tenía la impresión (exacta) de que *los enunciados sólo pueden justificarse lógicamente mediante otros enunciados:* por ello, la conexión entre las percepciones y los enunciados permanecía obscura, y era descrita por expresiones de análoga obscuridad que no aclaraban nada, sino que resbalaban sobre las dificultades o, en el mejor de los casos, las señalaban fantasmalmente con metáforas.

También en este caso puede encontrarse una solución, según creo, si separamos claramente los aspectos psicológicos del problema de los lógicos y metodológicos. Hemos de distinguir, por una parte, *nuestras experiencias subjetivas o nuestros sentimientos de convicción*, que no pueden jamás justificar enunciado alguno (aun cuando pueden ser objeto de investigación psicológica), y, por otra, las *relaciones lógicas objetivas* existentes entre los diversos sistemas de enunciados científicos y en el interior de cada uno de ellos.

En los apartados 25 a 30 trataremos con algún detalle los problemas referentes a la base empírica. Por el momento, he de volverme hacia el problema de la objetividad científica, pues los términos «objetivo» y «subjetivo» que acabo de utilizar necesitan aclaración.

8. Objetividad científica y convicción subjetiva

Las palabras «objetivo» y «subjetivo» son términos filosóficos cargados de una pesada herencia de usos contradictorios y de discusiones interminables y nunca concluyentes.

El empleo que hago de los términos «objetivo» y «subjetivo» no es muy distinto del kantiano. Kant utiliza la palabra «objetivo» para indicar que el conocimiento científico ha de ser *justificable*, independientemente de los caprichos de nadie: una justificación es «objetiva» si en principio puede ser contrastada y comprendida por cualquier persona. «Si algo es válido —escribe— para quienquiera que esté en uso de razón, entonces su fundamento es objetivo y suficiente» [1].

Ahora bien; yo mantengo que las teorías científicas no son nunca enteramente justificables o verificables, pero que son, no obstante, contrastables. Diré, por tanto, que la *objetividad* de los enunciados científicos descansa en el hecho de que pueden *contrastarse intersubjetivamente* [*1].

---

[1] *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, 2. Haupstück, 3. Abschnitt (2.ª ed., página 848; trad. ingl. por N. Kemp Smith, 1933: *Critique of Pure Reason*, The Trascendental Doctrine of Method, capítulo II, sección 3.ª, pág. 645) [vers. cast. de J. del Perojo y F. L. Alvarez, 1952 (4.ª ed.): *Crítica de la razón pura* (Sopena Argentina, Buenos Aires), Teoría trascendental del método, capítulo II, sección 3.ª, página 192 del t. II *(T.)*].

[*1] Desde que escribí estas palabras he generalizado esta formulación: pues la *contrastación* intersubjetiva es meramente un aspecto muy importante de la idea más general de la *crítica* intersubjetiva, o, dicho de otro modo, de la idea de la regulación racional mutua por medio del debate crítico. Esta idea más general, que he tratado

Kant aplica la palabra «subjetivo» a nuestros sentimientos de convicción (de mayor o menor grado) [2]. El examen de cómo aparecen éstos es asunto de la psicología: pueden surgir, por ejemplo, «según leyes de la asociación» [3]; también pueden servir razones objetivas como «*causas* subjetivas del juzgar» [4], desde el momento en que reflexionamos sobre ellas y nos convencemos de su congruencia.

Quizá fue Kant el primero en darse cuenta de que la objetividad de los enunciados se encuentra en estrecha conexión con la construcción de teorías —es decir, con el empleo de hipótesis y de enunciados universales—. Sólo cuando se da la recurrencia de ciertos acontecimientos de acuerdo con reglas o regularidades —y así sucede con los experimentos repetibles— pueden ser contrastadas nuestras observaciones por cualquiera (en principio). Ni siquiera tomamos muy en serio nuestras observaciones, ni las aceptamos como científicas, hasta que las hemos repetido y contrastado. Sólo merced a tales repeticiones podemos convencernos de que no nos encontramos con una mera «coincidencia» aislada, sino con acontecimientos que, debido a su regularidad y reproductibilidad, son, en principio, contrastables intersubjetivamente [5].

Todo físico experimental conoce esos sorprendentes e inexplicables «efectos» aparentes, que tal vez pueden, incluso, ser reproducidos en *su* laboratorio durante cierto tiempo, pero que finalmente desaparecen sin dejar rastro. Por supuesto, ningún físico diría en tales casos que había hecho un descubrimiento científico (aun cuando puede intentar una nueva puesta a punto de sus experimentos con objeto de hacer reproducible el efecto). En realidad, puede definirse el *efecto físico* científicamente significativo como aquél que cualquiera puede reproducir con regularidad sin más que llevar a cabo el experimento apropiado del modo prescrito. Ningún físico serio osaría publicar, en concepto de descubrimiento científico, ningún «efecto oculto» (como

con cierta extensión en mi *Open Society and its Enemies*, capítulos 23 y 24, y en mi *Poverty of Historicism* [traducción castellana por P. SCHWARTZ, *La miseria del historicismo*, Taurus, Madrid, 1961 *(T.)*], apartado 32, se somete a estudio también en mi *Postscript*, en particular, en los capítulos *I, *II, y *VI.

[2] *Ibid.*

[3] Cf. *Kritik der reinen Vernunft*, Trascendentale Elementarlehre, § 19 (2.ª ed., página 142; trad. ingl. por N. KEMP SMITH, 1933, *Critique of Pure Reason*, Trascendental Doctrine of Elements, § 19, pág. 159). [vers. esp. cit., pág. 136 del t. I *(T.)*].

[4] Cf. *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, 2, Haupstück, 3. Abschnitt (2.ª ed., pág. 849; vers. ingl., capítulo II, sección 3.ª, pág. 646 [trad. cast. cit., página 193 del t. II *(T.)*].

[5] Kant se dio cuenta de que de la objetividad que se ha requerido para los enunciados científicos se sigue que deben ser contrastables intersubjetivamente en cualquier momento, y que han de tener, por tanto, la forma de leyes universales o teorías. Expresó tal descubrimiento, de modo poco claro, por medio de su «principio de sucesión temporal de acuerdo con la ley de causalidad» (principio que creyó podía demostrar *a priori* por medio del razonamiento que hemos indicado). Yo no postulo semejante principio (cf. el apartado 12); pero estoy de acuerdo en que los enunciados científicos, puesto que deben ser constrastables intersubjetivamente, han de tener siempre el carácter de hipótesis universales. * Véase también la nota *1 del apartado 12.

propongo llamarlo) de esta índole, es decir, para cuya reproducción no pudiese dar instrucciones. Semejante «descubrimiento» se rechazaría más que de prisa por quimérico, simplemente porque las tentativas de contrastarlo llevarían a resultados negativos [6]. (De ello se sigue que cualquier controversia sobre la cuestión de si ocurren en absoluto acontecimientos que en principio sean irrepetibles y únicos no puede decidirse por la ciencia: se trataría de una controversia metafísica.)

Podemos volver ahora a un aserto planteado en el apartado anterior: a mi tesis de que una experiencia subjetiva, o un sentimiento de convicción, nunca pueden justificar un enunciado científico; y de que semejantes experiencias y convicciones no pueden desempeñar en la ciencia otro papel que el de objeto de una indagación empírica (psicológica). Por intenso que sea un sentimiento de convicción nunca podrá justificar un enunciado. Por tanto, puedo estar absolutamente convencido de la verdad de un enunciado, seguro de la evidencia de mis percepciones, abrumado por la intensidad de mi experiencia: puede parecerme absurda toda duda. Pero, ¿aporta, acaso, todo ello la más leve razón a la ciencia para aceptar mis enunciados? ¿Puede justificarse ningún enunciado por el hecho de que K. R. P. esté absolutamente convencido de su verdad? La única respuesta posible es que no, y cualquiera otra sería incompatible con la idea de la objetividad científica. Incluso el hecho —para mí tan firmemente establecido— de que estoy experimentando un sentimiento de convicción, no puede aparecer en el campo de la ciencia objetiva más que en forma de *hipótesis psicológica;* la cual, naturalmente, pide un contraste o comprobación intersubjetivo: a partir de la conjetura de que yo tengo este sentimiento de convicción, el psicólogo puede deducir, valiéndose de teorías psicológicas y de otra índole, ciertas predicciones acerca de mi conducta —que pueden confirmarse o refutarse mediante contrastaciones experimentales—. Pero, desde el punto de vista epistemológico, carece enteramente de importancia que mi sentimiento de convicción haya sido fuerte o débil, que haya procedido de una impresión poderosa o incluso irresistible de certeza indudable (o «evidencia»), o simplemente de una insegura sospecha: nada de todo esto desempeña el menor papel en la cuestión de cómo pueden justificarse los enunciados científicos.

Las consideraciones del tipo que acabo de hacer no nos proporcio-

---

[6] En la bibliografía de la física se encuentran varios ejemplos de informes presentados por investigadores serios sobre la aparición de efectos que no podían ser reproducidos a voluntad, ya que otras contrastaciones posteriores habían llevado a resultados negativos. Un ejemplo muy conocido, y reciente, es el resultado positivo —que no ha recibido explicación— del experimento de Michelson, resultado observado por Miller (1921-1926) en Mount Wilson, después de haber reproducido él mismo (así como Morley) el resultado negativo de Michelson. Pero, puesto que otras contrastaciones posteriores volvieron a dar resultados negativos, es costumbre considerar que los decisivos son estos últimos, y explicar las observaciones divergentes de Miller como «debidas a causas de error desconocidas». * Véase también el apartado 22, en especial la nota *1.

nan, desde luego, una respuesta para el problema de la base empírica; pero, al menos, nos ayudan a caer en la cuenta de su dificultad principal. Al exigir que haya objetividad, tanto en los enunciados básicos como en cualesquiera otros enunciados científicos, nos privamos de todos los medios lógicos por cuyo medio pudiéramos haber esperado reducir la verdad de los enunciados científicos a nuestras experiencias. Aún más: nos vedamos todo conceder un rango privilegiado a los enunciados que formulan experiencias, como son los que describen nuestras percepciones (y a los que, a veces, se llama «cláusulas protocolarias»): pueden aparecer en la ciencia únicamente como enunciados psicológicos, lo cual quiere decir como hipótesis de un tipo cuyo nivel de contrastación intersubjetiva no es, ciertamente, muy elevado (teniendo en cuenta el estado actual de la psicología).

Cualquiera que sea la respuesta que demos finalmente a la cuestión de la base empírica, una cosa tiene que quedar clara: si persistimos en pedir que los enunciados científicos sean objetivos, entonces aquéllos que pertenecen a la base empírica de la ciencia tienen que ser también objetivos, es decir, contrastables intersubjetivamente. Pero la contrastabilidad intersubjetiva implica siempre que, a partir de los enunciados que se han de someter a contraste, puedan deducirse otros también contrastables. Por tanto, si los enunciados básicos han de ser contrastables intersubjetivamente a su vez, *no puede haber enunciados últimos en la ciencia:* no pueden existir en la ciencia enunciados últimos que no puedan ser contrastados, y, en consecuencia, ninguno que no pueda —en principio— ser refutado al falsar algunas de las conclusiones que sea posible deducir de él.

De este modo llegamos a la siguiente tesis. Los sistemas teóricos se contrastan deduciendo de ellos enunciados de un nivel de universalidad más bajo; éstos, puesto que han de ser contrastables intersubjetivamente, tienen que poderse contrastar de manera análoga —y así *ad infinitum.*

Podría pensarse que esta tesis lleva a una regresión infinita, y que, por tanto, es insostenible. En el apartado 1, al criticar la inducción, opuse la objeción de que llevaría a un regreso infinito; y puede muy bien parecerle ahora al lector que la misma objeción exactamente puede invocarse contra el procedimiento de contrastación deductiva que defiendo a mi vez. Sin embargo, no ocurre así. El método deductivo de contrastar no puede estatuir ni justificar los enunciados que se contrastan, ni se pretende que lo haga; de modo que no hay peligro de una regresión infinita. Pero ha de admitirse que la situación sobre la que acabo de llamar la atención —la contrastabilidad *ad infinitum* y la ausencia de enunciados últimos que no necesitasen ser contrastados— crea, ciertamente, un problema. Pues es evidente que, de hecho, las contrastaciones no pueden prolongarse *ad infinitum:* más tarde o más temprano hemos de detenernos. Sin discutir ahora el problema en detalle, quiero únicamente señalar que la circunstancia de que las contrastaciones no puedan continuar indefinidamente no choca con mi petición de que todo enunciado científico sea contrastable. Pues no pido que sea preciso *haber contrastado realmente* todo enunciado científico antes de aceptarlo: sólo requiero que cada uno de estos enunciados sea *susceptible* de contrastación; dicho de otro modo: me niego a admitir la tesis de que en la ciencia existan enunciados cuya verdad hayamos de aceptar resignadamente, por la simple razón de no parecer posible —por razones lógicas— someterlos a contraste.

Sobre el problema de una teoría del método científico

De acuerdo con la propuesta que he hecho más arriba, la epistemología —o, la lógica de la investigación científica— debería identificarse con la teoría del método científico. Ahora bien; en la medida en que trasciende el análisis puramente lógico de las relaciones existentes entre enunciados científicos, la teoría del método se ocupa de *la elección de los métodos*, o sea, de las decisiones acerca del modo de *habérselas con los enunciados científicos*. Y tales decisiones dependerán, a su vez, como es natural, de la *meta* que elijamos (entre cierto número de metas posibles). La decisión que he de proponer para establecer reglas adecuadas relativas a lo que llamo el «método empírico» está unida estrechamente a mi criterio de demarcación: pues propongo que se adopten aquellas reglas que nos den la seguridad de que los enunciados científicos serán contrastables, es decir, de que serán falsables.

9. Por qué son indispensables las decisiones metodológicas

¿Qué son las reglas del método científico, y por qué las necesitamos? ¿Puede existir una teoría de tales reglas, una metodología?

El modo de contestar a estas preguntas dependerá, en gran medida, de la actitud que se tenga con respecto a la ciencia. Los positivistas, y con ellos todos los que consideran la ciencia empírica como un sistema de enunciados que satisface determinados *criterios lógicos* —como los de tener sentido o ser verificables—, darán una respuesta. Muy distinta será la que presenten los que tienden a pensar (como yo hago) que la característica distintiva de los enunciados científicos reside en que son susceptibles de revisión (es decir, en el hecho de que pueden ser sometidos a crítica y remplazados por otros mejores): los que consideran que su tarea consiste en analizar la peculiar capacidad del progreso de la ciencia, y el modo característico en que —en las situaciones cruciales— se lleva a cabo una elección entre sistemas teóricos contrapuestos.

Estoy enteramente dispuesto a admitir que hay necesidad de un análisis puramente lógico de las teorías, que no tenga en cuenta el modo en que cambian y se desarrollan. Pero este tipo de análisis no arroja ninguna luz sobre aquellos aspectos de las ciencias empíricas que yo, al menos, tanto estimo. El sistema de la mecánica clásica, pongamos por caso, puede ser «científico» en grado máximo, si se quiere; pero quienes lo sostienen dogmáticamente —quizá en la creencia de que es su deber defender un sistema que ha tenido tantos éxitos mientras no se llegue a *refutar de un modo concluyente*— se encuentran en el polo opuesto de aquella actitud crítica que, a mi modo de ver, es la apropiada para un científico. En realidad, no es posible jamás presentar una refutación concluyente de una teoría, ya que siempre puede decirse que los resultados experimentales no son dignos de confianza, o que las pretendidas discrepancias entre aquéllos y la teoría son meramente aparentes y desaparecerán con el progreso de nuestra comprensión de los hechos. (En la polémica contra Einstein se han utilizado frecuentemente ambos argumentos para apoyar la mecánica newtoniana, y otros análogos abundan en el campo de las ciencias sociales.) Si se insiste en pedir demostraciones estrictas (o refutaciones estrictas *[1]) en las ciencias empíricas, nunca se sacará provecho de la experiencia ni se caerá en la cuenta gracias a ella de lo equivocado que se estaba.

Por tanto, si caracterizamos la ciencia empírica únicamente por la estructura lógica o formal de sus enunciados, no seremos capaces de excluir de su ámbito aquella forma tan difundida de metafísica que consiste en elevar una teoría científica anticuada al rango de verdad incontrovertible.

Estas son las razones en que me baso para proponer que se caracterice a la ciencia empírica por sus métodos, o sea, por nuestra manera de enfrentarnos con los sistemas científicos, por lo que hacemos con ellos y lo que a ellos les hacemos. Así pues, trataré de determinar las reglas (o, si se prefiere, las normas) por las que se guía el científico cuando investiga o cuando descubre algo —en el sentido a que nos estamos refiriendo.

10. Planteamiento naturalista de la teoría del método

Es necesario desarrollar en alguna medida las indicaciones hechas en el apartado anterior sobre la diferencia entre mi postura y la de los positivistas.

Al positivista le desagrada la idea de que fuera del campo de la ciencia empírica «positiva» puedan existir problemas con sentido (problemas que sería preciso abordar con una auténtica teoría filosófica); le desplace pensar que debería existir una verdadera teoría

*[1] He añadido ahora al texto las palabras entre paréntesis «o refutaciones estrictas»: *a)* porque están, sin duda, implicadas en lo que se acaba de decir («no es posible jamás presentar una refutación concluyente de una teoría»), y *b)* porque mis palabras se han malentendido sin cesar, como si yo sostuviese un criterio (aún más: un criterio de *sentido* y no de *demarcación*) basado en una doctrina de falsabilidad «completa» o «concluyente».

del conocimiento, una epistemología o metodología *[1]. No quiere ver en los problemas filosóficos planteados más que «pseudoproblemas» o «rompecabezas». Ahora bien; este deseo suyo —que, digamos de pasada, no lo expresa como un deseo ni como una propuesta, sino como el enunciado de un hecho *[2]— puede satisfacerse siempre; pues no hay nada más fácil que «desenmascarar» un problema tratándole de «carente de sentido» o de «pseudoproblema»: basta con limitarse a un sentido convenientemente estrecho de «sentido», y en seguida se ve uno obligado a decir de cualquier cuestión incómoda que se es incapaz de encontrarle el menor sentido. Aún más: si se admite que únicamente los problemas de la ciencia natural tienen sentido [1], todo debate acerca del concepto de «sentido» se convierte también en algo carente de sentido [2]. Una vez que ha subido al trono el dogma del sentido queda elevado para siempre por encima de los combates; ya no es posible atacarlo; se ha hecho (empleando las propias palabras de Wittgenstein) «inatacable y definitivo» [3].

La cuestión disputada acerca de si existe la filosofía, o de si tiene derecho a existir, es casi tan antigua como ella misma. Una y otra vez surgen movimientos filosóficos completamente nuevos que acaban por desenmascarar los antiguos problemas filosóficos —mostrando que son pseudoproblemas— y por contraponer a los perversos absurdos de la filosofía el buen sentido de la ciencia coherente, positiva, empírica. Y una y otra vez los despreciados defensores de la «filosofía tradicional» tratan de explicar a los jefes del último asalto positivista que el problema principal de la filosofía es el análisis crítico de la apelación a la autoridad de la «experiencia» [4] —justamente de esa «experiencia» que el último descubridor del positivismo siempre da, burdamente, por supuesta—. Pero a tales objeciones el positivista contesta sólo encogiéndose de hombros: no significan nada para él, pues no pertenecen a la ciencia empírica, que es lo único que hay dotado de sentido. Para él la «experiencia» es un programa, no un problema (excepto como objeto de estudio de la psicología empírica).

*[1] Durante los dos años anteriores a la primera publicación de este libro, los miembros del Círculo de Viena acostumbraban a criticar mis ideas diciendo que una teoría del método que no sea ni una ciencia empírica ni pura lógica es imposible (en 1948 Wittgenstein mantenía aún esta opinión; cf. mi trabajo «The Nature of Philosophical Problems», en *The British Journal for the Philosophy of Science* 3, 1952, nota de la pág. 128): todo lo que se encuentre fuera de estos dos campos ha de ser un completo absurdo. Más tarde acostumbraron a criticarlas asiéndose a la leyenda de que yo había propuesto remplazar el criterio de verificabilidad por un criterio —de *sentido*— de falsabilidad. Véase mi *Postscript*, especialmente los apartados *19 a *22.

*[2] Algunos positivistas han cambiado más tarde de actitud a este respecto; véase, más adelante, la nota 6.

[1] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Proposición 6.53.

[2] Al final del *Tractatus* (en el que explica el concepto de sentido), Wittgenstein escribe: «Mis proposiciones elucidan en cuanto que quien me comprende acaba por reconocer que son absurdas...».

[3] WITTGENSTEIN, *op. cit.*, al final del prefacio.

[4] H. GOMPERZ (*Weltanschauungslehre I*, 1905, pág. 35) escribe: «Si consideramos lo infinitamente problemático que es el concepto de *experiencia* ... podemos muy bien vernos obligados a creer que ... a su respecto, la afirmación entusiasta es mucho menos apropiada ... que la crítica más cuidadosa y reservada...».

No espero que los positivistas estén dispuestos a responder de modo distinto que el mencionado, a mis propios intentos de analizar la «experiencia», que interpreto como el método de la ciencia empírica, ya que, en su concepto, existen únicamente dos clases de enunciados: las tautologías lógicas y los enunciados empíricos. Si la metodología no es lógica, concluirán, tiene que ser una rama de una ciencia empírica: por ejemplo, de la ciencia del comportamiento de los científicos cuando están trabajando.

Esta concepción, según la cual la metodología es, a su vez, una ciencia empírica —el estudio del comportamiento real de los científicos, o de los procedimientos efectivamente empleados en la «ciencia»—, puede designarse con la palabra «*naturalista*». La metodología naturalista (llamada en ocasiones «teoría inductiva de la ciencia» [5]) tiene su valor, sin duda: una persona que estudie la lógica de la ciencia puede muy bien interesarse por ella y sacar grandes enseñanzas. Pero lo que yo llamo metodología no debe tomarse por una ciencia empírica. No creo que sea posible decidir, empleando los métodos de una ciencia empírica, cuestiones tan disputadas como la de si la ciencia emplea realmente o no un principio de inducción. Y mis dudas crecen cuando recuerdo que siempre será un asunto a resolver por una convención o una decisión el de a qué cosa hemos de llamar una «ciencia» o el de a quién hemos de calificar de «científico».

Me parece que deberíamos tratar las cuestiones de este género de un modo diferente. Así, por ejemplo, podemos considerar dos sistemas distintos de reglas metodológicas: uno, dotado de un principio de inducción, y otro, sin él. Podemos examinar entonces si este principio, una vez introducido, puede aplicarse sin dar lugar a incoherencias o incompatibilidades, si nos es de utilidad, y —por fin— si realmente lo necesitamos. Ha sido una indagación de este tipo la que me ha conducido a prescindir del principio de inducción: no me he basado en que no se emplee, de hecho, semejante principio en la ciencia, sino en que no lo considero necesario, no nos sirve de nada e incluso da origen a incoherencias.

Por tanto, rechazo la tesis naturalista: carece de visión crítica; los que la sostienen no se percatan de que, por más que crean haber descubierto un hecho, no han pasado de proponer una convención [6]; y

---

[5] DINGLER, *Physik und Hypothesis*, Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre (1921); análogamente, V. KRAFT, *Die Grundformen der Wissenschaftlichen Methoden* (1925).

[6] (Añadida en 1934, en la corrección de pruebas.) He mantenido durante muchos años la tesis, presentada aquí sólo brevemente, de que es asunto a resolver por una decisión a qué se ha de llamar «un auténtico enunciado» y a qué «un pseudoenunciado sin sentido» (y, asimismo, la tesis de que también es materia de decisión la exclusión de la metafísica). Sin embargo, la crítica que aquí hago del positivismo (y de la tesis naturalista) ya no se aplica —según me parece— al libro de CARNAP *Logische Syntax der Sprache* (1934), en el que también adopta el punto de vista de que todas estas cuestiones descansan en decisiones (es el «principio de tolerancia»). Según el prefacio de la obra de Carnap, Wittgenstein ha propugnado durante años una opinión semejante en sus obras inéditas. (* Pero véase, más arriba, la nota *1.) La *Logische Syntax*, de CARNAP, se publicó mientras se corregían las pruebas del presente libro; lamento no haber tenido ocasión de estudiarla en el texto.

—por ello— se convierte con facilidad en un dogma. Esta crítica de la posición naturalista no se aplica tan sólo a su criterio de sentido, sino, asimismo, a su concepto de la ciencia y —en consecuencia— a su concepto del método empírico.

11. Las reglas metodológicas como convenciones

En la presente obra consideramos las reglas metodológicas como *convenciones:* las podríamos describir diciendo que son las reglas de juego de la ciencia empírica. Difieren de las reglas de la lógica pura al estilo de como lo hacen las reglas del ajedrez, que pocos considerarían ser una parte de la lógica *pura:* teniendo en cuenta que ésta regula las transformaciones de las fórmulas lingüísticas, el resultado de un estudio de las reglas del ajedrez podría llamarse quizá «la lógica del ajedrez»; pero difícilmente «lógica», sin más (análogamente, el resultado de un estudio de las reglas de juego de la ciencia —esto es, de la investigación científica— podría denominarse «la lógica de la investigación científica»).

Daremos dos ejemplos sencillos de reglas metodológicas, que bastarán para hacer ver que sería bastante inoportuno colocar un estudio metodológico al mismo nivel que otro puramente lógico:

1. El juego de la ciencia, en principio, no se acaba nunca. Cualquiera que decide un día que los enunciados científicos no requieren ninguna contrastación ulterior y que pueden considerarse definitivamente verificados, se retira del juego.

2. No se eliminará una hipótesis propuesta y contrastada, y que haya demostrado su temple *[1], si no se presentan «buenas razones» para ello. Ejemplos de «buenas razones»: sustitución de la hipótesis por otra más contrastable, falsación de una de las consecuencias de la hipótesis. (Analizaremos más adelante a fondo la noción de «más contrastable».)

Estos dos ejemplos nos permiten darnos cuenta del aspecto que presentan las reglas metodológicas. No cabe duda de que son muy diferentes de las reglas que ordinariamente se llaman «lógicas»: aun cuando es posible que la lógica establezca criterios para decidir si un enunciado es contrastable, en ningún caso se ocupa sobre si nadie se esfuerza o no por contrastarlo.

En el apartado 6 traté de definir la ciencia empírica mediante el criterio de falsabilidad; pero como me vi obligado a admitir que ciertas objeciones estaban en lo justo, prometí añadir un suplemento metodológico a mi definición. Exactamente lo mismo que es posible definir el ajedrez por medio de sus reglas peculiares, la ciencia empírica puede definirse por medio de sus reglas metodológicas (que estableceremos sistemáticamente). Daremos, en primer lugar, una regla su-

*[1] En lo que se refiere a la traducción de «*sich bewähren*» por «demostrar su temple» [en ingl., *to prove one's mettle*], véase la primera nota a pie de página del capítulo X *(La corroboración)*.

prema, que sirve a modo de norma para las decisiones que hayan de tomarse sobre las demás reglas, y que —por tanto— es una regla de tipo más elevado: es la que dice que las demás reglas del procedimiento científico han de ser tales que no protejan a ningún enunciado de la falsación.

Así pues, las reglas metodológicas se hallan en estrecha conexión tanto con otras reglas de la misma índole como con nuestro criterio de demarcación. Pero dicha conexión no es estrictamente deductiva o lógica [1]: resulta, más bien, del hecho de que las reglas están construidas con la finalidad de asegurar que pueda aplicarse nuestro criterio de demarcación; y, por ello, se formulan y aceptan de conformidad con una regla práctica de orden superior. He dado más arriba —cf. la regla 1— un ejemplo de tal proceder: las teorías que decidimos no someter a ninguna contrastación más ya no serán falsables. Esta conexión sistemática entre las reglas es lo que permite que hablemos con propiedad de una *teoría* del método. Admitamos que las aserciones de esta teoría son, en su mayoría, como enseñan nuestros ejemplos, convenciones de índole harto obvia: en la metodología no son de esperar verdades profundas; pero, a pesar de ello, pueden ayudarnos, en muchos casos, a aclarar la situación lógica, e incluso a resolver algunos problemas de gran alcance que hasta el momento se habían mostrado refractarios a toda solución —por ejemplo, el de decidir, acerca de un enunciado probabilitario, si debería aceptarse o rechazarse (cf. el apartado 68).

Se ha puesto en duda con frecuencia que los diversos problemas de la teoría del conocimiento se encuentren en relación sistemática mutua alguna, así como que puedan ser tratados sistemáticamente; espero poder demostrar en este libro que tales dudas no están justificadas. La cuestión tiene cierta importancia: la única razón que tengo para proponer mi criterio de demarcación es que es fecundo, o sea, que es posible aclarar y explicar muchas cuestiones valiéndose de él. «Las definiciones son dogmas; sólo las conclusiones pueden otorgarnos alguna perspectiva nueva», dice Menger [2]. Lo cual, ciertamente, es verdad en lo que respecta a la definición del concepto de «ciencia»: sólo a partir de las consecuencias de mi definición de ciencia empírica, y de las decisiones metodológicas que dependen de esta definición, podrá ver el científico en qué medida está de acuerdo con su idea intuitiva de la meta de sus trabajos [*2].

También el filósofo admitirá que mi definición es útil únicamente en caso de que pueda aceptar sus consecuencias. Hemos de confirmarle que éstas nos permiten encontrar incoherencias e impropiedades en otras teorías del conocimiento anteriores, y remontarnos a los supuestos fundamentales y convenciones de que proceden; pero también hemos de confirmarle que nuestras propias propuestas no están amenazadas por dificultades análogas. Este método de encontrar y resol-

---

[1] Cf. K. Menger, *Moral, Wille und Weltgestaltung* (1934), págs. 58 y sigs.

[2] K. Menger, *Dimensionstheorie* (1928), pág. 76.

[*2] Véase también el apartado *15, «La finalidad de la ciencia», de mi *Postscript*.

ver contradicciones se aplica igualmente dentro de la ciencia misma, pero tiene particular importancia en la teoría del conocimiento. Si es que existe algún método por el que las convenciones metodológicas puedan justificarse y demostrar su valor, es éste precisamente [3].

En cuanto a si los filósofos considerarán que estas investigaciones metodológicas pertenecen a la filosofía, me temo que es muy dudoso; pero, realmente, la cosa no tiene gran importancia. Con todo, tal vez merezca la pena de mencionar a este respecto que no pocas doctrinas metafísicas —y por tanto, sin disputa, filosóficas— podrían interpretarse como típicas hipóstasis de reglas metodológicas. Tenemos un ejemplo de tal situación en lo que se llama «el principio de causalidad», del cual nos ocuparemos en el próximo apartado; y nos hemos encontrado ya con otro ejemplo de lo mismo: el problema de la objetividad. Pues podemos interpretar también el requisito de objetividad científica como una regla metodológica: la de que solamente puedan ingresar en la ciencia los enunciados que sean contrastables intersubjetivamente (véanse los apartados 8, 20, 27 y otros). Verdaderamente, bien podría decirse que la mayoría de los problemas de la filosofía teórica, y los más interesantes, pueden reinterpretarse de este modo como problemas referentes al método.

---

[3] En la presente obra he relegado a un segundo término el método crítico —o, si se quiere, «dialéctico»— de resolver contradicciones, pues me ocupo en el intento de desarrollar los aspectos metodológicos prácticos de mi tesis. En una obra aún inédita he tratado de seguir la ruta crítica, y de mostrar que tanto los problemas de la teoría del conocimiento clásica como los de la moderna (de Hume a Russell y Whitehead a través de Kant) pueden retrotraerse al problema de la demarcación: esto es, al de encontrar un criterio del carácter empírico de la ciencia.

SEGUNDA PARTE

Algunos componentes estructurales de una teoría de la experiencia

Teorías

Las ciencias empíricas son sistemas de teorías; y la lógica del conocimiento científico, por tanto, puede describirse como una teoría de teorías.

Las teorías científicas son enunciados universales; son, como todas las representaciones, sistemas de signos o símbolos. Por ello, no creo que sirva de gran cosa expresar la diferencia entre teorías universales y enunciados singulares diciendo que estos últimos son «concretos» mientras que las teorías son *meramente* fórmulas simbólicas o esquemas simbólicos: pues exactamente lo mismo puede decirse hasta de los enunciados más «concretos» *[1].

Las teorías son redes que lanzamos para apresar aquello que llamamos «el mundo»: para racionalizarlo, explicarlo y dominarlo. Y tratamos de que la malla sea cada vez más fina.

12. Causalidad, explicación y deducción de predicciones

Dar una *explicación causal* de un acontecimiento quiere decir deducir un enunciado que lo describe a partir de las siguientes premisas deductivas: una o varias *leyes universales* y ciertos enunciados singulares —las *condiciones iniciales*—. Por ejemplo, podemos decir que

---

*[1] Aludo aquí críticamente a una tesis que he descrito posteriormente como «instrumentalismo», y que estaba representada en Viena por Mach, Wittgenstein y Schlick (cf. las notas *4 y 7 del apartado 4 y la nota 5 del apartado 27): según ella, una teoría *no es otra cosa que* una herramienta o instrumento para predecir. La he analizado y criticado en mis trabajos «A Note on Berkeley as a Precursor of Mach», en *Brit. Journ. Philos. Science* 6, 1953, págs. 26 y sigs.; «Three Views Concerning Human Knowledge», en *Contemporary British Philosophy*, III, 1956, ed. por H. D. Lewis, págs. 355 y sigs., y más a fondo en mi *Postscript*, apartados *11 a *15 y *19 a *26. Brevemente expuesto, mi punto de vista es que nuestro lenguaje habitual está lleno de teorías, que llevamos a cabo toda observación *a la luz de teorías*, que el prejuicio inductivista es lo único que lleva a muchos a creer que podría existir un lenguaje fenoménico, libre de teorías y distinguible de un «lenguaje teórico»; y, finalmente, que el teórico se interesa por la explicación como tal, es decir, por las teorías explicativas contrastables: las aplicaciones y las predicciones le interesan solamente por razones teóricas —porque pueden emplearse como *medios para contrastar* las teorías—. (Véase también el nuevo apéndice *X.)

hemos dado una explicación causal de la rotura de un trozo determinado de hilo si hemos averiguado que éste tenía una resistencia a la tracción de 1 *libra* y que se le había aplicado un peso de 2 *libras*. Cuando analizamos esta explicación causal encontramos en ella diversas partes constitutivas. Por un lado, tenemos la hipótesis: «Siempre que se cargue un hilo con un peso superior al que caracteriza la resistencia a la tracción del mismo, se romperá»: enunciado cuyo tipo es el de una ley universal de la Naturaleza. Por otra parte, nos encontramos con enunciados singulares (en este caso, dos) que son aplicables al acontecimiento determinado que nos ocupa: «La característica de peso de este hilo es 1 *libra*» y «El peso aplicado a este hilo ha sido de 2 *libras*» *[1].

Henos aquí, pues, con dos clases diferentes de enunciados; pero tanto una como otra son ingredientes necesarios de una explicación causal completa. Las dos clases son: 1) *enunciados universales*, es decir, hipótesis que tienen el carácter de leyes naturales, y 2) *enunciados singulares*, que se aplican al acontecimiento concreto de que se trate, y que llamaré «condiciones iniciales». *Deducimos* el enunciado singular «este hilo se romperá» de enunciados universales conjuntamente con condiciones iniciales; y diremos de aquel enunciado que es una *predicción* determinada o singular *[2].

Las condiciones iniciales describen lo que se suele llamar la «*causa*» del acontecimiento en cuestión (así, la «causa» de que se rompiera el hilo fue que se había aplicado una carga de 2 *libras* a un hilo que tenía una resistencia a la tracción de 1 *libra*); y la predicción describe lo que denominamos corrientemente el «*efecto*». Pero evitaré ambos términos. Por regla general, en física se restringe el uso de la expresión «*explicación causal*» al caso especial en que las leyes universales tienen la forma de leyes de «acción por contacto» —o, de un modo más preciso, a la *acción a una distancia que tiende a cero*, que se formula por medio de ecuaciones diferenciales. Mas no asumiremos aquí tal restricción; y aún más: no haré ninguna afirmación general sobre la aplicabilidad universal de este método deductivo de explicación teórica: así, pues, no afirmaré ningún «principio de causalidad» (o «principio de causación universal»).

El «principio de causalidad» consiste en la afirmación de que todo acontecimiento, cualquiera que sea, *puede* explicarse causalmente, o sea, que *puede* deducirse causalmente. Según el modo en que se in-

---

*[1] Tendríamos un análisis más claro de este ejemplo —un análisis en el que se distinguirían *dos* leyes y dos condiciones iniciales— del siguiente modo: «Para todo hilo de una estructura dada E (determinada por su material, grosor, etc.) existe un peso característico p tal que el hilo se romperá si se cuelga de él un peso superior a p». «Para todo hilo de estructura E_1, el peso característico p_1 vale 1 *libra*». Estas son las dos leyes universales. Y las dos condiciones iniciales son: «Este es un hilo de estructura E_1», y «El peso que se aplica a este hilo vale 2 *libras*».

*[2] El término «predicción», tal como lo utilizo aquí, abarca también enunciados acerca de hechos pasados («dicciones retrospectivas») e incluso enunciados «dados» que queremos explicar *(«explicanda»)*; cf. mi *Poverty of Historicism* (1945), página 133 de la ed. de 1957 [versión cast. cit., págs. 162 y sig.*(T.)*], y el *Postscript*, apartado *15.

terprete la palabra «puede» de esta aserción, el principio será tautológico (analítico) o se tratará de una aserción acerca de la realidad (sintético). Pues si «puede» quiere decir que siempre es posible lógicamente construir una explicación causal, entonces la afirmación hecha arriba es tautológica, ya que para una predicción cualquiera podemos siempre encontrar enunciados universales y condiciones iniciales a partir de los cuales sea deductible. (Cuestión muy distinta es la de si semejantes enunciados universales han sido contrastados y corroborados en otros casos, naturalmente.) Pero si lo que se quiere expresar con «puede» es que el mundo está regido por leyes estrictas, esto es, que está construido de tal modo que todo acontecimiento determinado es un ejemplo de una regularidad universal o ley, no cabe duda de que entonces la aserción a que nos referimos es sintética; y, en este caso, *no es falsable*, como se verá más adelante, en el apartado 78. Por consiguiente, ni adoptaré ni rechazaré el «principio de causalidad»: me contentaré simplemente con excluirlo de la esfera de la ciencia, en concepto de «metafísico».

He de proponer, sin embargo, una regla metodológica que se corresponde tan exactamente con el «principio de causalidad», que éste podría considerarse como la versión metafísica de la primera. Se trata de la simple regla de que no abandonaremos la búsqueda de leyes universales y de un sistema teórico coherente, ni cesaremos en nuestros intentos de explicar causalmente todo tipo de acontecimientos que podamos describir [1]: esta regla guía al investigador científico en su tarea. No aceptaremos aquí la opinión de que los últimos descubrimientos de la física exigen que se renuncie a tal regla, o de que la física ha llegado ahora a determinar que no va a ninguna parte el

---

[1] La idea de considerar el principio de causalidad como expresión de una regla o de una decisión se debe a H. GOMPERZ, *Das Problem der Willensfreiheit* (1907). Cf. SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwartigen Physik, Naturwissenschaften* **19**, 1931, pág. 154.

*Me parece que es conveniente indicar de modo más explícito que la decisión de buscar una explicación causal es la misma por la que el hombre de ciencia teórico adopta su finalidad propia —o la finalidad de la ciencia teórica—. Tal finalidad es la de encontrar *teorías explicativas* (si es posible, *verdaderas); es* decir, teorías que describan ciertas propiedades estructurales del mundo que nos permitan deducir, valiéndonos de condiciones iniciales, los efectos que se trata de explicar. En el presente apartado se pretendía explicar, si bien sólo muy someramente, lo que queremos decir al hablar de una explicación causal; en el apéndice *X y en mi *Postscript*, apartado *15, se encontrarán exposiciones algo más completas. Ciertos positivistas o «instrumentalistas» han adoptado mi explicación de la explicación, pues han visto en aquélla un intento de explicar ésta eliminándola —han creído que consistía en afirmar que las teorías explicativas *no son más que* premisas para la deducción de predicciones—. Por tanto, quiero dejar bien claro que, a mi parecer, el interés que tiene la *explicación* —esto es, el descubrimiento de teorías explicativas— para el científico teórico es irreducible al interés tecnológico-práctico de la deducción de predicciones. El teórico se interesa por las *predicciones*, por otra parte, lo cual es comprensible, pues está interesado en el problema de si sus teorías son verdaderas o no; o, dicho de otro modo, le interesa contrastar sus teorías, tratar de averiguar si no se puede mostrar que sean falsas. Véase también el apéndice *X, nota 4 y texto correspondiente.

continuar buscando leyes, al menos en cierto campo [2]; nos ocuparemos de esta cuestión en el apartado 78 *[3].

13. Universalidades estricta y numérica

Podemos distinguir dos tipos de enunciados sintéticos universales: los «estrictamente universales» y los «numéricamente universales». Hasta ahora estaba refiriéndome a los *enunciados estrictamente universales* siempre que hablaba de enunciados universales: de teorías o de leyes naturales. Los numéricamente universales son equivalentes, en realidad, a ciertos enunciados singulares, o a una conyunción** de éstos: los clasificaremos, por tanto, como enunciados singulares.

Compárense, por ejemplo, los dos enunciados siguientes:

a) De todo oscilador armónico es verdad que su energía nunca es inferior a cierta cantidad (*a saber*, $h\nu/2$), y

b) De todo ser humano que viva ahora sobre la tierra, es verdad que su estatura nunca excede de cierta cantidad (digamos, 8 pies ***). La lógica formal (incluida la lógica simbólica), que se ocupa únicamente de la teoría de la deducción, trata igualmente a estos dos enunciados como universales (implicaciones «formales» o «generales») [1]. A mi entender, sin embargo, es necesario subrayar la diferencia existente entre ellos: el enunciado *a*) pretende ser verdadero para cualesquiera lugar y tiempo; en cambio el enunciado *b*) se refiere exclusivamente a una clase finita de elementos concretos dentro de una región espacio-temporal finita e individual (o particular); los enunciados de este segundo tipo son tales, que se los puede remplazar por una conyunción de enunciados singulares, pues —dado un tiempo suficiente— pueden *enumerarse* todos los elementos de la clase (finita) a que se refieren. Por ello hablamos, en casos como este último, de «universalidad numérica». Por el contrario, el enunciado *a*) referente a los osciladores no puede remplazarse por la conyunción de un número finito de

---

[2] Schlick, por ejemplo, sustenta la opinión a que aquí me opongo: *op. cit.*, página 155, «... esta imposibilidad [se está refiriendo a la imposibilidad de predicción exacta mantenida por Heisenberg] ... quiere decir que es imposible *tratar de encontrar* semejante fórmula». (Cf. también la nota 1 del apartado 78.)

*[3] Pero véanse ahora los capítulos *IV a *VI de mi *Postscript*.

** Una conyunción es la aserción simultánea de varias proposiciones, como se indica (para el caso de dos) en el apartado 18 *(N. del T.)*.

*** Unos 2,5 metros *(N. del T.)*.

[1] La lógica clásica (y de modo análogo la lógica simbólica o «logística») distingue entre enunciados universales, particulares y singulares. Enunciado universal es el que se refiere a todos los elementos de una clase determinada; particular es el que lo hace a algunos de los elementos de ella, y singular el que hace mención de un elemento dado, un individuo. Esta clasificación no está basada en razones concernientes a la lógica del conocimiento, sino que fue elaborada con vistas a la técnica de la inferencia. Por ello, no podemos identificar nuestros «enunciados universales» ni con los que llevan el mismo nombre en la lógica clásica ni con las implicaciones «formales» o «generales» de la logística (cf. la nota 6 del apartado 14). * Consúltense ahora también el apéndice *X y mi *Postscript*, en especial el apartado *15.

enunciados singulares acerca de una región determinada espacio-temporal; o, más bien, podría remplazarse de tal modo solamente en el supuesto de que el mundo estuviese limitado en el tiempo y de que en él existiera un número finito de osciladores. Ahora bien; no asumimos ningún supuesto de esta índole, y, en particular, no lo hacemos al definir el concepto de física, sino que consideramos todo enunciado del tipo *a)* como un *enunciado total*, es decir, como un enunciado universal acerca de un número ilimitado de individuos: es claro que al interpretarlo de este modo no puede ser remplazado por una conyunción de un número finito de enunciados singulares.

Utilizo el concepto de enunciado estrictamente universal (o «enunciado total») de modo que se opone enteramente a la tesis de que todo enunciado sintético universal ha de ser traducible, en principio, por una conyunción de un número finito de enunciados singulares. Quienes se adhieren a esta tesis [2] insisten en que no es posible verificar *jamás los que yo llamo «enunciados estrictamente universales»*, y, por ello, los rechazan, bien apoyándose en su criterio de sentido —que exige la verificabilidad—, bien en otra consideración análoga.

Se advierte claramente que, partiendo de semejante concepto de las leyes naturales —que borra la diferencia entre enunciados singulares y universales—, parece resolverse el problema de la inducción: puesto que, sin duda alguna, podrían ser perfectamente admisibles las inferencias desde enunciados singulares a enunciados sólo numéricamente universales. Pero vemos con no menor claridad que esta solución no lo es del problema metodológico de la inducción; pues la verificación de una ley natural podría únicamente llevarse a cabo de un modo empírico si se examinara cada acontecimiento singular al que podría aplicarse la ley y se encontrara que cada uno de ellos ocurre realmente conforme a ella: lo cual constituye, no cabe duda, una tarea imposible de realizar.

En todo caso, no es posible solventar por medio de un razonamiento la cuestión de si las leyes de la ciencia son universales en sentido estricto o en sentido numérico: es una de aquellas cuestiones que pueden sólo resolverse mediante un acuerdo o una convención. Y en vista de la situación metodológica acabada de mencionar, tengo por útil y fecundo el considerar las leyes naturales como enunciados sintéticos y estrictamente universales («enunciados totales»); lo cual equivale a considerarlos enunciados no verificables que se pueden poner en la forma: «De todo punto del espacio y el tiempo (o de toda región del espacio y el tiempo), es verdad que...». Por el contrario, llamaré enunciados «específicos» o «singulares» a los que se refieren solamente a ciertas regiones finitas del espacio y el tiempo.

Aplicaremos únicamente a los enunciados sintéticos la distinción entre estrictamente universales y sólo numéricamente universales (que constituyen no más que un tipo de enunciados singulares). No quiero

---

2 Cf., por ejemplo, F. KAUFMANN, "Bemerkungen zum Grundlagenstreit in Logik und Mathematik", *Erkenntnis* 2, 1931, pág. 274.

dejar de mencionar la posibilidad, sin embargo, de aplicar también esta distinción a enunciados analíticos (por ejemplo, a ciertos enunciados matemáticos) [3].

14. Conceptos universales y conceptos individuales

La distinción entre *enunciados* universales y singulares se encuentra en estrecha conexión con la existente entre *conceptos o nombres universales e individuales*.

Se suele elucidar esta distinción valiéndose de ejemplos del estilo siguiente: «dictador», «planeta», «H_2O», son conceptos o nombres universales; «Napoleón», «la Tierra» y «el Atlántico» son conceptos o nombres singulares o individuales. Según estos ejemplos, los conceptos —o nombres— individuales están caracterizados, ya por ser nombres propios, ya por haber sido definidos por medio de nombres propios; mientras que los conceptos —o nombres— universales pueden definirse sin ayuda de nombres propios.

Me parece que la distinción entre conceptos —o nombres— universales e individuales tiene una importancia fundamental. Todas las aplicaciones de la ciencia se apoyan en inferencias que partiendo de hipótesis científicas (que son universales) llegan a casos singulares; o sea, en la deducción de predicciones singulares. Mas en todo enunciado singular es menester que aparezcan conceptos —o nombres— individuales.

Los nombres individuales que aparecen en los enunciados singulares de la ciencia se encuentran a menudo bajo la forma de coordenadas espacio-temporales. Esta circunstancia se comprende fácilmente si se tiene en cuenta que la *aplicación* de un sistema espacio-temporal de coordenadas comporta siempre una referencia a nombres individuales: pues hemos de determinar su punto de origen, lo cual cabe hacer solamente empleando nombres propios (o sus equivalentes). El uso de los nombres «Greenwich» y «el año del nacimiento de Cristo» aclara lo que quiero decir. Por este método es posible reducir un número tan grande como se quiera de nombres individuales a unos pocos solamente [1].

A veces pueden emplearse como nombres individuales expresiones tan vagas y generales como «esto», «aquello», etc., acompañadas tal vez por ademanes ostensivos de cierto tipo; o sea, podemos utilizar signos que no son nombres propios, pero que, en cierta medida, son intercambiables con nombres propios o con coordenadas individuales.

---

[3] Ejemplos: *a)* Todo número natural tiene un sucesivo. *b)* Con excepción de los números 11, 13, 17 y 19, todos los números entre 10 y 20 son compuestos.

[1] Pero las unidades de medida del sistema de coordenadas, que se fijaron inicialmente por medio de nombres individuales (la rotación de la Tierra, el metro patrón de París), pueden ser definidas —en principio— valiéndose de nombres universales: por ejemplo, por medio de la longitud de onda o de la frecuencia de la luz monocromática emitida por cierta clase de átomos tratada de cierto modo. [Así se ha hecho en el año 1960 con el metro y el segundo *(T.)*].

Pero también es posible aludir a conceptos universales mediante gestos ostensivos, si bien será solamente de un modo vago: así, podemos señalar una cosa individual (o un acontecimiento) y expresar nuestra intención de considerarla sólo como representante de una clase —a la que habría que dar, en justicia, un nombre universal— por medio de una frase análoga a «y otras cosas por el estilo» (o «y cosas así»). No cabe la menor duda de que *aprendemos el empleo* de las palabras universales, esto es, el modo de su *aplicación* a individuos, gracias a gestos ostensivos o a otros medios semejantes. El fundamento lógico de las aplicaciones de esta índole consiste en que los conceptos individuales no sólo pueden ser conceptos de elementos, sino también de clases; de suerte que, además de poderse encontrar con respecto a los conceptos universales en una relación correspondiente a la que existe entre un elemento y una clase, pueden también hallarse con los mismos en una relación que se corresponde con la que hay entre una subclase y su clase. Por ejemplo: mi perro Lux no es solamente un elemento de la clase de los perros vieneses, que es un concepto individual, sino que también lo es de la clase (universal) de los mamíferos; y los perros vieneses, a su vez, no son únicamente una subclase de la clase (individual) de los perros austriacos, sino, a la vez, una subclase de la clase (universal) de los mamíferos.

Con el empleo de la palabra «mamíferos» como ejemplo de un nombre universal pueden, tal vez, originarse confusiones: pues las palabras tales como «mamífero», «perro», etc., no suelen estar exentas de ambigüedad en su utilización habitual. En efecto, depende de nuestra intención el que estas palabras hayan de considerarse como nombres de clases individuales o de clases universales: depende de si pretendemos hablar de una raza de animales que viven en nuestro planeta (que es un concepto individual) o de cierto tipo de cuerpos físicos dotados de propiedades que pueden describirse en términos universales. En el empleo de conceptos tales como «pasteurizado», «sistema de Linneo» o «latinismo» surgen ambigüedades parecidas, dado que es posible eliminar los nombres propios a los que aluden (o, por el contrario, definirlos por medio de dichos nombres propios) *[1].

Los ejemplos y explicaciones precedentes deben de haber aclarado lo que se quiere decir aquí con «conceptos universales» y «conceptos individuales». Si se me pidieran definiciones, probablemente me vería reducido a decir, como antes: «Un concepto individual es aquél en cuya definición son indispensables nombres propios (o signos equivalentes a ellos); si puede eliminarse toda referencia a nombres propios, entonces el concepto es universal». Pero tal definición no tendría mucho valor, pues lo único que hace es reducir la idea de concepto o nombre individual a la de nombre propio (en el sentido de nombre de una cosa física individual).

*[1] «Pasteurizado» puede definirse, ya como «tratado de acuerdo con las prescripciones del señor Louis Pasteur» (o algo por el estilo), ya como «calentado a 80 grados centígrados y conservado a esta temperatura durante diez minutos»: la primera definición hace de «pasteurizado» un concepto individual, y la segunda lo convierte en un concepto universal.

Creo que el modo en que utilizo las expresiones «universal» e «individual» se corresponde muy de cerca con el uso habitual; pero sea así o no, considero, desde luego, que la distinción que he hecho es ineludible si no queremos hacer borrosa la distinción correspondiente entre enunciados universales y singulares. (Hay una analogía completa entre el problema de los universales y el de la inducción.) Toda tentativa de identificar una cosa individual *únicamente* por sus propiedades y relaciones universales, que parecen pertenecerla exclusivamente a ella y a ninguna otra cosa, está condenada de antemano al fracaso: pues semejante modo de proceder no describiría una cosa individual única, sino la clase universal de todos los individuos a los que pertenecen las propiedades y relaciones mentadas. Ni siquiera sacaríamos nada con emplear un sistema espacio-temporal universal de coordenadas [2]: pues siempre queda sin resolver la cuestión de si existen en absoluto cosas individuales que correspondan a una descripción dada por medio de nombres universales, y, en caso afirmativo, la cuestión de cuántas.

Del mismo modo ha de fracasar todo intento de definir los nombres universales a partir de nombres individuales. Con frecuencia se ha olvidado este hecho, de modo que está muy extendida la creencia de que —por un proceso denominado «abstracción»— es posible ascender de conceptos individuales a universales. Esta opinión está emparentada estrechamente con la lógica inductiva, y con su paso de enunciados singulares a enunciados universales; pero, lógicamente, ambos procesos son igualmente impracticables [3]. Es cierto que se pueden obtener clases de individuos de este modo, pero tales clases seguirán siendo conceptos individuales, es decir, conceptos definidos por medio de nombres propios. (He aquí unos ejemplos de semejantes conceptos de clase individuales: «los generales de Napoleón», «los habitantes de París».) Vemos, pues, que la diferencia que he señalado entre nombres o conceptos universales e individuales no tiene nada que ver con la existente entre clases y elementos: tanto los nombres universales como los individuales pueden aparecer como nombres de ciertas clases, y, asimismo, como nombres de los elementos de otras clases.

Por consiguiente, no es posible eliminar la diferencia entre los conceptos individuales y los universales mediante argumentos como el siguiente de Carnap: «... no está justificado hacer tal distinción», dice, porque «... todo concepto puede considerarse como individual o como universal, según el punto de vista que se adopte». Carnap trata de apoyar lo dicho afirmando «... que (casi) *todos los llamados concep-*

---

[2] Los «principios de individuación» no son «el espacio y el tiempo» en general, sino determinaciones individuales (espaciales, temporales o de otro tipo) basadas en nombres propios.

[3] Análogamente, el «método de abstracción» que se emplea en la lógica simbólica es incapaz de lograr el ascenso desde nombres individuales a nombres universales: si la clase que se define por medio de la abstracción está determinada extensionalmente por medio de nombres individuales, entonces es, a su vez, un concepto individual.

tos individuales son (nombres de) *clases*, lo mismo que los conceptos universales»[4]. Esta última afirmación es enteramente exacta, como he hecho ver, pero es enteramente ajena a la distinción a que nos referimos.

Otros estudiosos del campo de la lógica simbólica (llamada en otro tiempo «logística») han confundido de modo parecido la diferencia entre nombres universales y nombres individuales con la existente entre clases y sus elementos[5]. Sin duda alguna, puede permitirse el empleo del término «nombre universal» como sinónimo de «nombre de una clase», y el de «nombre individual» como sinónimo de «nombre de un elemento»; pero poco puede decirse en favor de semejante utilización: por este camino no se resuelven los problemas, y, por otra parte, es muy fácil que incluso impida que lleguen a verse. Nos encontramos en una situación muy parecida a la que hemos encontrado anteriormente, cuando nos ocupábamos de la diferencia que hay entre enunciados universales y singulares: los instrumentos intelectuales de la lógica simbólica son tan poco adecuados para manejar el problema de los universales como el de la inducción[6].

---

[4] CARNAP, *Der logische Aufbau der Welt*, pág. 213. (Completada en 1934 durante la corrección de pruebas.) Al parecer, en la *Logical Syntax of Language* (1934; edición ingl., 1937), Carnap no ha tenido en cuenta la diferencia entre nombres individuales y universales; ni parece posible expresar tal diferencia por medio del «lenguaje de coordenadas» que él construye. Podría pensarse tal vez que, puesto que las «coordenadas» son signos de ínfimo nivel (cf. págs. 12 y sig.), deben interpretarse como nombres *individuales* (y que Carnap utiliza un sistema de coordenadas definido mediante individuos); pero esta interpretación no nos vale, porque Carnap dice (página 87; véanse también la pág. 12 de la ed. ingl. y la pág. 97, párrafo 4) que en el lenguaje que él usa «... todas las expresiones del tipo ínfimo son expresiones numéricas» en el sentido de que denotan lo que quedaría incluido bajo el signo no definido primitivo de Peano, «número» (cf. las págs. 31 y 33). Esto aclara que los signos numéricos que aparecen como coordenadas no han de considerarse como nombres propios o coordenadas individuales, sino como universales (son individuos únicamente en un sentido pickwickiano [es decir, peculiar *(T.)*]; cf. la nota 3 *b)* del apartado 13).

[5] La distinción trazada por Russell y Witehead entre individuos (o particulares) y universales no tiene nada que ver con la que he introducido aquí entre nombres individuales y universales. Según la terminología de Russell, en la oración «Napoleón es un general francés», «Napoleón» es —como en mi esquema— un individuo, pero «general francés» es un universal; mientras que, por el contrario, en la oración «El nitrógeno es un no metal», «no metal» es —como en mi esquema— un universal, pero «el nitrógeno» es un individuo. Aún más: lo que Russell llama «descripciones» no corresponde a mis «nombres individuales»; ya que, por ejemplo, para mí la clase de los «puntos geométricos situados dentro de mi cuerpo» es un concepto individual, pero no puede representarse por medio de una «descripción». Cf. WHITEHEAD y RUSSELL, *Principia Mathematica* (2.ª ed., 1925, t. I), introducción a la 2.ª ed., II, 1, págs. XIX y sig.

[6] Tampoco puede expresarse en el sistema de Whitehead y Russell la diferencia entre enunciados universales y singulares. No es exacto decir que las llamadas implicaciones «formales» o «generales» tengan que ser enunciados universales, pues cabe poner cualquier enunciado singular en forma de implicación general; por ejemplo, es posible expresar el enunciado «Napoleón nació en Córcega» de la forma $(x)\ (x = N \rightarrow \varphi x)$, o sea, diciendo lo siguiente: es verdad para todos los valores de x, que si x es idéntico a Napoleón, entonces x nació en Córcega.

Una *implicación general* se escribe así, «$(x)\ (\varphi x \rightarrow f x)$», en donde: «$(x)$» —el

15. Enunciados universales y existenciales

Naturalmente, no basta la caracterización de los enunciados universales como aquéllos en que no aparecen nombres individuales. Si se utiliza la palabra «cuervo» como nombre universal, es claro que el enunciado «todos los cuervos son negros» es un enunciado estrictamente universal. Pero no podríamos describir, ciertamente, como enunciados universales muchos otros enunciados —tales como «muchos cuervos son negros», «algunos cuervos son negros», «hay cuervos negros», etc.— en los que sólo aparecen nombres universales.

A los enunciados en que aparecen exclusivamente nombres universales (y ningún nombre individual) los llamaremos enunciados «estrictos» o «puros». *Los más importantes son los enunciados estrictamente universales*, de que he tratado ya. Pero también tengo un interés especial por los enunciados de la forma «hay cuervos negros», cuyo significado puede admitirse que es equivalente al de «existe, al menos, un cuervo negro»: llamaremos a estos *enunciados estricta o puramente existenciales* (o *enunciados de «hay»*).

La negación de un enunciado estrictamente universal equivale siempre a un enunciado estrictamente existencial, y viceversa. Por ejemplo, «*no todos los cuervos son negros*» *significa* lo *mismo* que «existe un cuervo que no es negro» o que «hay cuervos que no son negros».

Las teorías de la ciencia natural, especialmente lo que llamamos las leyes naturales, tienen la forma lógica de enunciados estrictamente universales; así pues, es posible expresarlos en forma de negaciones de enunciados estrictamente existenciales, o —como podemos también decir— en forma de *enunciados de inexistencia* (o enunciados de «no hay»). Por ejemplo, la ley de la conservación de la energía puede expresarse del modo siguiente: «No hay una máquina de movimiento perpetuo»; y la hipótesis de la carga eléctrica elemental del siguiente: «No hay más carga eléctrica que la que es múltiplo de la carga eléctrica elemental».

Con esta manera de formularlas vemos que las leyes naturales pueden compararse a «vetos» o «prohibiciones». No afirman que exista algo, o que se dé un caso determinado, sino que lo niegan. Insisten en que no existen ciertas cosas o situaciones, como *si* las vedaran o prohibieran: las excluyen. Y precisamente por esto es por lo que son *falsables:* si aceptamos que es verdadero un enunciado singular que —como si dijéramos— infringe la prohibición, por afir-

---

«operador» universal— puede leerse, «es verdad para todos los valores de x», y «φx» y «fx» son *funciones proposicionales*» (por ejemplo, «x nació en Córcega», sin decir quién es x: las funciones proposicionales no son verdaderas ni falsas). «$\rightarrow$» *representa «si es verdad que ... entonces es verdad que ...»*; la función proposicional φx que precede a «$\rightarrow$» puede llamarse el *antecedente* o *función proposicional condicionante,* y fx la *función proposicional consecuente;* finalmente, la *implicación general,* (x) $(\varphi x \rightarrow fx)$, afirma que todos los valores de x que satisfacen φ satisfacen, asimismo, f.

mar la existencia de una cosa (o la aparición de un acontecimiento) excluida por la ley, entonces la ley queda refutada. (Tendríamos un ejemplo con: «En tal y cual sitio hay un aparato que es una máquina de movimiento perpetuo».)

Por el contrario, los enunciados estrictamente existenciales no pueden ser falsados. Ningún enunciado singular (es decir, ningún «enunciado básico», ningún enunciado de un acontecimiento observado) puede contradecir al enunciado existencial «hay cuervos blancos»: sólo podría hacerlo un enunciado universal. Apoyándome en el criterio de demarcación que he adoptado, he de considerar a los enunciados estrictamente existenciales como no empíricos o «metafísicos». Posiblemente parezca dudoso semejante modo de caracterizarlos, y no enteramente de acuerdo con lo que es corriente en la ciencia empírica. Podría objetarse a lo dicho afirmando (con entera justicia) que hay teorías, incluso en la física, que tienen la forma de enunciados estrictamente existenciales; como ejemplo podría presentarse el enunciado —deductible del sistema periódico de los elementos químicos— que afirma la existencia de elementos de ciertos números atómicos. Mas para formular la hipótesis (de que existe un elemento de cierto número atómico) en forma que pueda ser contrastada, se requiere mucho más que un simple enunciado puramente existencial: por ejemplo, el elemento número 72 (el hafnio) no fue descubierto apoyándose simplemente en un enunciado puramente existencial aislado; por el contrario, todas las tentativas de encontrarle fueron vanas hasta que Bohr logró predecir varias propiedades suyas deduciéndolas de la teoría. Ahora bien, la teoría de Bohr y las conclusiones de ella que eran pertinentes en lo que respecta a este elemento (y que contribuyeron a su descubrimiento) están muy lejos de ser enunciados puramente existenciales aislados *[1]: son enunciados estrictamente universales. En su aplicación a los enunciados probabilitarios y al problema de contrastarlos empíricamente, podrá verse que mi decisión de considerar los enunciados estrictamente existenciales como no empíricos —por no ser falsables— es útil, y, asimismo, que está conforme con el uso corriente. (Cf. los apartados 66 a 68.)

Los enunciados estrictos o puros, ya sean universales o existenciales, no están limitados en cuanto a espacio y tiempo, no se refieren a una región espacio-temporal restringida. Y por esta razón es por lo que los enunciados estrictamente existenciales no son falsables: no podemos registrar la totalidad del mundo con objeto de determinar que algo no existe, nunca ha existido y jamás existirá. Es justamente la misma razón que hace no verificables los enunciados estrictamente

*[1] Se ha incluido la palabra «aislados» [en ingl., *single*] para evitar malas interpretaciones de este pasaje, aunque me parece que su tendencia está suficientemente clara. Un enunciado existencial *aislado* no es falsable jamás; pero si se lo toma *en un contexto*, juntamente con otros enunciados, *en algunos casos puede* aumentar el contenido empírico de dicho contexto: puede enriquecer la teoría a que pertenece y aumentar su grado de falsabilidad o de contrastabilidad; en este caso, ha de decirse del sistema teórico que incluye el enunciado existencial en cuestión que es científico en lugar de metafísico.

universales: tampoco podemos escudriñar todo el universo con objeto de tener la certeza de que no existe nada prohibido por la ley. No obstante, ambas clases de enunciados —los estrictamente existenciales y los estrictamente universales— son, en principio, decidibles empíricamente; pero cada uno *exclusivamente en un sentido:* son *decidibles unilateralmente.* Siempre que se encuentra que algo existe aquí o allí puede verificarse un enunciado estrictamente existencial, o falsarse uno estrictamente universal.

Es posible que ahora la simetría que hemos descrito (juntamente con su consecuencia, la falsabilidad unilateral de los enunciados universales de la ciencia empírica) parezca menos dudosa de lo que había semejado ser antes (en el apartado 6). Pues vemos que no se trata de *asimetría* alguna de las relaciones puramente *lógicas;* por el contrario, las relaciones lógicas presentan simetría: los enunciados universales y existenciales están construidos de una manera simétrica; es únicamente *[2] la línea trazada por nuestro criterio de demarcación lo que da origen a una asimetría.

16. Los sistemas teóricos

Las teorías científicas están en perpetuo cambio. Esto no se debe a una mera casualidad, sino que podría haberse esperado, teniendo en cuenta cómo hemos caracterizado la ciencia empírica.

Quizá sea ésta la razón por la que, por regla general, únicamente las *ramas* de la ciencia llegan a adquirir —aunque sólo temporalmente— la forma de un sistema teórico desarrollado y bien trabado desde el punto de vista lógico. A pesar de ello, se suele tener un panorama bastante claro de los sistemas planteados provisionalmente, y de todas sus consecuencias importantes; lo cual es, sin duda, necesario, pues para contrastar un sistema a fondo se ha de presuponer que en ese momento tiene una forma suficientemente definida y definitiva como para que sea imposible introducir subrepticiamente en él nuevos supuestos. Dicho de otro modo: el sistema de que se trate tiene que estar formulado de un modo tan claro y definido que se reconozca con facilidad que cualquier supuesto nuevo es una modificación, y, por ello, una *revisión* del mismo.

Esta es la razón, según creo, por la que se tiende a la forma de un sistema riguroso, a la forma de lo que se ha llamado un «*sistema axiomatizado*» —la que Hilbert, por ejemplo, ha sido capaz de dar a ciertas ramas de la física teórica—. Se pretenden reunir todos los supuestos que se necesitan —pero sólo éstos— y formar con ellos el

*[2] La palabra «únicamente» no debe tomarse con excesivo rigor. La situación es sumamente simple: si la ciencia empírica está caracterizada por considerar los enunciados *singulares* como enunciados de contraste, entonces la asimetría procede del hecho de que, *con respecto a los enunciados singulares,* los enunciados universales son únicamente falsables, y los enunciados existenciales únicamente verificables. Véase también el apartado *22 de mi *Postscript.*

ápice del sistema; tales supuestos se suelen llamar los «axiomas» (o «postulados», o «proposiciones primitivas»; téngase en cuenta que el término «axioma» no implica aquí que se los considere verdaderos). Los axiomas se eligen de modo tal que todos los demás enunciados pertenecientes al sistema teórico puedan deducirse de ellos por medio de transformaciones puramente lógicas o matemáticas.

Cabe decir que un sistema teórico está axiomatizado si se ha formulado un conjunto de enunciados —los axiomas— que satisface los cuatro siguientes requisitos fundamentales. *a*) El sistema de axiomas está *exento de contradicción* (ya sea contradicción interna de ellos o de unos con otros); lo cual equivale a que no es deductible del sistema un enunciado arbitrario cualquiera [1]. *b*) El sistema es *independiente*, es decir, no contiene ningún axioma deductible de los restantes (o sea, que solamente se llamará axioma a un enunciado si no es posible deducirle del resto del sistema). Estas dos condiciones se refieren al sistema axiomático como tal; en lo que se refiere a las relaciones del mismo con el conjunto de la teoría, los axiomas han de ser, *c) suficientes* para deducir todos los enunciados pertenecientes a la teoría que se trata de axiomatizar, y *d) necesarios* para el mismo fin: lo cual quiere decir que no deben contener supuestos superfluos [2].

En una teoría axiomatizada de esta manera es posible investigar la dependencia mutua de sus distintas partes. Por ejemplo, podemos estudiar si una parte de la teoría es deductible de una parte de los axiomas: estudios (de los que hablaremos también en los apartados 63, 64 y 75 a 77) que desempeñan un papel importante en el problema de la falsabilidad, pues hacen ver por qué la falsación de un enunciado deducido lógicamente puede no afectar, en ocasiones, más que a una parte del sistema teórico completo, que será la única que habremos de considerar como falsada. Es posible llegar a semejante conclusión porque —aunque, en general, las teorías físicas no están enteramente axiomatizadas— las relaciones entre sus diversas partes pueden ser lo suficientemente claras como para permitirnos decidir cuáles de sus subsistemas resultan afectados por una observación falsadora determinada [*1].

17. Algunas posibilidades de interpretación de un sistema de axiomas

No discutiremos ahora la opinión del racionalismo clásico según la cual los «axiomas» de ciertos sistemas —por ejemplo, los de la geometría euclidiana— han de considerarse inmediata o intuitivamente ciertos, o evidentes; mencionaré únicamente que no participo de tal

[1] Cf. el apartado 24.

[2] En lo que se refiere a estas cuatro condiciones, así como al apartado siguiente, véase, por ejemplo, el estudio algo diferente de Carnap en su *Abriss der Logistik* (1927), págs. 70 y sigs.

[*1] En mi *Postscript* —en el apartado *22, especialmente— me ocupo con más detalle de esta cuestión.

opinión. Me parece que son admisibles dos interpretaciones diferentes de un sistema cualquiera de axiomas: éstos pueden considerarse, I) ya como *convenciones,* II) ya como *hipótesis* científicas.

I) Si se piensa que los axiomas son *convenciones*, entonces éstas determinan el empleo o sentido de las ideas fundamentales (o términos primitivos, o conceptos) introducidas por los axiomas: establecen lo que puede y lo que no puede decirse acerca de dichas ideas fundamentales. A veces se describen los axiomas diciendo que son «*definiciones implícitas*» de las ideas que introducen. Tal vez pueda aclararse esta tesis por medio de una analogía entre un sistema axiomático y un sistema de ecuaciones (compatible y resoluble).

Los valores admisibles de las «incógnitas» (o variables) que aparecen en un sistema de ecuaciones están determinados, de uno u otro modo, por éste. Incluso si el sistema de ecuaciones no es suficiente para llegar a una solución única, no permite que se sustituya cualquier combinación concebible de valores en el lugar de las «incógnitas» (variables); sino que tal sistema caracteriza como admisibles ciertas combinaciones de valores (o sistemas de valores), y como inadmisibles otras: distingue, pues, la clase de los sistemas de valores admisibles de la clase de los inadmisibles. De análoga manera puede hacerse una distinción entre sistemas de conceptos admisibles e inadmisibles por medio de lo que podría llamarse una «ecuación de enunciados»; ésta se obtiene a partir de una función proposicional o función de enunciados (cf. la nota 6 del apartado 14), que —a su vez— es un enunciado incompleto, en el que aparecen uno o más «lugares vacíos». Demos dos ejemplos de tales funciones proposicionales o funciones de enunciados: «Un isótopo del elemento x tiene el peso atómico 65»; «$x + y = 12$». Toda función de enunciados se transforma en un *enunciado* cuando en los lugares vacíos, x e y, se sustituyen ciertos valores; enunciado que puede ser verdadero o falso, según el valor (o combinación de valores) que haya servido para la sustitución: así, en el primer ejemplo, si en lugar de «x» se sustituye cualquiera de las palabras «cobre» o «cinc» se tendrá un enunciado verdadero, mientras que otras sustituciones dan lugar a enunciados falsos. Se obtiene lo que yo llamo una «ecuación de enunciados» si, con respecto a una función de enunciados determinada, decidimos admitir solamente para la sustitución aquellos valores que conviertan la función en un *enunciado verdadero;* y semejante ecuación de enunciados define una clase determinada de sistemas (de valores) admisibles: a saber, la clase de los sistemas que la satisfacen. La analogía con una ecuación matemática es muy clara. Y si interpretamos el segundo ejemplo, no como una función de enunciados, sino como una ecuación de enunciados, se convierte en una ecuación en el sentido ordinario (matemático).

Puesto que es posible considerar sus ideas fundamentales no definidas —o términos primitivos— como lugares vacíos, todo sistema axiomático puede ser tratado, por lo pronto, como un sistema de funciones de enunciados. Pero si decidimos que solamente se puedan sustituir los sistemas —o combinaciones de valores— que satisfagan aquél, entonces se convierte en un sistema de ecuaciones de enunciados: y, como tal, define una clase de sistemas (admisibles) de conceptos. A todo sistema de conceptos que satisfaga a un sistema de axiomas puede denominársele un *modelo de dicho sistema de axiomas* *[1].

Puede expresarse, asimismo, la interpretación de un sistema axiomático como un sistema de (convenciones o de) definiciones implícitas, diciendo que equivale a la siguiente decisión: los únicos sustituyentes que se admitirán serán modelos *[2]. Pero si se lleva a cabo la sustitución con un modelo, el resultado será un sistema de enunciados analíticos (ya que será verdadero por convención). Por consiguiente, un sistema axiomático interpretado de este modo no puede considerarse como un sistema de hipótesis empíricas o científicas (en nuestro sentido de estas palabras), ya que no puede ser refutado por falsación de sus consecuencias, pues también éstas han de ser analíticas.

II) Entonces, podrá preguntarse, ¿cómo puede interpretarse un sistema axiomático como un sistema de *hipótesis* empíricas o científicas? La tesis corriente es que los términos primitivos que aparecen en dicho sistema no deben considerarse definidos implícitamente, sino que han de tomarse por «constantes extralógicas». Por ejemplo, conceptos tales como «línea recta» y «punto», que aparecen en todo sistema axiomático de la geometría, podrían interpretarse como «rayo de luz» e «intersección de rayos de luz», respectivamente. Se piensa que, de este modo, los enunciados del sistema de axiomas se convierten en enunciados acerca de objetos empíricos, o, lo que es lo mismo, en enunciados sintéticos.

A primera vista, semejante manera de considerar la cuestión puede parecer enteramente satisfactoria; y, sin embargo, lleva a dificultades que se encuentran en conexión con el problema de la base empírica. Pues no está claro, en modo alguno, qué sería una *manera empírica de definir un concepto*. Se suele hablar de «definiciones ostensivas»: esto quiere decir que se asigna un sentido empírico determinado a un concepto *haciéndole corresponder* a ciertos objetos pertenecientes al mundo real: se le considera entonces como símbolo de tales objetos. Pero debería haber sido obvio que lo único que es posible fijar, refiriéndolo ostensivamente a «objetos reales» —digamos, señalando cierta cosa y emitiendo a la vez un nombre, o adhiriendo a la cosa un marbete con un nombre escrito, etc.—, son nombres o conceptos individuales. Mas los conceptos que han de utilizarse en el sistema axiomático deberían ser nombres universales, que no pueden definirse por medio de indicaciones empíricas, señalamientos, etc.: si pueden definirse de algún modo explícito será *por medio de otros nombres universales*, y si no es así habrán de quedar sin

*[1] Véase la nota *2.

*[2] Yo distinguiría hoy claramente entre los *sistemas de objetos* que satisfacen un sistema axiomático y el *sistema de nombres de dichos objetos*, que puede sustituirse en los axiomas (convirtiéndolos en verdaderos); y sólo diría del primer sistema que es un «modelo». Por tanto, ahora escribiría: «los únicos sustituyentes que se admitirán serán nombres de objetos que constituyan un modelo».

definir. Por tanto, es inevitable que ciertos nombres universales queden sin definir, y en ello reside la dificultad: pues tales conceptos indefinidos pueden emplearse siempre en el sentido no empírico mencionado en 1), es decir, como si fuesen conceptos definidos implícitamente; pero ello arruinaría inevitablemente el carácter empírico del sistema. Creo que esta dificultad puede superarse únicamente gracias a una decisión metodológica: en consecuencia, adoptaré la regla de *que no se emplearán conceptos sin definir como si estuviesen definidos implícitamente*. (Nos ocuparemos más adelante, en el apartado 20, de esta cuestión.)

Quizá sea conveniente añadir ahora que, por lo regular, es posible establecer una correspondencia entre los conceptos primitivos de un sistema axiomático, tal como el de la geometría, y los conceptos de otro sistema, por ejemplo, la física (o, de otro modo, es posible interpretar aquellos conceptos por medio de éstos). Esta posibilidad reviste una importancia singular cuando, en el curso de la evolución de una ciencia, se *explica* un sistema de enunciados por medio de un sistema de hipótesis nuevo —y más general— que permite no sólo la deducción de enunciados pertenecientes al primer sistema, sino la de enunciados que pertenecen a otros sistemas. En tales casos, será posible definir los conceptos fundamentales del nuevo sistema valiéndose de conceptos que se habían empleado originariamente en algunos de los antiguos sistemas.

18. Niveles de universalidad. El «modus tollens»

Dentro de un sistema teórico podemos distinguir entre enunciados pertenecientes a niveles diversos de universalidad. Los enunciados del nivel más alto son los axiomas, y de ellos pueden deducirse otros situados a niveles inferiores. Los enunciados empíricos de elevado nivel tienen siempre el carácter de hipótesis con respecto a los enunciados —de nivel inferior— deductibles de ellos: pueden quedar falsados cuando se falsan estos enunciados menos universales. Pero en cualquier sistema deductivo hipotético estos últimos siguen siendo enunciados estrictamente universales (en el sentido a que aquí nos referimos), y, por ello, han de tener, asimismo, el carácter de *hipótesis:* hecho en que no se ha parado mientes en el caso de los enunciados de nivel inferior. Mach, por ejemplo [1], llama a la teoría de Fourier sobre la conducción del calor una «teoría modelo de la física», por la curiosa razón de que «esta teoría no está fundada en una *hipótesis*, sino en un *hecho observable*». Sin embargo, el «hecho observable» a que se refiere Mach resulta ser el que él describe por el enunciado siguiente: «... la velocidad a que se igualan las diferencias de temperatura —cuando éstas son pequeñas— es proporcional a las mismas»; o sea, un enunciado total cuyo carácter hipotético parece bastante conspicuo.

[1] Mach, *Principien der Wärmelehre* (1896), pág. 115.

Diré, incluso, que ciertos enunciados singulares son hipotéticos, dado que (con ayuda de un sistema teórico) puedan deducirse de ellos conclusiones tales que la falsación de éstas sea capaz de falsar los enunciados singulares en cuestión.

El modo de inferencia falsador a que nos referimos —o sea, la manera en que la falsación de una conclusión entraña la falsación del sistema de que se ha deducido— es el *modus tollens* de la lógica clásica. Podemos describirlo como sigue [*1].

Sea p *una conclusión de un sistema* t *de enunciados*, que puede estar compuesto por teorías y condiciones iniciales (no haré distinción entre ellas, en beneficio de la sencillez). Podemos simbolizar ahora la relación de deductibilidad (implicación analítica) de p a partir de t por medio de «$t \longrightarrow p$», que puede leerse: «p se sigue de t». Supongamos que p sea falsa, lo cual puede escribirse «$\bar{p}$» y leerse «no p». Dada la relación de deductibilidad, $t \longrightarrow p$, y el supuesto $\bar{p}$, podemos *inferir* $\bar{t}$ *(léase «no* t*»): esto es, consideramos que* t ha quedado falsado. Si denotamos la conyunción (aserción simultánea) de dos enunciados colocando un punto entre los símbolos que los representan, podemos escribir también la inferencia falsadora del modo siguiente: $((t \longrightarrow p).\bar{p}) \longrightarrow \bar{t}$; o, expresándolo con palabras: «Si p es deductible de t, y p es falsa, entonces t es también falso».

Gracias a este modo de inferencia falsamos el *sistema completo* (la teoría con las condiciones iniciales) que había sido necesario para la deducción del enunciado p, es decir, del enunciado falsado. Por tanto, no puede afirmarse de un enunciado cualquiera dado del sistema que él en particular ha resultado vulnerado —o no vulnerado— por la falsación: solamente en el caso de que p sea *independiente* de una parte del sistema podemos decir que esta parte no ha quedado arrastrada por la falsación [2]. En relación con esta circunstancia nos

[*1] En relación con este pasaje y con otros dos posteriores (cf. las notas *1 del apartado 35 y *1 del apartado 36) en que empleo el símbolo « $\longrightarrow$ », he de decir que cuando escribí este libro tenía una idea confusa acerca de la diferencia entre un enunciado condicional (enunciado de si ... entonces, que se llama a veces —de un modo algo propenso a errores— «implicación material») y un enunciado sobre deductibilidad (o sea, uno que afirma que un enunciado condicional es verdadero lógicamente, o analítico, o que su antecedente entraña su consecuente): diferencia que Alfred Tarski me hizo comprender pocos meses después de la publicación del libro. Este problema no tiene gran importancia en nuestro contexto, pero, en todo caso, debe señalarse la confusión mencionada. (Se discuten estas cuestiones con mayor amplitud, por ejemplo, en mi artículo de *Mind* **56**, 1947, págs. 193 y sigs.)

[2] Así pues, no podemos saber, a primera vista, entre los diversos enunciados del subsistema restante t' (del cual no es independiente p), a cuál hemos de reprochar la falsedad de p: cuáles de ellos tenemos que alterar y cuáles habríamos de retener. (No me refiero ahora a enunciados intercambiables.) Con frecuencia, lo único que hace adivinar al investigador qué enunciados de t' debe considerar innocuos y cuáles necesitados de modificación es su instinto científico (influido, desde luego, por los resultados de llevar a cabo contrastaciones una y otra vez). Con todo, merece la pena recordar que, a menudo, lo que puede originar un avance decisivo es la modificación de lo que nos sentimos inclinados a considerar como innocuo (debido a su completo acuerdo con nuestros hábitos intelectuales); tenemos un ejemplo notable de lo que digo en la modificación einsteiniana del concepto de simultaneidad.

encontramos con la siguiente posibilidad: en ciertos casos —quizá teniendo en cuenta los *niveles de universalidad*— podemos atribuir la falsación a una hipótesis determinada, por ejemplo, a una recién introducida. Esta situación puede presentarse cuando se explica una teoría perfectamente corroborada (y que continúa estándolo con la nueva explicación que mencionamos) deduciéndola de una nueva hipótesis de un nivel superior; entonces habrá que contrastar la nueva hipótesis por medio de alguna de sus consecuencias aún no sometidas a contraste: si queda falsada cualquiera de estas últimas, podemos muy bien atribuir la falsación exclusivamente a la hipótesis que se acaba de introducir; buscaremos, en su lugar, otra hipótesis de alto nivel, pero no nos sentimos obligados a considerar que el sistema antiguo, que tenía menor generalidad, haya resultado falsado. (Cf., asimismo, las observaciones sobre la «casi-inducción» en el apartado 85.)

La falsabilidad

Me ocuparé más adelante de la cuestión acerca de si existe algo a que pueda llamarse un enunciado singular falsable (o «enunciado básico»); supondré ahora una respuesta positiva a tal cuestión y examinaré hasta qué punto es aplicable mi criterio de demarcación a los sistemas teóricos —si es que es aplicable de algún modo—. Durante el estudio crítico de una posición a la que se suele llamar «convencionalismo», surgirán, en primer lugar, ciertos problemas de método, con los que será menester enfrentarse tomando determinadas *decisiones metodológicas*. Trataré, después, de caracterizar las propiedades lógicas de los sistemas de teorías que son falsables (es decir, que lo serán si se aceptan nuestras decisiones metodológicas).

19. Algunas objeciones convencionalistas

Forzosamente se han de suscitar objeciones contra mi propuesta de adopción de la falsabilidad como criterio para decidir si un sistema teórico pertenece o no a la ciencia empírica. Las plantearán, por ejemplo, quienes están bajo la influencia de la escuela conocida con el nombre de «convencionalismo» [1]; nos hemos referido antes a algunas de ellas en los apartados 6, 11 y 17, pero ahora las consideraremos más circunstanciadamente.

Según parece, el manantial de la filosofía convencionalista es la admiración ante la bella y austera *sencillez del mundo*, tal como nos la revelan las leyes de la física. Los convencionalistas parecen tener

[1] Los principales representantes de esta escuela son Poincaré y Duhem (cf. *La théorie physique, son objet et sa structure*, 1906; trad. ingl. por P. P. Wiener, *The Aim and Structure of Physical Theory*, Princeton, 1954); recientemente se ha adherido a ella H. Dingler (entre cuyas numerosas obras pueden mencionarse: *Das Experiment* y *Der Zusammenbruch der Wissenschaft und das Primat der Philosophie*, 1926). *No debe confundirse al alemán Hugo Dingler con el inglés Herbert Dingle. El principal representante del convencionalismo en el mundo de habla inglesa es Eddington. Puede mencionarse aquí que Duhem niega (trad. ingl., pág. 300) la posibilidad de experimentos cruciales, ya que los considera verificaciones, mientras que yo afirmo la posibilidad de experimentos *falsadores* cruciales (este autor destaca, con razón, que sólo podemos refutar sistemas teóricos completos; pero no parece ver la asimetría existente entre verificación y falsación, lo cual afecta a su estudio de los *experimentos cruciales*).

la sensación de que semejante sencillez sería incomprensible —y, aún más, milagrosa— si nos viésemos obligados a creer, con los realistas, que las leyes de la Naturaleza nos revelan una íntima sencillez estructural de nuestro mundo bajo su apariencia de una desbordante variedad. El idealismo kantiano trató de explicar aquélla diciendo que quien impone sus leyes a la Naturaleza es nuestro propio intelecto; de modo parecido, pero aún más atrevido, el convencionalista califica a aquélla de creación nuestra: para él, sin embargo, no es un efecto de las leyes de nuestro intelecto en su auto-imposición sobre la Naturaleza, con lo que ésta se convertiría en algo muy sencillo: pues el convencionalista no cree que la Naturaleza lo sea. Sólo son sencillas las «*leyes de la Naturaleza*»; y el convencionalista sostiene que éstas son libres creaciones nuestras, invenciones, decisiones arbitrarias y convenciones nuestras. Según él, la ciencia natural teórica no es una imagen de la Naturaleza, sino una mera construcción lógica; y no son las propiedades del mundo las que determinarían esta construcción, sino que —por el contrario— precisamente es ésta la que determina las propiedades de un mundo artificial, un mundo de conceptos definidos implícitamente por las leyes naturales que hemos elegido. Sólo de *semejante* mundo es del que habla la ciencia.

De acuerdo con el punto de vista convencionalista a que vengo aludiendo, las leyes de la Naturaleza no son falsables por la observación, pues se necesitan para determinar qué es una observación —y, más en particular, qué es una medición científica—. Son estas leyes que nosotros hemos establecido las que forman la base indispensable para la regulación de nuestros relojes y la corrección de nuestras reglas graduadas (que llamamos «rígidas): decimos que un reloj es «exacto» y que una regla graduada es «rígida» cuando los movimientos medidos valiéndose de estos instrumentos satisfacen los axiomas de la mecánica que hemos decidido adoptar [2].

Debemos mucho a la filosofía del convencionalismo en lo que se refiere a aclarar las relaciones entre la teoría y la experiencia. Ha reconocido la importancia del papel desempeñado por nuestras acciones y operaciones —planeadas de acuerdo con convenciones y con ra-

---

[2] Podría considerarse también a esta tesis como una tentativa de resolver el problema de la inducción: pues éste desaparecería si las leyes naturales fuesen definiciones, y, por tanto, tautologías. Así pues, según la opinión de Cornelius (cf. *Zur Kritik der wissenschaftlichen Grundbegriffe*, *Erkenntnis* 2, 1931, núm. 4), el enunciado «el punto de fusión del plomo es 335°C, aproximadamente», es parte de la definición del concepto «plomo» (sugerido por la experiencia inductiva), y, por ello, no puede ser refutado: una substancia que por lo demás se asemejase al plomo, pero que tuviese otro punto de fusión, no sería plomo, simplemente. Pero, según mi opinión, el enunciado del punto de fusión del plomo es, *qua* enunciado científico, sintético: afirma, entre otras cosas, que un elemento de una estructura atómica determinada (número atómico 82) tiene siempre ese punto de fusión, sea cualquiera el nombre que le demos.

(Adición al corregir las pruebas.) Ajdukiewicz parece estar de acuerdo con Cornelius (cf. *Erkenntnis* 4, 1934, pág. 100 y sig., así como la obra allí anunciada, *Das Weldbild und die Begriffsapparatur)*; llama a su punto de vista un «convencionalismo radical».

zonamientos deductivos— en la realización y en la interpretación de nuestros experimentos científicos; lo cual había sido pasado por alto, en gran medida, por el inductivismo. En mi opinión, el convencionalismo es un sistema completo y defendible, y no es fácil que tengan éxito los intentos de descubrir en él incoherencias. Pero, a pesar de todo ello, lo encuentro totalmente inaceptable; subyace a él una teoría de la ciencia, de su finalidad y sus propósitos, radicalmente distinta de la mía. Mientras que yo no pido a la ciencia ninguna certidumbre definitiva (y, en consecuencia, no la encuentro), el convencionalista busca en *ella* «un sistema de conocimientos apoyado en razones últimas», empleando una frase de Dingler. Se puede alcanzar esta meta, ya que siempre es posible interpretar un sistema científico dado como un sistema de definiciones implícitas; y los períodos en que la ciencia se desarrolla lentamente apenas darán ocasión para que surja un conflicto —excepto los puramente académicos— entre los científicos inclinados hacia el convencionalismo y los que puedan sentirse más cerca de una tesis como la que yo defiendo. Pero muy de otro modo serán las cosas en época de crisis. Siempre que el sistema «clásico» del momento se vea amenazado por los resultados de nuevos experimentos que podrían interpretarse como falsaciones desde mi punto de vista, el mismo sistema presentará un aspecto impasible para el convencionalista: dará una explicación que eliminará las incompatibilidades que puedan haber surgido, tal vez inculpando a nuestro imperfecto dominio del sistema; o acabará con ellas sugiriendo la adopción *ad hoc* de ciertas hipótesis auxiliares, o quizá la ejecución de ciertas correcciones en nuestros aparatos de medida.

En tales épocas de crisis se agudizará este conflicto acerca de la finalidad de la ciencia. Nosotros —y los que comparten nuestra actitud— esperaremos llevar a cabo nuevos descubrimientos, y confiaremos en que un sistema científico recién erigido nos ayudará en esta labor: por ello, un experimento falsador despertará nuestro máximo interés, lo acogeremos como un éxito, por habernos abierto nuevas perspectivas sobre un mundo de nuevas experiencias. Pero el convencionalista verá la estructura que está empezando a elevarse —y cuya audacia nosotros admiramos— como un monumento al «colapso total de la ciencia», según se expresa Dingler; a sus ojos, sólo un principio puede ayudarnos a elegir un sistema entre todos los posibles: el de escoger el más sencillo (o sea, el sistema más sencillo de definiciones implícitas); lo cual quiere decir, en la práctica, el sistema «clásico» del momento. (Acerca del problema de la sencillez, véanse los apartados 41 a 45, y además, en especial, el 46.)

Así pues, mi conflicto con el convencionalista no puede dirimirse definitivamente por una mera discusión teórica desapasionada. Y, con todo, creo que es posible extraer de su actitud intelectual ciertos argumentos interesantes contra mi criterio de demarcación; por ejemplo, el que ahora voy a exponer. Un convencionalista podría decir: yo admito que los sistemas teóricos de las ciencias de la Naturaleza no son verificables, pero afirmo que tampoco son falsables; pues siempre existe la posibilidad de «... conseguir, para un sistema axiomático cualquiera dado, lo que se llama su 'correspondencia con la realidad'»[3]; lo cual podría conseguirse de diversas maneras (a algunas de las cuales he aludido más arriba): así, podemos introducir hipótesis *ad hoc,* modificar las llamadas «definiciones ostensivas» (o las «definiciones explícitas» que podrían remplazarlas, según se vio en el apartado 17), o adoptar una actitud escéptica con respecto a la confianza que deberíamos depositar en el experimentador y excluir sus observaciones —que amenazan nuestro sistema— de la ciencia, basándonos en que carecen de base suficiente, en que no son científicas o no son objetivas, o incluso en que el experimentador es un embustero (ésta es la actitud que los físicos pueden adoptar a veces, con toda razón, con respecto a supuestos fenómenos ocultos); en último caso, podemos siempre expresar dudas acerca de la agudeza mental del científico teórico (por ejemplo, si no cree —con Dingler— que llegará un día en que la teoría de la electricidad se deduzca de la teoría gravitatoria de Newton).

Por tanto, según la tesis convencionalista, no es posible dividir las teorías en falsables y no falsables; o, mejor dicho, semejante distinción sería ambigua. Por consiguiente, nuestro criterio de falsabilidad se habría de convertir en inaplicable como criterio de demarcación.

20. Reglas metodológicas

Estas objeciones de un convencionalista imaginario me parecen incontestables, exactamente igual que su filosofía misma. Admito que mi criterio de falsabilidad no nos conduce a una clasificación desprovista de ambigüedades; en realidad, mediante el análisis de su forma lógica es imposible decidir si un sistema de enunciados es un sistema convencional de definiciones implícitas irrefutables o si es un sistema empírico (en el sentido que yo doy a esta palabra: es decir, si es refutable). Sin embargo, esto equivale a indicar que mi criterio de demarcación no puede ser aplicado inmediatamente a un *sistema de enunciados* —hecho que ya había señalado en los apartados 9 y 11—. Por tanto, existe un error de principio en la cuestión acerca de si un *sistema* dado debe considerarse, como tal, convencionalista o empírico: para que sea posible en absoluto preguntar si nos encontramos ante una teoría convencionalista o empírica *es indispensable referirse a los métodos aplicados* al sistema teórico. El único modo de eludir el convencionalismo es tomar una *decisión:* la de no aplicar sus métodos. Decidimos que, en el caso de que se presente una amenaza para nuestra teoría, no la salvaremos por ningún género de *estratagema convencionalista;* así pues, nos guardaremos de explotar la posibilidad que acabamos de mencionar —y que está siem-

[3] Carnap, *Über die Aufgabe der Physik, Kantstudien* **28** (1923), pág. 100.

pre abierta— de «... conseguir, para un sistema... cualquiera dado, lo que se llama su 'correspondencia con la realidad'».

Black apreció claramente, cien años antes que Poincaré, todo lo que puede lograrse (y malograrse) mediante los métodos convencionalistas, cuando se expresaba del modo siguiente: «Mediante una suave adaptación de las condiciones, casi puede conseguirse que cualquier hipótesis esté de acuerdo con los fenómenos; con ello la imaginación quedará muy complacida, pero nuestros conocimientos no progresarán» [1].

Con objeto de formular reglas metodológicas que eviten la adopción de estratagemas convencionalistas sería conveniente familiarizarnos con las diversas formas que pueden adoptar tales estratagemas, de modo que podamos salir al paso de cada una de ellas moviendo nuestras piezas del modo anticonvencionalista apropiado. Además, deberíamos decidir que siempre que encontremos un sistema que se ha rescatado gracias a una estratagema convencionalista, lo someteremos de nuevo a contraste —y lo rechazaremos si las circunstancias lo exigen.

Al final del apartado anterior hemos citado ya las cuatro estratagemas convencionalistas principales. Pero tal lista no tiene ninguna pretensión de ser completa: ha de dejarse al investigador —especialmente en los campos de la sociología y de la psicología, pues el físico escasamente necesita que se le ponga sobre aviso— la tarea de guardarse constantemente de la tentación de emplear nuevas estratagemas convencionalistas: tentación a la que el psicoanálisis, por ejemplo, sucumbe frecuentemente.

En lo que respecta a las *hipótesis auxiliares*, decidimos establecer la regla de que se considerarán aceptables únicamente aquéllas cuya introducción no disminuya el grado de falsabilidad o contrastabilidad del sistema, sino que, por el contrario, lo aumente. (Explicaremos en los apartados 31 a 40 cómo pueden estimarse los grados de falsabilidad.) Si tal grado aumenta, con la introducción de la hipótesis se ha reforzado realmente la teoría: el sistema excluye más posibilidades que antes, prohibe más. Podemos expresar lo mismo del modo siguiente: siempre que se introduzca una nueva hipótesis ha de considerarse que se ha hecho un intento de construir un nuevo sistema, que debería ser juzgado siempre sobre la base de si su adopción significaría un nuevo progreso en nuestro conocimiento del mundo. Tenemos un ejemplo de hipótesis auxiliar que es sumamente aceptable en este sentido en el principio de exclusión de Pauli (cf. el apartado 38). Y un caso de una hipótesis auxiliar insatisfactoria podría ser la hipótesis de Fitzgerald y Lorentz de la contracción, que no tenía consecuencias falsables, sino que servía meramente para restaurar el acuerdo entre la teoría y la experimentación (principalmente, los resultados obtenidos por Michelson y Morley); en esta situación fue únicamente la teoría de la relatividad la que logró un progreso al

[1] J. Black, *Lectures on the Elements of Chemistry*, t. I, Edimburgo, 1803, página 193.

predecir nuevas consecuencias y nuevos efectos físicos, y abrió con ello nuevas posibilidades de contrastación y de falsación de la teoría. Podemos matizar nuestra regla metodológica haciendo la advertencia de que no es preciso rechazar como convencionalista toda hipótesis auxiliar que no llegue a satisfacer nuestra norma; en particular, existen enunciados *singulares*, que propiamente no pertenecen en absoluto a la teoría: a veces se los denomina «hipótesis auxiliares», y aunque se introducen en beneficio de la teoría son enteramente inofensivos. (Como ejemplo cabe citar la asunción de que una observación o medición determinada que no es posible repetir pueda deberse a un error; cf. la nota 6 del apartado 8 y los apartados 27 y 68.)

En el apartado 17 he mencionado las *definiciones explícitas*, mediante las cuales se da sentido a los conceptos de un sistema de axiomas a base de otro sistema de menor universalidad. Pueden permitirse cambios en tales definiciones, si es que resultan útiles; pero deben considerarse como modificaciones del sistema, que ha de ser examinado a continuación de nuevo, como si fuese otro. En lo que respecta a los nombres universales sin definir, hay que distinguir dos posibilidades: 1) que existan ciertos conceptos no definidos que aparezcan únicamente en enunciados del máximo nivel de universalidad, y cuyo empleo esté fijado por el hecho de que sepamos la relación lógica en que se encuentran con otros conceptos, con lo cual podrán eliminarse en el curso de la deducción (un ejemplo, la «energía»)[2]; 2) que haya otros conceptos sin definir que aparezcan también en enunciados de un nivel de universalidad más bajo, y cuyo sentido esté fijado por el uso (por ejemplo, «movimiento», «punto-masa», «posición»): prohibiremos que se altere subrepticiamente su uso, y, por lo demás, procederemos conforme a nuestras decisiones metodológicas, como antes.

Acerca de los dos puntos restantes de nuestra lista —que atañen a la competencia del experimentador o del científico teórico— adoptaremos reglas análogas. Los experimentos contrastables intersubjetivamente, o bien se aceptarán, o se rechazarán a la luz de otros experimentos de resultado opuesto. Y puede no tomarse en consideración toda apelación a conclusiones lógicas que podrían deducirse en el futuro.

21. Investigación lógica de la falsabilidad

Solamente es necesario ponerse en guardia contra las estratagemas convencionalistas en el caso de sistemas que serían falsables si se los tratase de acuerdo con nuestras reglas del método empírico. Suponga-

[2] Compárese, por ejemplo, Hahn, *Logik, Mathematik, und Naturerkennen*, en *Einheitswissenschaft* 2, 1933, págs. 22 y sigs. A este respecto yo diría únicamente que, en mi opinión, no existen en absoluto términos «constituibles» (es decir, empíricamente definibles); en su lugar yo empleo los nombres universales indefinibles establecidos exclusivamente por el uso lingüístico. Véase también el final del apartado 25.

mos que hemos excluido con éxito dichas estratagemas mediante nuestras reglas; podemos pedir ahora una caracterización *lógica* de tales sistemas falsables. Intentaremos caracterizar la falsabilidad de una teoría por las relaciones lógicas que existan entre ella y la clase de los enunciados básicos.

En el próximo capítulo discutiremos con mayor amplitud lo peculiar de los enunciados singulares que yo llamo «enunciados básicos», así como la cuestión de si son, a su vez, falsables; aquí supondré simplemente que existen. Debe tenerse siempre en cuenta que cuando hablo de «enunciados básicos» no me estoy refiriendo a un sistema de enunciados *aceptados;* en lugar de ello, hay que entender que el sistema de los enunciados básicos —tal como empleo yo este término— incluye *todos los enunciados singulares coherentes* dotados de cierta forma lógica: como si dijéramos, todos los enunciados singulares de hechos. Así pues, el sistema de todos los enunciados básicos contendrá muchos incompatibles entre sí.

Como primera aproximación, podría tal vez intentarse llamar «empírica» a una teoría siempre que puedan deducirse de ella enunciados singulares; pero este intento resulta fallido, porque para deducir enunciados singulares de una teoría necesitamos siempre otros enunciados singulares, las condiciones iniciales, que nos indican cómo se ha de realizar la sustitución de las variables de la teoría. Una segunda tentativa consistiría en denominar «empírica» a una teoría si es posible deducir de ella enunciados singulares valiéndose de otros enunciados del mismo tipo que sirvan de condiciones iniciales. Pero tampoco nos valdrá esto, pues también una teoría no empírica (por ejemplo, una que sea tautológica) nos permitiría deducir ciertos enunciados singulares a partir de otros de la misma especie. (Según las reglas de la lógica, por ejemplo, podemos decir: de la conyunción de «dos por dos es cuatro» y «aquí hay un cuervo negro» se sigue, entre otras cosas, «aquí hay un cuervo».) Ni siquiera bastaría exigir que fuera posible deducir de la teoría juntamente con las condiciones iniciales *más* de lo que se puede deducir de dichas condiciones iniciales solas: este requisito eliminaría, ciertamente, las teorías tautológicas, pero no excluiría los enunciados metafísicos sintéticos. (Por ejemplo, de «todo acontecimiento tiene una causa» y «aquí acontece una catástrofe» podemos deducir «esta catástrofe tiene una causa».)

De este modo, nos vemos conducidos a pedir que la teoría nos permita deducir, hablando toscamente, más enunciados singulares *empíricos* de los que podemos deducir de las condiciones iniciales solas *[1]. Esto quiere decir que hemos de apoyar nuestra definición en

*[1] Después de la publicación de mi libro se han propuesto una y otra vez —incluso por críticos que se burlaron de mi criterio de falsabilidad— métodos equivalentes al que aquí se presenta, pero como criterios del *sentido* de *cláusulas* (en vez de ser criterios de *demarcación* aplicables a *sistemas* teóricos). Pero es fácil ver que la formulación que damos aquí, si se emplea como criterio de demarcación es equivalente al de falsabilidad: pues si el enunciado básico b_2 no se sigue de b_1, sino que se sigue de b_1 en unión con la teoría t (y esto es lo que afirmamos en la formulación del texto), tal cosa equivale a que la conyunción de b_1 con la negación de b_2

una clase particular de enunciados singulares; y éste es, justamente, el propósito para el que necesitamos los enunciados básicos. Teniendo en cuenta que no sería muy fácil indicar en detalle cómo sirve un sistema teórico complicado para la deducción de enunciados singulares o básicos, propongo la definición siguiente: Se llama «empírica» o «falsable» a una teoría cuando divide de modo inequívoco la clase de todos los posibles enunciados básicos en las dos subclases no vacías siguientes: primero, la clase de todos los enunciados básicos con los que es incompatible (o, a los que excluye o prohibe), que llamaremos la clase de los *posibles falsadores* de la teoría; y, en segundo lugar, la clase de los enunciados básicos con los que no está en contradicción (o, que «permite»). Podemos expresar esta definición de una forma más breve diciendo que una teoría es falsable si la clase de sus posibles falsadores no es una clase vacía.

Puede añadirse, tal vez, que una teoría hace afirmaciones únicamente acerca de sus posibles falsadores (afirma su falsedad); acerca de los enunciados básicos «permitidos» no dice nada: en particular, no dice que sean verdaderos *2.

22. Falsabilidad y falsación

Tenemos que distinguir claramente entre falsabilidad y falsación. Hemos introducido la primera exclusivamente como criterio del carácter empírico de un sistema de enunciados; en cuanto a la falsa-

---

contradiga a la teoría *t*; pero la conyunción mencionada constituye un enunciado básico (cf. el apartado 28); luego nuestro criterio pide la existencia de un enunciado básico falsador, es decir, pide la falsabilidad precisamente en el sentido que yo le doy. (Véase, asimismo, la nota *1 del apartado 82.)

Sin embargo, como criterio de *sentido* (o de «poca verificabilidad») fracasa por varias razones. En primer término, porque, de acuerdo con él, las negaciones de ciertos enunciados con sentido resultarían carentes de sentido; y, en segundo, porque la conyunción de un enunciado con sentido y una «pseudocláusula sin sentido» tendría sentido, lo cual es igualmente absurdo.

Si tratamos ahora de aplicar estas dos críticas a nuestro criterio de *demarcación*, resultan ser inofensivas. En cuanto a la primera, véase más arriba el apartado 15, especialmente la nota *1 (y el apartado *22 de mi *Postscript)*. Por lo que se refiere a la segunda, las teorías empíricas pueden contener elementos «metafísicos» (así ocurre con la de Newton) que no sea posible eliminar por medio de una regla tajante; aunque si logramos presentar la teoría de modo que se convierta en la conyunción de una parte contrastable y otra no contrastable, sabemos que, en este caso, podemos eliminar uno de sus componentes metafísicos.

El párrafo inmediatamente anterior de esta nota puede tomarse como ejemplo de otra *regla metódica* (cf. el final de la nota *6 del apartado 80): la de que, una vez llevada a cabo una crítica de una teoría rival, debemos hacer siempre un intento serio de aplicarla —u otra análoga— a nuestra propia teoría.

*2 En realidad, muchos de los enunciados básicos «permitidos» estarían en contradicción mutua si se tuviera en cuenta, a la vez, la teoría (cf. el apartado 38); por ejemplo, la ley universal «todos los planetas se mueven en circunferencias» (o sea, «cualquier conjunto de posiciones de un planeta se encuentra sobre la misma circunferencia») está «ejemplificada» de un modo trivial por todo conjunto de no más de tres posiciones de un planeta; pero —en la mayoría de los casos— dos «ejemplos» semejantes tomados juntamente están en contradicción con la ley.

ción, es preciso incorporar reglas especiales que determinen en qué condiciones debemos considerar falsado un sistema.

Unicamente decimos que una teoría está falsada si hemos aceptado enunciados básicos que la contradigan (cf. el apartado 11, regla 2). Esta condición es necesaria, pero no suficiente, pues hemos visto que los acontecimientos aislados no reproducibles carecen de significación para la ciencia: así, difícilmente nos inducirán a desechar una teoría —por falsada—, unos pocos enunciados básicos esporádicos; pero la daremos por tal si descubrimos un *efecto reproducible* que la refute; dicho de otro modo: aceptamos la falsación solamente si se propone y corrobora una hipótesis empírica de bajo nivel que describa semejante efecto, y podemos denominar a este tipo de hipótesis una *hipótesis falsadora* [1]. El requisito de que la hipótesis falsadora ha de ser empírica, y, por tanto, falsable, quiere decir exclusivamente que debe encontrarse en cierta relación lógica con respecto a los posibles enunciados básicos: así pues, lo que exigimos atañe sólo a la forma lógica de la hipótesis. Y su acompañante, lo de que la hipótesis ha de estar corroborada, se refiere a las contrastaciones que debe haber pasado (contrastaciones que la habrán enfrentado con los enunciados básicos aceptados *[1]).

---

[1] La hipótesis falsadora puede tener un nivel de universalidad muy bajo (obtenido, diríamos, por generalización de las coordenadas individuales de un dato de observación: podría citarse como ejemplo el supuesto «hecho», según Mach, a que me he referido en el apartado 18); aun cuando ha de ser contrastable intersubjetivamente no necesita ser, en realidad, un enunciado estrictamente universal. Así, para falsar el enunciado «todos los cuervos son negros» bastaría el enunciado —contrastable intersubjetivamente— de que existiera una familia de cuervos blancos en el parque zoológico de Nueva York. *Todo esto indica la urgente necesidad de remplazar una hipótesis falsada por otra mejor. En la mayoría de los casos, antes de falsar una hipótesis tenemos ya otra dispuesta para sacárnosla de la manga, pues el experimento falsador suele ser un *experimento crucial* planeado de modo que nos permita decidir entre las dos: lo cual equivale a decir que dicho experimento nos ha sido sugerido por el hecho de que las dos hipótesis difieren en ciertos respectos, y que utiliza tales diferencias para refutar (al menos) una de ellas.

*[1] Esta referencia a enunciados básicos aceptados parece contener en germen una regresión infinita. Pues nuestro problema es el siguiente: puesto que se falsa una hipótesis al *aceptar* un enunciado básico, necesitamos *reglas metodológicas para aceptar enunciados básicos;* ahora bien, si estas reglas se refieren a su vez a otros enunciados básicos aceptados podemos quedar envueltos en una regresión del tipo indicado. Yo replicaría a este argumento que las reglas que necesitamos son meramente para aceptar enunciados básicos que falsen una hipótesis bien contrastada y que había tenido éxito hasta el momento, y que los enunciados básicos aceptados a que recurre la regla no tienen por qué poseer este carácter; además, ésta se encuentra muy lejos de ser exhaustiva: sólo menciona un aspecto importante de la aceptación de enunciados básicos que falsen una hipótesis que, por lo demás, tiene éxito completo; por lo cual la ampliaremos en el capítulo V (especialmente en el apartado 29).

En una comunicación personal, el profesor J. H. Woodger ha planteado la siguiente cuestión: ¿Con qué frecuencia es preciso reproducir realmente un efecto para que sea un «*efecto reproducible*»? La respuesta que hay que dar es: en algunos casos, *ni una sola vez.* Si afirmo que existe una familia de cuervos blancos en el parque zoológico de Nueva York, mi aserción puede ser contrastada *en principio;* si alguien quiere contrastarla y, al llegar allí, se entera de que la familia citada ha muerto, o de que nadie ha oído hablar de ella, queda a su arbitrio aceptar o rechazar mi

Por tanto, los enunciados básicos desempeñan dos papeles diferentes. Por una parte, hemos empleado el sistema de todos los enunciados básicos *lógicamente posibles* con objeto de obtener, gracias a ellos, la caracterización lógica que íbamos buscando —la de la forma de los enunciados empíricos—. Por otra, los enunciados básicos *aceptados* constituyen la base para la corroboración de las hipótesis; si contradicen a la teoría, admitimos que nos proporcionan motivo suficiente para la falsación de ésta únicamente en el caso de que corroboren a la vez una hipótesis falsadora.

23. Acontecimientos y eventos

El requisito de falsabilidad, que al principio era un poco vago, ha quedado dividido en dos partes: la primera —el postulado metodológico (cf. el apartado 28)— difícilmente puede hacerse enteramente precisa; la segunda —el criterio lógico— resulta completamente definida en cuanto se aclara a qué enunciados hemos de llamar «básicos» (cf. el apartado 28). He presentado este criterio lógico, hasta ahora, de una manera algo formal: como una relación lógica existente entre enunciados, es decir, los de la teoría y los enunciados básicos. Quizá aclare estas cuestiones y las haga más intuitivas si expreso ahora mi criterio en un lenguaje más «realista»: que, aunque equivalente al modo de hablar formal, puede encontrarse un poco más cercano del uso corriente.

En esta manera «realista» de expresarnos podemos decir que un enunciado singular (un enunciado básico) describe un *acontecimiento*. En lugar de hablar de enunciados básicos excluidos o prohibidos por una teoría, podemos decir que ésta excluye ciertos acontecimientos posibles, y que quedará falsada si tales acontecimientos posibles acontecen realmente.

Tal vez pueda criticarse el empleo de la vaga expresión «acontecimiento». Se ha dicho a veces [1] que sería menester que expresiones tales como «acontecimiento» o «evento» quedasen totalmente eliminadas de los debates epistemológicos, y que no deberíamos hablar de «acontecimientos», de «no acontecimientos» o de «acontecer» unos «eventos», sino —en lugar de todo ello— de la verdad o falsedad de

---

enunciado básico falsador; y, en general, dispondrá de medios para formarse una opinión mediante consulta de testigos, documentos, etc.: esto es, recurriendo a otros hechos contrastables intersubjetivamente y reproducibles. (Cf. los apartados 27 a 30.)

[1] Especialmente, por ciertos autores de trabajos sobre probabilidad; cf. Keynes, *A Treatise on Probability* (1921), pág. 5. Keynes dice que Ancillon fue el primero que propuso el «modo formalizado de expresión», y cita también a Boole, Czuber y Stumpf. * Aunque sigo pensando que las definiciones («sintácticas») de «*acontecimiento*» y de «*evento*» que doy a continuación son adecuadas *para lo que persigo*, ya no creo que lo sean intuitivamente: es decir, no creo que representen adecuadamente nuestro uso de estas palabras, o nuestra intención al emplearlas. Alfred Tarski fue quien me indicó (en París, en 1935) que se necesitaría una definición «semántica», en vez de «sintáctica».

enunciados. Pero, a pesar de ello, prefiero conservar la expresión «acontecimiento»; no ofrece dificultad definir su empleo de modo que no se le puede objetar nada: pues podemos usarla de modo que siempre que hablemos de un acontecimiento pudiésemos —en lugar suyo— hablar de algunos de los enunciados singulares que corresponden a él.

Cuando definimos «acontecimiento» hemos de recordar el hecho de que sería enteramente natural decir que dos enunciados singulares que son *lógicamente equivalentes* (es decir, mutuamente deductibles) describen el mismo acontecimiento. Lo cual sugiere la siguiente definición: Sea p_k un enunciado singular (el subíndice «k» se refiere a los nombres o coordenadas individuales que aparecen en p_k); llamaremos acontecimiento P_k a la clase de todos los enunciados que son equivalentes a p_k. Así, diremos que es un acontecimiento, por ejemplo, *que ahora truena aquí;* y podemos considerar a este acontecimiento como la clase de los enunciados «ahora truena aquí», «truena en el 13.° distrito de Viena el 10 de junio de 1933 a las 3,15 de la tarde», y todos los demás enunciados equivalentes a éstos. Puede considerarse que la formulación realista «el enunciado p_k representa el acontecimiento P_k» quiere decir lo mismo que el enunciado algo trivial «el enunciado p_k es un elemento de la clase P_k de todos los enunciados equivalentes a él»: análogamente, consideramos que el enunciado «el acontecimiento P_k ha acontecido» (o «está aconteciendo») tiene el mismo significado que «p_k y todos los enunciados equivalentes a él son verdaderos».

El propósito de estas reglas de traducción no es el de afirmar que todo el que emplea la palabra «acontecimiento» en el modo de hablar realista está pensando en una clase de enunciados, sino simplemente el de dar una interpretación de tal modo de hablar que haga inteligible lo que se quiere decir, por ejemplo, cuando se menciona que el acontecimiento P_k contradice a una teoría t. Semejante enunciado implicará ahora, sencillamente, que todo enunciado equivalente a p_k contradice a la teoría t, y es —por tanto— un posible falsador de ella.

Introducimos ahora otro término, el de «evento», para denotar lo que haya de *típico o universal* en un acontecimiento, o sea, lo que de un acontecimiento pueda describirse mediante nombres universales. (Así, pues, no entenderemos que evento [en ingl., *event*] sea un acontecimiento complejo, o quizá prolongado, pese a lo que pueda sugerir el uso ordinario de esta palabra). Definimos: Sean P_k, P_l, ... elementos de una clase de acontecimientos que difieran *únicamente* con respecto a los individuos (las posiciones o regiones espacio-temporales) afectados: llamamos a esta clase «el evento (P)». De acuerdo con esta definición, diremos, por ejemplo, del enunciado «acaba de volcarse aquí un vaso de agua», que la clase de los enunciados que son equivalentes a él forma un elemento del evento «volcar un vaso de agua».

En el modo realista de hablar puede decirse del enunciado singular p_k —que representa un acontecimiento P_k— que tal enunciado afirma que el evento (P) acontece en la posición espacio-temporal k.

Y admitimos que esto quiere decir lo mismo que: «la clase P_k de los enunciados singulares equivalentes a p_k es un elemento del evento (P)».

Aplicamos ahora esta terminología[2] a nuestro problema. Podemos decir de una teoría falsable que excluye o prohibe no solamente un acontecimiento, sino, *por lo menos, un evento.* De este modo, la clase de los enunciados básicos prohibidos (es decir, de los posibles falsadores de la teoría) contendrá siempre —si no es una clase vacía— un número ilimitado de enunciados básicos: pues una teoría no se refiere a individuos como tales. Podemos designar los enunciados básicos singulares que pertenecen a *un* evento con la palabra «homotípicos», con objeto de señalar la analogía entre enunciados *equivalentes* que describen *un* acontecimiento y enunciados *homotípicos* que describen un evento (típico). Entonces es posible decir que toda clase no vacía de posibles falsadores de una teoría contiene, al menos, una clase no vacía de enunciados básicos homotípicos.

Imaginemos ahora que representamos la clase de todos los enunciados básicos posibles por medio de una superficie limitada por una circunferencia; puede considerarse que este círculo representa algo así como la totalidad de *todos los mundos de experiencia posibles,* de todos los mundos empíricos posibles. Imaginemos además que cada evento esté representado por un radio (o, con mayor precisión, por un área muy estrecha —un sector muy estrecho— a lo largo de un radio), y que dos acontecimientos cualesquiera que se presenten dentro de las mismas coordenadas (o en los mismos individuos) estén situados a la misma distancia del centro, y, por tanto, sobre la misma circunferencia (concéntrica con la que delimita el área total). Podemos entonces dar una imagen de la falsabilidad mediante el requisito de que para toda teoría empírica exista en el diagrama, al menos, *un* radio (o un sector muy estrecho) prohibido por dicha teoría.

Esta imagen puede ser útil para el estudio de varios problemas que hemos de abordar [*1], entre ellos el del carácter metafísico de los enunciados puramente existenciales (a que nos hemos referido sucintamente en el apartado 15). No cabe duda de que a cada uno de estos enunciados corresponderá un evento (un radio) tal, que los distintos enunciados básicos pertenecientes a él verificarán el enunciado puramente existencial; pero la clase de sus posibles falsadores es una clase vacía, de modo que a partir de un enunciado existencial *no se sigue nada* acerca de los mundos de experiencia posibles (pues no

[2] Adviértase que aunque los enunciados singulares *representan* acontecimientos, los enunciados universales no representan eventos, sino que los *excluyen.* Análogamente a como ocurre con el concepto de «acontecimiento», puede definirse una «uniformidad» o «regularidad» diciendo que los enunciados universales *representan* uniformidades; pero aquí no necesitamos ningún concepto semejante, ya que nos interesa solamente lo que *excluyen* los enunciados universales; y, por esta razón, no nos ocupan las cuestiones acerca de si existen uniformidades («situaciones o estados» universales, etc.) o no. * Pero discutimos tales cuestiones en el apartado 79, y ahora, asimismo, en el apéndice *X, y en el apartado *15 de mi *Postscript.*

[*1] Emplearemos la misma imagen más adelante, especialmente en los apartados 31 y sigs.

excluye o prohibe ningún radio). El hecho de que, por el contrario, de todo enunciado básico se siga un enunciado puramente existencial no puede emplearse como argumento para defender el carácter empírico de este último: pues de todo enunciado básico se sigue también cualquier tautología (ya que se sigue de un enunciado arbitrario).

En este momento conviene quizá que diga unas palabras sobre los enunciados contradictorios.

Mientras que las tautologías, los enunciados puramente existenciales y otros enunciados no falsables afirman, como si dijéramos, *demasiado poco* acerca de la clase de los enunciados básicos posibles, los enunciados contradictorios afirman *demasiado*. A partir de un enunciado contradictorio puede deducirse válidamente cualquier enunciado *[2]; en consecuencia, la clase de sus posibles falsadores es idéntica a la de todos los enunciados básicos posibles: cualquier enunciado sirve para falsarlo. (Podría decirse tal vez que esta circunscia hace visible una ventaja de nuestro método, es decir, de que tengamos en cuenta los posibles falsadores en lugar de los posibles verificadores: pues si pudiese verificarse un enunciado verificando sus consecuencias lógicas —o si meramente se le hiciera probable de esta suerte—, sería de esperar que al aceptar un enunciado básico cualquiera resultase confirmado, o verificado, o, al menos, probable, todo enunciado contradictorio.)

---

*[2] Diez años después de la publicación de este libro seguía sin entenderse por muchos este hecho. Resumamos lo que ocurre del modo siguiente: un enunciado que es falso de hecho «implica materialmente» cualquier enunciado (pero no entraña lógicamente cualquier enunciado); mientras que un enunciado lógicamente falso implica —o entraña— lógicamente cualquier enunciado. Por tanto, es esencial distinguir claramente entre un enunciado que únicamente es *falso de hecho* (sintético) y otro que es *falso lógicamente*, o *incoherente*, o *contradictorio* —es decir, del cual pueda deducirse un enunciado de la forma $\bar{p}$.

Cabe hacer ver que un enunciado incoherente entraña todo enunciado como se indica a continuación.

A partir de las «proposiciones primitivas» de Russell obtenemos inmediatamente

(1) $$p \rightarrow (p \vee q)$$

y, además, sustituyendo primero «p» por «$\bar{p}$» y luego «$\bar{p} \vee q$» por «$p \rightarrow q$» llegamos a

(2) $$\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q),$$

que, por «importación», da

(3) $$\bar{p} \,.\, p \rightarrow q$$

Pero (3) nos permite deducir, empleando el *modus ponens*, *cualquier* enunciado q de un enunciado de la forma «$\bar{p} \,.\, p$» o «$p \,.\, \bar{p}$». (Véase también mi nota en *Mind* **52**, 1943, págs. 47 y sigs.) P. P. Wiener consideraba con razón (*The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. por P. A. Schilpp, 1944, pág. 246) como un hecho perfectamente conocido, que de un conjunto de premisas incompatible puede deducirse todo; y resulta bastante sorprendente que Russell, en su contestación a Wiener (*op. cit.*, págs. 695 y sig.), objetase a este hecho, hablando de «proposiciones *falsas*» donde Wiener había hablado de «premisas *incompatibles*».

24. Falsabilidad y coherencia

El requisito de la compatibilidad o coherencia desempeña un papel especial entre todos los que han de satisfacer los sistemas teóricos, o los sistemas axiomáticos. Puede considerársele la primera condición que ha de cumplir *todo* sistema teórico, ya sea empírico o no.

Para hacer ver la importancia fundamental de este requisito no basta mencionar el hecho evidente de que hay que rechazar cualquier sistema que sea contradictorio porque será «falso»: pues a menudo trabajamos con enunciados que, no obstante ser falsos en realidad, nos llevan a resultados apropiados para ciertos propósitos *[1]. (Tenemos un ejemplo en la aproximación de Nernst de la ecuación de equilibrio de los gases.) Caeremos en la cuenta de la importancia que tiene el requisito de coherencia si nos percatamos de que los sistemas contradictorios no nos proporcionan ninguna información, pues podemos deducir de ellos la conclusión que nos plazca; de modo que no se hace discriminación alguna en los enunciados —calificándolos, bien de incompatibles, bien de deductibles—, ya que todos son deductibles. En cambio, un sistema coherente divide el conjunto de todos los enunciados posibles en dos: los que le contradicen y los que son compatibles con él (entre estos últimos se encuentran las conclusiones que se pueden deducir del sistema). Es ésta la razón por la que la coherencia constituye el requisito más general que han de cumplir los sistemas, ya sean empíricos o no lo sean, para que puedan tener alguna utilidad.

Además de ser compatible, todo sistema empírico debe satisfacer otra condición: tiene que ser *falsable.* Estas dos restricciones impuestas a los sistemas producen efectos en gran medida análogos [1]: los enunciados que no satisfacen la condición de coherencia son incapaces de efectuar discriminación alguna entre dos enunciados cualesquiera (de la totalidad de todos los enunciados posibles); y los que no satisfacen la condición de falsabilidad no son capaces de efectuar discriminación entre dos enunciados cualesquiera que pertenezcan a la totalidad de todos los enunciados empíricos básicos posibles.

---

*[1] Cf. mi *Postscript*, apartado *3 (réplica a la «segunda propuesta») y apartado *12, punto 2).

[1] Cf. mi nota en *Erkenntnis* 3, 1933, pág. 426. *Reimpresa ahora en el apéndice *I.

El problema de la base empírica

Hemos reducido la cuestión de la falsabilidad de las teorías a la de la falsabilidad de los enunciados singulares que he llamado enunciados básicos. Pero éstos, ¿qué tipo de enunciados singulares constituyen? Y, ¿cómo pueden ser falsados? Estos interrogantes pueden afectar poco al investigador práctico, pero la obscuridad y las opiniones erróneas que circundan este problema hacen aconsejable que se lo discuta aquí con algún pormenor.

25. Las experiencias perceptivas como base empírica: el psicologismo

Muchos aceptan como fuera de toda duda la doctrina de que las ciencias empíricas pueden reducirse a percepciones sensoriales, y, por tanto, a nuestras experiencias. A pesar de ello, la suerte de esta doctrina está ligada a la de la lógica inductiva, y en la presente obra la rechazamos juntamente con ésta. No pretendo negar que hay algo de verdad en la opinión de que las matemáticas y la lógica se basan en el pensamiento, mientras que las ciencias de hechos lo hacen en las percepciones de los sentidos; pero este grano de verdad apenas pesa en el problema epistemológico. Mas, por otra parte, difícilmente se encontrará un problema de la epistemología que haya sufrido más a consecuencia de la confusión de la psicología con la lógica que el que nos ocupa ahora: el de la base de los enunciados de experiencia.

Pocos pensadores se han preocupado tan profundamente por el problema de la base experimental como Fries[1]. Este decía que, si es que no hemos de aceptar *dogmáticamente* los enunciados de la ciencia, tenemos que ser capaces de *justificarlos;* si exigimos que la justificación se realice por una argumentación razonada, en el sentido lógico de esta expresión, vamos a parar a la tesis de que *los enunciados sólo pueden justificarse por medio de enunciados;* por tanto, la petición de que *todos* los enunciados estén justificados lógicamente (a la que Fries llamaba la «predilección por las demostraciones») nos lleva forzosamente a una *regresión infinita.* Ahora bien; si queremos evitar tanto el peligro de dogmatismo como el de una regresión infinita, parece que sólo podemos recurrir al *psicologismo;* esto es, a la doctrina de que los enunciados no solamente pueden justificarse por medio de enunciados, sino también por la experiencia perceptiva. Al

[1] J. F. Fries, *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft* (1828 a 1831).

encontrarse frente a este *trilema* —o dogmatismo o regresión infinita, o psicologismo—, Fries (y con él casi todos los epistemólogos que querían dar razón de nuestro conocimiento empírico) optaba por el psicologismo: según su doctrina, en la experiencia sensorial tenemos un «conocimiento inmediato» [2] con el cual podemos justificar nuestro «conocimiento mediato» (es decir. el conocimiento expresado en el simbolismo de un lenguaje); y este último incluye, desde luego, los enunciados de la ciencia.

Ordinariamente no se lleva tan lejos el análisis de este problema. En las epistemologías del sensualismo y del positivismo se supone, sin más, que los enunciados científicos empíricos «hablan de nuestras experiencias» [3]: pues, ¿cómo podríamos haber llegado a ningún conocimiento de hechos si no fuera a través de la percepción sensorial?; la mera lucubración no puede hacer que nadie aumente una jota su conocimiento del mundo de los hechos, y, por tanto, la experiencia sensorial ha de ser la única «fuente de conocimiento» de todas las ciencias empíricas. Así pues, todo lo que sabemos acerca del mundo de los hechos tiene que poderse expresar en forma de enunciados *acerca de nuestras experiencias;* sólo consultando nuestra experiencia sensorial puede saberse si esta mesa es roja o azul. Por el sentimiento inmediato de convicción que lleva consigo podemos distinguir el enunciado verdadero —aquél que está de acuerdo con la experiencia— del falso —que no lo está—. La ciencia no es más que un intento de clasificar y describir este conocimiento perceptivo, estas experiencias inmediatas de cuya verdad no podemos dudar: *es la presentación sistemática de nuestras convicciones inmediatas.*

En mi opinión, esta doctrina se va a pique con los problemas de la inducción y de los universales: pues no es posible proponer un enunciado científico que no trasciendo lo que podemos saber con certeza «basándonos en nuestra experiencia inmediata» (hecho al que nos referiremos con la expresión «la trascendencia inherente a cualquier descripción» —es decir, a cualesquiera enunciados descriptivos—): todo enunciado descriptivo emplea nombres (o símbolos, o ideas) *universales,* y tiene el carácter de una teoría, de una hipótesis. No es posible verificar el enunciado «aquí hay un vaso de agua» por ninguna experiencia con carácter de observación, por la mera razón de que los *universales* que aparecen en aquél no pueden ser coordinados a ninguna experiencia sensorial concreta (toda «experiencia inmediata» está «dada inmediatamente» *una sola vez,* es única); con la palabra «vaso», por ejemplo, denotamos los cuerpos físicos que presentan cierto *comportamiento legal,* y lo mismo ocurre con la palabra «agua». Los universales no pueden ser reducidos a clases de experiencias, no pueden ser constituidos [4].

---

[2] Cf., por ejemplo, J. KRAFT, *Von Husserl zu Heidegger* (1932), págs. 102 y sig. (*2.ª ed., 1957, págs. 108 y sig.).

[3] Sigo aquí casi palabra por palabra las exposiciones de P. Frank (cf. el apartado 27, nota 4) y H. Hahn (cf. el apartado 27, nota 1).

[4] Cf. la nota 2 del apartado 20, y el texto correspondiente. *«Constituidos» es un término de Carnap.

26. ACERCA DE LAS LLAMADAS «CLÁUSULAS PROTOCOLARIAS»

La tesis que yo llamo «psicologismo», de que me he ocupado en el apartado anterior, subyace —según me parece— a cierta moderna teoría de la base empírica, aun cuando los defensores de esta teoría no hablan de experiencias ni de percepciones, sino de «cláusulas» [en ingl., *sentences*] —cláusulas que representan experiencias, y a las que Neurath [1] y Carnap [2] llaman *cláusulas protocolarias*.

Reininger había mantenido ya una teoría parecida. Su punto de partida lo constituía la pregunta: ¿en qué reside la correspondencia o acuerdo entre el enunciado de un hecho y la situación descrita por él?; y llegó a la conclusión de que los enunciados solamente pueden compararse con enunciados. Según esta tesis, la correspondencia existente entre un enunciado y un hecho no es más que una correspondencia lógica entre enunciados correspondientes a niveles de universalidad diferentes: es [3] «... la correspondencia entre enunciados de elevado nivel y otros de análogo contenido, y, finalmente, con enunciados que registran experiencias» (Reininger llama, a veces, a estos últimos, «enunciados elementales» [4]).

Carnap parte de una cuestión algo diferente: su tesis es que todas las investigaciones filosóficas hablan «de las formas de hablar» [5]. La lógica de la ciencia ha de investigar «las formas del lenguaje científico» [6]: no habla de «objetos» (físicos), sino de palabras; no de hechos, sino de cláusulas. Con lo cual Carnap contrapone el «*modo formalizado* (correcto) *de hablar*» al modo ordinario, al que llama «modo material de hablar»; si se quiere evitar toda confusión debe emplearse este último solamente en los casos en que sea posible traducirlo al modo formalizado.

Ahora bien; este modo de ver las cosas —al cual puedo avenirme— lleva a Carnap (y, asimismo, a Reininger) a afirmar que en la lógica de la ciencia no debemos decir que las cláusulas se someten a contraste comparándolas con las situaciones o con las experiencias: sólo nos cabe decir que pueden contrastarse comparándolas con otras *cláusulas*. Con todo, en realidad, Carnap conserva las ideas fundamentales de la manera psicologista de abordar este problema: lo único que hace es traducirlas al «modo formalizado de hablar». Dice que las cláusulas de la ciencia se contrastan «valiéndose de cláusulas protocolarias» [7]; pero como caracteriza a éstas diciendo que son enunciados o cláusulas «que no necesitan confirmación, sino que sirven de

---

[1] El término se debe a Neurath; cf. por ejemplo, *Soziologie, Erkenntnis* **2**, 1932, página 393.

[2] CARNAP, *Erkenntnis* **2**, 1932, págs. 432 y sigs.; *ibíd.* **3** (1932), págs. 107 y siguientes.

[3] R. REININGER, *Metaphysik der Wirklichkeit* (1931), pág. 134.

[4] REININGER, *op. cit.*, pág. 132.

[5] CARNAP, *Erkenntnis* **2**, 1932, pág. 435, «*These der Metalogik*».

[6] CARNAP, *ibíd.* **3**, 1933, pág. 228.

[7] CARNAP, *ibíd.*, **2**, 1932, pág. 437.

base para todos los demás enunciados de la ciencia», esto equivale a decir —en el modo ordinario, «material», de hablar— que las cláusulas protocolarias se refieren a lo «dado», a los «datos sensoriales»: describen (según Carnap mismo lo expresa) «los contenidos de la experiencia inmediata, o fenómenos; y, por tanto, los hechos cognoscibles más simples» [8]. Lo cual hace ver con suficiente claridad que la teoría de las cláusulas protocolarias no es sino psicologismo traducido al modo formalizado de hablar. Lo mismo es aplicable, en gran medida, a la tesis de Neurath [9]; éste pide que en toda cláusula protocolaria aparezca, juntamente con las palabras «percibe», «ve» y otras análogas, el nombre del autor de aquélla: pues, como indica su nombre, las cláusulas protocolarias deberían ser *registros o protocolos de observaciones inmediatas o percepciones.*

Del mismo modo que Reininger [10], Neurath sostiene que los enunciados de contenido perceptivo que registran experiencias —esto es, las «cláusulas protocolarias»— no son irrevocables, sino que, en ocasiones, pueden ser desechadas: se opone [11] a la opinión de Carnap (que luego este mismo ha modificado [12]) de que las cláusulas protocolarias tengan carácter de últimas y *no necesiten confirmación.* Pero mientras Reininger expone un método para contrastar sus enunciados «elementales», en caso de duda, por medio de otros enunciados (método que consiste en deducir y en contrastar conclusiones), Neurath no obra de este modo: hace notar solamente que podemos, bien «borrar» una cláusula protocolaria que contradiga a un sistema, «... bien aceptarla, y modificar el sistema de tal manera que, con la cláusula añadida, continúe siendo coherente».

La tesis de Neurath según la cual las cláusulas protocolarias no son inviolables representa, en mi opinión, un notable adelanto. Pero si dejamos a un lado la sustitución de las percepciones por los enunciados de percepciones (que es meramente una traducción de lo anterior en el modo formalizado de hablar), su único progreso respecto de la teoría —debida a Fries— de la inmediatez del conocimiento perceptivo consiste en la doctrina de que las cláusulas protocolarias pueden ser revisadas; se trata de un paso en la dirección debida, pero no lleva a ninguna parte si no le sigue otro paso: pues necesitamos un conjunto de reglas que limite la arbitrariedad en el «borrar» (o bien el «admitir») cláusulas protocolarias. Neurath omite toda regla en este sentido, y con ello, sin pensarlo, echa por la borda el empirismo: pues sin tales reglas ya no es posible discriminar entre los

---

8 CARNAP, *ibid.*, pág. 438.

9 NEURATH, *Erkenntnis* 3, 1933, págs. 205 y sigs. Este autor da el siguiente ejemplo: «Un enunciado protocolario completo podría ser del tenor siguiente: {Protocolo de Otto a las 3 h y 17 min [a las 3 h y 16 min, el pensamiento lingüístico de Otto ha sido: (a las 3 h y 15 min, en la habitación había una mesa que era observada por Otto)]}».

10 REININGER, *op. cit.*, pág. 133.

11 NEURATH, *op. cit.*, págs. 209 y sigs.

12 CARNAP, *Erkenntnis* 3, 1933, págs. 215 y sigs.; cf. la nota 1 del apartado 29

enunciados empíricos y cualesquiera otros. Todo sistema se convierte en defendible si está permitido (y, según la opinión de Neurath, a todo el mundo le está permitido) «borrar» simplemente una cláusula protocolaria que cause incomodidades: de esta forma no sólo podría rescatarse cualquier sistema, como ocurre en el convencionalismo, sino que, disponiendo de una buena reserva de cláusulas protocolarias, podría incluso confirmársele con el testimonio de testigos que certificaran, o protocolaran, lo que habían visto y oído. Neurath evita una forma de dogmatismo, pero prepara el camino por el que cualquier sistema arbitrario puede erigirse en «ciencia empírica».

Por tanto, no es fácil ver el papel que desempeñarían las cláusulas protocolarias en la construcción de Neurath. Según la tesis antigua de Carnap, el sistema de cláusulas protocolarias era la piedra de toque con la cual había que juzgar toda aserción de la ciencia empírica: y, por ello, tenían que ser «irrefutables», ya que solamente ellas podían derogar cláusulas (que no fuesen, a su vez, cláusulas protocolarias, naturalmente). Pero si se las quita esta función, si ellas mismas son susceptibles de derogación por medio de teorías, ¿para qué sirven? Puesto que Neurath no trata de resolver el problema de la demarcación, parece que su idea de las cláusulas protocolarias no es más que una reliquia, un recuerdo que sobrevive de la opinión tradicional de que la ciencia empírica comienza a partir de la percepción.

27. La objetividad de la base empírica

Propongo una perspectiva de la ciencia que es ligeramente diferente de la propugnada por las diversas escuelas psicologistas: querría *distinguir netamente entre ciencia objetiva, por una parte, y «nuestro conocimiento», por otra.*

Estoy dispuesto a admitir que solamente la observación puede proporcionarnos un «conocimiento acerca de hechos», y que (como dice Hahn) «solamente nos percatamos de los hechos por la observación» [1]; pero este percatarnos, este conocimiento nuestro, no justifica o fundamenta la verdad de ningún enunciado. Por tanto, no creo que la cuestión que la epistemología haya de plantear sea «... ¿en qué se apoya nuestro *conocimiento?*... o —con más exactitud—, si he tenido la *experiencia* S, ¿cómo puedo justificar mi descripción de ella y defenderla frente a las dudas?» [2]. Estas preguntas no serán pertinentes, incluso si remplazamos el término «experiencia» por el de «cláusula protocolaria»: en mi opinión, lo que la epistemología ha de preguntar más bien es: ¿cómo contrastamos los enunciados científicos por medio de sus consecuencias deductivas? [*1]; y, *¿qué tipo* de conse-

[1] H. Hahn, *Logik, Mathematik und Naturerkennen*, en *Einheitswissenschaft* **2**, 1933, págs. 19 y 24.

[2] Cf. Carnap, por ejemplo, en *Scheinprobleme in der Philosophie* (1928), página 15 (sin cursivas en el original).

[*1] Actualmente yo formularía esta pregunta del siguiente modo: ¿Cómo *criticamos* del mejor modo posible nuestras teorías (o nuestras hipótesis, o conjeturas),

cuencias podemos escoger para este propósito si es que, a su vez, tienen que ser contrastables intersubjetivamente?

Actualmente está muy generalizada la aceptación de esta forma de consideración objetiva, no psicológica, pero en lo que se refiere a enunciados lógicos o tautológicos. Mas no hace mucho tiempo que se mantenía que la lógica era una ciencia que se ocupaba de los procesos mentales y de sus leyes (las leyes de nuestro pensamiento); desde este punto de vista no cabía encontrar otra justificación a la lógica que el supuesto hecho de que simplemente no podíamos pensar de otro modo: parecía que una inferencia lógica quedaba justificada porque se la experimentaba como una necesidad del pensamiento, como un sentimiento de compulsión a pensar de un modo determinado. En el campo de la lógica, esta clase de psicologismo pertenece ya, tal vez, al pasado; a nadie se le ocurriría justificar la validez de una inferencia lógica —o defenderla frente a las dudas— escribiendo al margen la siguiente cláusula protocolaria: «Protocolo: al revisar hoy esta cadena de inferencias he experimentado un agudísimo sentimiento de convicción».

La situación es muy diferente cuando nos volvemos a *los enunciados empíricos de la ciencia:* aquí, todo el mundo cree que están fundamentados en experiencias del tipo de las percepciones (en el modo formalizado de hablar, en cláusulas protocolarias). Casi todos considerarían como un caso de psicologismo el intento de basar los enunciados lógicos en cláusulas protocolarias; mas es curioso que, en lo que se refiere a los enunciados empíricos, nos encontramos hoy con idéntico tipo de pretensión con el nombre de «fisicismo». Ahora bien; ya se trate de enunciados de la lógica o de la ciencia empírica, pienso que la situación es la misma: nuestro *conocimiento,* que cabe describir vagamente como un sistema de *disposiciones,* y que tal vez sea materia de estudio de la psicología, puede estar unido a sentimientos de creencia o de convicción: quizá en un caso al sentimiento de estar compelido a pensar de una manera determinada, y en el otro al de «certidumbre perceptiva». Pero todo esto interesa solamente al psicólogo: no roza siquiera los únicos problemas que interesan al epistemólogo, como son los de las conexiones lógicas existentes entre los enunciados científicos.

(Está muy extendida la creencia de que el enunciado «veo que esta mesa es blanca» posee una ventaja radical —desde el punto de vista epistemológico— sobre este otro: «esta mesa es blanca». Pero con la mira puesta en la evaluación de sus posibles contrastaciones objetivas, el primer enunciado, que habla de mí, no parece más seguro que el segundo, que habla de la mesa que está aquí.)

Existe sólo un camino para asegurarse de la validez de una cadena de razonamientos lógicos, y es el de ponerla en la forma más fácil de contrastar: la descomponemos en muchos pasos pequeños y suce-

---

en lugar de defenderlas contra las dudas? Naturalmente, siempre he pensado que *contrastar* era un modo de *criticar.* (Cf. mi *Postscript,* apartado *7 —texto comprendido entre las llamadas de las notas 5 y 6— y final del apartado *52.)

sivos, cada uno de los cuales sea fácilmente comprobable por quienquiera esté impuesto en la técnica lógica o matemática de transformar cláusulas; si después de hecho esto alguien sigue planteando dudas, lo único que podemos hacer es pedirle que señale un error en algún paso de la demostración o que vuelva a estudiarla de nuevo. En el caso de las ciencias empíricas la situación es poco más o menos la misma. Cualquier enunciado científico empírico puede ser presentado (especificando los dispositivos experimentales, etc.) de modo que quienquiera esté impuesto en la técnica pertinente pueda contrastarlo; si como resultado de la contrastación rechaza el enunciado, no quedaremos satisfechos en caso de que nos hable de sus sentimientos de duda, o de los de convicción que alberga con respecto a sus percepciones: lo que tiene que hacer es formular una aserción que contradiga la nuestra, y darnos instrucciones para contrastarla; dado que no sea capaz de hacer tal cosa, lo único que podemos hacer es pedirle que vuelva a considerar —quizá con más atención— nuestro experimento, y que piense de nuevo.

Una afirmación que no sea contrastable, debido a su forma lógica, sólo puede actuar en la ciencia, en el mejor de los casos, como estímulo: sugiriendo un problema. En el campo de la lógica y las matemáticas tenemos un ejemplo de esta influencia con el problema de Fermat, y en el de la historia natural —digamos— con las referencias sobre serpientes marinas; en tales casos, la ciencia no dice que los datos estén desprovistos de fundamento; por ejemplo, que Fermat estuviera en un error o que todas las informaciones en que se pretenda haber observado serpientes marinas sean mentira: simplemente suspende el juicio [3].

A la ciencia puede considerársela desde diversos puntos de vista, no solamente desde el de la epistemología: así, la podemos mirar como un fenómeno biológico o sociológico; y, en este caso, se la puede describir como una herramienta, un aparato tal vez comparable a los de nuestra maquinaria industrial. Cabe fijarse en ella como medio de producción: como la última palabra en la «producción en rodeo» [4]; incluso desde este punto de vista, la ciencia no se encuentra más ligada a «nuestra experiencia» que otro aparato o medio de producción cualquiera. Hasta podemos apreciarla como algo que sirve para satisfacer nuestras necesidades intelectuales: tampoco de esta forma difiere nada —en principio— su conexión con nuestra experiencia de la que tiene otra estructura objetiva cualquiera. Sin duda, no es inexacto decir que la ciencia es «... un instrumento» cuya finalidad es «... predecir experiencias futuras a partir de otras inmediatas o dadas, e incluso gobernar aquéllas hasta donde sea posible» [5]. Pero no creo que todo este hablar de experiencias contribuya a acla-

[3] Cf. la observación sobre los «efectos ocultos» en el apartado 8.

[4] La expresión es de Böhm-Bawerk *(«Produktionsumweg»)*.

[5] P. Frank, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1932), pág. 1. *En lo que se refiere al instrumentalismo, véase la nota *1 del apartado 12 y mi *Postscript*, especialmente los apartados *12 a *15.

rar la situación: apenas está más justificado, diríamos, que caracterizar la torre de un pozo petrolífero diciendo que su finalidad consiste en proporcionarnos ciertas experiencias: no petróleo, sino la vista y el olor del petróleo; no dinero, sino más bien la sensación de tener dinero.

28. Los enunciados básicos

Se ha indicado ya sucintamente qué papel desempeñan los enunciados básicos en la teoría epistemológica que yo defiendo. Los necesitamos para decidir si a una teoría ha de llamársele falsable, esto es, empírica (cf. el apartado 21), así como para corroborar las hipótesis falsadoras y, por tanto, para falsar teorías (cf. el apartado 22).

Por consiguiente, los enunciados básicos tienen que satisfacer las siguientes condiciones: *a)* no se podrá deducir enunciado básico alguno a partir de un enunciado universal no acompañado de condiciones iniciales [*1]; y *b)* un enunciado universal y un enunciado básico

---

[*1] Cuando escribí estas palabras me parecía suficientemente claro que a partir de la teoría de Newton sola —sin condiciones iniciales— no se puede deducir nada que tenga la índole de un enunciado de observación (y, por tanto, desde luego, ningún enunciado básico). Desgraciadamente, se ha dado el caso de que algunos críticos de mi libro no han valorado este hecho, como tampoco sus consecuencias para el problema de los enunciados de observación o «enunciados básicos». Añadiré, pues, unos comentarios.

En primer lugar, de ningún enunciado total puro —digamos, «todos los cisnes son blancos»— se sigue nada observable. Esto es obvio si consideramos el hecho de que «todos los cisnes son blancos» y «todos los cisnes son negros» no se contradicen, sino que meramente implican que no hay cisnes: lo cual, sin duda, no es un enunciado de observación, ni siquiera uno que pueda ser «verificado». (Incidentalmente añadiremos que un enunciado unilateralmente falsable como «todos los cisnes son blancos» tiene la misma forma lógica que «no hay cisnes», ya que es equivalente a «no hay cisnes no blancos».)

Ahora bien; si esto se admite se verá inmediatamente que los enunciados singulares que *puedan* deducirse de enunciados puramente universales no pueden ser enunciados básicos. Me estoy refiriendo a los que tienen la forma «si hay un cisne en el lugar *k*, entonces hay un cisne blanco en el lugar *k*» (o bien, «en *k*, o bien no hay ningún cisne o hay un cisne blanco»): nos damos cuenta inmediatamente de que estos «enunciados ejemplificadores» (como podría llamárselos) no son enunciados básicos, ya que *no pueden desempeñar el papel de enunciados de contraste* (o sea, de posibles falsadores), que es justamente el que han de desempeñar los enunciados básicos. Si aceptásemos los enunciados ejemplificadores como enunciados de contraste, obtendríamos para toda teoría (y, por ello, para «todos los cisnes son blancos» y para «todos los cisnes son negros») un número aplastante de verificaciones —en realidad, un número infinito si aceptamos el hecho de que la inmensa mayoría del mundo está desprovista de cisnes.

Puesto que los «enunciados ejemplificadores» son deductibles de enunciados universales, sus negaciones tienen que ser posibles falsadores, y, por tanto, *es posible* que sean enunciados básicos (si se satisfacen las condiciones que se exponen más adelante en el texto); y viceversa, los enunciados ejemplificadores tendrán, pues, la forma de enunciados básicos negados (véase también la nota *5 del apartado 80). Es interesante advertir que los enunciados básicos (que tienen excesiva fuerza para ser deductibles de leyes universales solas) han de tener mayor contenido informativo que sus han de poder contradecirse mutuamente. La condición *b)* puede satisfacerse únicamente si es posible deducir la negación de un enunciado básico de una teoría a la que éste contradiga; y a partir de esta condición y de la *a)* se sigue que todo enunciado básico debe tener una forma lógica tal que su negación no pueda ser, a su vez, un enunciado básico.

Nos hemos tropezado ya con enunciados cuya forma lógica es diferente de la que tienen sus negaciones; son los enunciados universales y los existenciales: unos son negación de los otros, y difieren en su forma lógica. Es posible construir enunciados *singulares* de modo parecido. Así, cabe decir que el enunciado «hay un cuervo en la región espacio-temporal *k*» tiene diversa forma lógica —y no sólo distinta forma lingüística— que este otro: «no hay ningún cuervo en la región espacio-temporal *k*». Podemos llamar «enunciado existencial *singular*», o «enunciado de 'hay' *singular*» a todo enunciado de la forma, «hay tal y cual cosa en la región *k*», o de la forma «tal y cual evento acontece en la región *k*» (cf. el apartado 23); y podríamos llamar «enunciado inexistencial *singular*» o «enunciado de 'no hay' *singular*» a todo enunciado que se obtenga al negar uno de aquéllos, es decir, a cualquiera de la forma «no hay tal y cual cosa en la región *k*» o de la forma «ningún evento de tal y cual tipo acontece en la región *k*».

Podemos establecer ahora la siguiente regla: *los enunciados básicos tienen la forma de enunciados existenciales singulares.* Esto quiere decir que dichos enunciados satisfarán la condición *a)*, ya que no es posible deducir un enunciado existencial singular de uno estrictamente universal, esto es, de un enunciado inexistencial estricto; también han de satisfacer la condición *b)*, como puede advertirse teniendo en cuenta que, a partir de todo enunciado existencial singular, se puede deducir otro puramente existencial sin más que omitir la referencia a una región espacio-temporal individual, y que —como hemos visto— todo enunciado puramente existencial es muy capaz de contradecir a una teoría.

Conviene observar que la conyunción de dos enunciados básicos, *d* y *r*, que no se contradigan mutuamente, es, a su vez, un enunciado básico. A veces, podemos incluso obtener un enunciado básico por adjunción de un enunciado de este tipo y otro que no lo sea: por ejemplo, podemos formar la conyunción del enunciado básico *r*, «hay una aguja indicadora en el lugar *k*», con el enunciado inexistencial singular $\bar{p}$, «no hay ninguna aguja indicadora en movimiento en el lugar *k*»: pues es evidente que la conyunción $r \,.\, \bar{p}$(«*r* y *no p*») de estos dos enunciados equivale al enunciado existencial singular «hay una aguja indicadora en reposo en el lugar *k*». Como consecuencia, si se

---

negaciones ejemplificadoras; lo cual quiere decir que *el contenido de los enunciados básicos excede de su probabilidad lógica* (puesto que tiene que exceder de 1/2).

Estas eran algunas de las consideraciones subyacentes a mi teoría de la forma lógica de los enunciados básicos. (Véase también el apartado *43 de mi *Postscritp.)*

7

nos dan la teoría t y las condiciones iniciales r —tales que de una y otras se deduzca la predicción p—, entonces el enunciado $r.\bar{p}$ será un falsador de la teoría, y, por tanto, un enunciado básico. (Por otra parte, el enunciado condicional «$r \rightarrow p$», o sea, «si r entonces p», carece del carácter de básico tanto como la negación $\bar{p}$, ya que es equivalente a la negación de un enunciado básico: a saber, a la negación de $r.\bar{p}$.)

Estos son los requisitos formales de los enunciados básicos, y los satisfacen todos los enunciados existenciales singulares. Además de ellos, todo enunciado básico tiene que cumplir también un requisito material (un requisito referente al evento que —según nos dice el enunciado básico— está ocurriendo en el lugar k): el evento ha de ser «*observable*», es decir, se requiere que los enunciados básicos sean contrastables intersubjetivamente por «observación»; puesto que estos enunciados son singulares, esta condición sólo puede referirse a observadores convenientemente situados en el espacio y el tiempo (detalle en que no voy a entrar).

Sin duda, parecerá que al exigir la observabilidad he terminado por permitir que el psicologismo se deslice suavemente en el interior de mi teoría. Pero no es así. Desde luego, cabe interpretar el concepto de *evento observable* en sentido psicologista; pero yo lo estoy empleando en un sentido tal que se le podría remplazar perfectamente por «un evento que concierne la posición y el movimiento de cuerpos físicos macroscópicos»; o bien podemos —con mayor precisión— establecer que todo enunciado básico, bien ha de ser un enunciado acerca de posiciones relativas de cuerpos físicos, bien será equivalente a cierto enunciado básico de este tipo «mecánico» o «materialista». (El hecho de que una teoría que sea contrastable intersubjetivamente será también contrastable intersensorialmente [1] es lo que permite estipular esta condición: pues tal hecho quiere decir que las contrastaciones en que intervenga la percepción por medio de uno de nuestros sentidos pueden ser remplazadas, en principio, por otras en que intervengan otros sentidos.) Así pues, la acusación de que al apelar a la observabilidad he vuelto a admitir subrepticiamente el psicologismo no tendrá mayor peso que la de que he admitido el mecanicismo o el materialismo; lo cual hace ver que mi teoría es, en realidad, bastante neutral, y que no debería colgársele ninguno de estos rótulos. Digo todo esto exclusivamente para salvar al término «observable» —tal y como yo lo empleo— del estigma de psicologismo. (Las observaciones y las percepciones pueden ser psicológicas, pero la observabilidad no lo es.) No tengo intención de *definir* el término «observable», o «evento observable», aunque estoy dispuesto a elucidarlo por medio de ejemplos psicológicos y mecánicos; creo que debería introducirse como término no definido que adquiere suficiente precisión en su uso: es decir, como un concepto primitivo cuyo empleo ha de aprender el epistemólogo, lo mismo que tiene que aprender el del término «sím-

---

[1] Carnap, *Erkenntnis* 2, 1932, pág. 445.

bolo», o que el físico ha de hacer lo mismo con el término «punto-masa»).

Los enunciados básicos son, por tanto, en el modo material de hablar, enunciados que afirman que un evento observable acontece en una región individual del espacio y el tiempo. En el apartado 23 hemos expuesto con mayor precisión el significado de los diversos términos que entran en esta definición, salvo el del término primitivo «observable», que ha quedado sin definir; pero éste puede explicarse también de un modo bastante preciso, como acabamos de ver.

29. La relatividad de los enunciados básicos. Solución del trilema de Fries

Siempre que una teoría se someta a contraste, ya resulte de él su corroboración o su falsación, el proceso tiene que detenerse en algún enunciado básico que *decidamos aceptar:* si no llegamos a decisión alguna a este respecto, y no aceptamos, por tanto, un enunciado básico, sea el que sea, la contrastación no lleva a ninguna parte. Pero considerando la cosa desde un punto de vista lógico, nunca la situación es tal que nos fuerce a hacer alto en este enunciado básico concreto en lugar de en aquel otro, o bien a abandonar enteramente la contrastación. Pues todo enunciado básico puede ser sometido a contraste, a su vez, utilizando como piedra de toque cualquiera de los enunciados básicos que puedan deducirse de él valiéndose de una teoría, bien sea la que se está contrastando u otra cualquiera: proceso que no tiene un final provinente de su propia naturaleza[1]. Así pues, si es que la contrastación ha de llevarnos a algún resultado, no queda otra opción que detenernos en un punto u otro y decir que estamos satisfechos por el momento.

Es fácil advertir que, de este modo, llegamos a un procedimiento que nos hace pararnos precisamente en un tipo de enunciados que sea particularmente fácil de contrastar; pues lo que hemos dicho significa que nos detenemos a la altura de unos enunciados acerca de cuya aceptación o rechazo es probable que los investigadores se pongan de acuerdo: si éste no se logra, continuarán simplemente la contrastación, o bien empezarán de nuevo a realizarla desde el principio; y si tampoco conduce a ningún resultado este nuevo proceso, podre-

---

[1] Carnap, *Erkenntnis* 3, 1932, pág. 224. Puedo aceptar esta exposición que hace Carnap de mi teoría, salvo en unos pocos detalles sin gran importancia. Estos son: primero, la sugerencia de que los enunciados básicos (que Carnap llama «enunciados protocolarios») sean los puntos de partida sobre los que se edifique la ciencia; en segundo término, la observación (pág. 225) de que un enunciado protocolario pueda ser confirmado «con tal y cual grado de certeza»; y, en tercer lugar, que los «enunciados acerca de percepciones» constituyan «eslabones tan válidos como los demás de la cadena», y que a ellos precisamente «apelemos en los casos críticos». Cf. la cita que se hace en el texto que remite a la próxima nota. Quiero aprovechar esta ocasión para dar las gracias al profesor Carnap por las amables palabras que dedica en el lugar citado a mi obra, entonces aún no publicada.

mos decir tal vez que los enunciados en cuestión no eran contrastables intersubjetivamente, o que, a fin de cuentas, estábamos ocupándonos con eventos que no eran observables. Si un día ya no fuese posible lograr que los investigadores se pusieran de acuerdo acerca de un enunciado básico, esto equivaldría a un fracaso del lenguaje como medio de comunicación universal: equivaldría a una «confusión de las lenguas» en la torre de Babel, y los descubrimientos científicos quedarían reducidos al absurdo; en esta renovada Babel, el imponente edificio de la ciencia pronto quedaría reducido a unas ruinas.

Exactamente del mismo modo que una demostración lógica ha tomado forma satisfactoria cuando se ha superado la labor dificultosa y todo puede comprobarse con facilidad, después de que la ciencia ha llevado a cabo su tarea de deducción o de explicación nos detenemos al llegar a enunciados básicos fácilmente contrastables. Pero los enunciados acerca de experiencias personales —esto es, las cláusulas protocolarias— sin duda *no* son de este tipo, y, por ello, son poco apropiadas para servir de enunciados en los cuales pararnos. Desde luego, utilizamos registros o protocolos, tales como certificados de contrastaciones emitidos por departamentos de investigación científica o industrial; pero siempre pueden ser sometidos otra vez a examen si surge la necesidad de ello. Así, puede ser necesario, por ejemplo, contrastar los tiempos de reacción de los peritos que ejecutan las contrastaciones (es decir, determinar sus ecuaciones personales). Pero, en general —y, especialmente, «...en casos diacríticos»—, nos detenemos en enunciados fácilmente contrastables, y *no* —como recomienda Carnap— en cláusulas de percepción o protocolarias: o sea, *no* «...nos detenemos precisamente en éstas... porque la contrastación intersubjetiva de enunciados acerca de percepciones... es relativamente complicada y difícil» [2].

¿Qué postura adoptamos ahora en lo que se refiere al trilema de Fries, o sea, a la elección entre el dogmatismo, la regresión infinita y el psicologismo? (Cf. el apartado 25.) Hay que reconocer que los enunciados básicos en los que nos detenemos, que decidimos aceptar como satisfactorios y suficientemente contrastados, tienen el carácter de *dogmas;* pero únicamente en la medida en que desistamos de justificarlos por medio de otros argumentos (o de otras contrastaciones). Mas este tipo de dogmatismo es innocuo, ya que en cuanto tengamos necesidad de ello podemos continuar contrastando fácilmente dichos enunciados. Admito que de esta suerte la cadena deductiva es, en principio, infinita; sin embargo, este tipo de «*regresión infinita*» también es innocuo, ya que en nuestra teoría no se pretende probar ningún enunciado por medio de ella. Y, finalmente, en lo que respecta al *psicologismo:* admito también que la decisión de aceptar un enunciado básico y darse por satisfecho con él tiene una conexión causal con nuestras experiencias, especialmente con nuestras *experiencias*

---

[2] Cf. la nota anterior. * Este trabajo de Carnap contenía la primera exposición que se publicó de mi teoría de las contrastaciones; y en dicho trabajo se me atribuía erróneamente la opinión que acabamos de citar.

perceptivas; pero no tratamos de *justificar* los enunciados básicos por medio de ellas: las experiencias pueden *motivar una decisión*, y, en consecuencia, la adopción o el rechazo de un enunciado, pero ningún enunciado básico puede quedar *justificado* por ellas —del mismo modo que no lo quedará por los puñetazos que demos en la mesa [8].

30. Teoría y experimento

Los enunciados básicos se aceptan como resultado de una decisión o un acuerdo, y desde este punto de vista son convenciones. Por otra parte, se llega a las decisiones siguiendo un proceder gobernado por reglas; y entre éstas tiene especial importancia la que nos dice que no debemos aceptar *enunciados básicos esporádicos* —es decir, que no estén en conexión lógica con otros enunciados— y que, por el contrario, hemos de admitir enunciados básicos en el curso de nuestra contrastación de *teorías:* cuando suscitamos cuestiones esclarecedoras acerca de éstas, cuestiones que tienen que contestarse gracias a la admisión de enunciados de aquel tipo.

Así pues, la situación real es bastante diferente de la que era visible para el empirista ingenuo, o para el creyente en la lógica inductiva. Este cree que empezamos por recopilar y ordenar nuestras experiencias, y que así vamos ascendiendo por la escalera de la ciencia; o bien —para emplear el modo formalizado de hablar—, que si queremos edificar una ciencia tenemos que recoger primero cláusulas protocolarias. Pero si se me ordena «registre lo que experimenta ahora», apenas sé cómo obedecer a esta orden ambigua: ¿he de comunicar que estoy escribiendo?; ¿que oigo llamar un timbre, vocear a un vendedor de periódicos o el hablar monótono de un altavoz?; ¿o he de informar, tal vez, que tales ruidos me llenan de irritación? Incluso si fuera posible obedecer semejante orden, por muy rica que fuese la colección de enunciados que se reuniese de tal modo, jamás vendría a constituirse en una *ciencia:* toda ciencia necesita un punto de vista y problemas teóricos.

Por regla general, se llega a un acuerdo sobre la aceptación o rechazo de enunciados básicos con ocasión de *aplicar* una teoría: en realidad, el acuerdo forma parte de la aplicación que consiste en someter a contraste la teoría. El ponerse de acuerdo acerca de ciertos enunciados básicos es, lo mismo que otros modos de aplicación, eje-

[8] Me parece que la tesis que sostengo aquí está más cerca de la escuela «crítica» (kantiana) de la filosofía (quizá en la forma representada por Fries) que del positivismo. En su teoría de nuestra «predilección por las demostraciones», Fries subraya que las relaciones (lógicas) existentes entre enunciados son enteramente diferentes de la relación que hay entre enunciados y experiencias sensoriales; por otra parte, el positivismo trata siempre de borrar esta distinción: o bien se hace a la ciencia, en su totalidad, parte de mi conocer, de «mi» experiencia sensorial (monismo de los datos sensoriales), o bien a las experiencias sensoriales se las hace parte de la trabazón científica objetiva de argumentos, dándolas la forma de enunciados protocolarios (monismo de enunciados).

cutar una acción con una finalidad —guiado por consideraciones teóricas diversas.

Me parece que nos encontramos ahora en situación de resolver problemas tales como el de Whitehead acerca de cómo es que el desayuno táctil se sirve siempre juntamente con el desayuno visual, y el *Times* táctil unido al *Times* visible y auditivamente crujiente. El lógico inductivo que cree que la ciencia parte de percepciones elementales esporádicas tiene que quedarse estupefacto ante semejantes coincidencias regulares: tienen que parecerle completamente «accidentales», pues como está en la opinión de que las teorías no son sino enunciados de coincidencias regulares, no le está permitido explicar la regularidad por medio de teorías.

Pero, de acuerdo con la situación a que hemos llegado ahora, las conexiones existentes entre nuestras diversas experiencias son explicables a base de las *teorías* que nos ocupamos en contrastar, y deductibles de ellas. (Nuestras teorías no nos inducen a esperar que seamos obsequiados con una luna táctil acompañante de la luna visible, ni que nos atormente una pesadilla auditiva.) Pero, sin duda alguna, aún queda otra cuestión (que es patente no puede responderse por medio de teoría falsable alguna, y es, por tanto, «metafísica»): ¿cómo es que acertamos tan frecuentemente con las teorías que construimos, o sea, cómo es que hay «leyes naturales»? *1.

Todas estas consideraciones importan mucho para la *teoría* epistemológica *del experimento*. El científico teórico propone ciertas cuestiones determinadas al experimentador, y este último, con sus experimentos, trata de dar una respuesta decisiva a ellas, pero no a otras cuestiones: hace cuanto puede por eliminar estas últimas (y de aquí la importancia que puede tener la independencia relativa de los subsistemas de una teoría). Así pues, lleva a cabo sus contrastaciones «... lo más sensibles que puede» con respecto a una sola cuestión «pero lo más insensibles que puede con respecto a todas las demás cuestiones enlazadas con ella... Una parte de su tarea consiste en cribar todas las posibles fuentes de error» [1]. Pero sería una equivocación creer que el experimentador procede de este modo «con objeto de facilitar el trabajo del teórico» [2], o quizá para proporcionar a este último una base en que apoyar generalizaciones inductivas. Por el contrario, el científico teórico tiene que haber realizado mucho antes su tarea, o, al menos, la parte más importante de ella: la de formular su pregunta lo más netamente posible; por tanto, es él quien indica el camino al experimentador. Pero incluso éste no está dedicado la mayoría de las veces a hacer observaciones exactas, pues también su tarea es, en gran medida, de tipo teórico: la teoría campea en el

---

*1 Discutiremos esta cuestión en el apartado 79 y en el apéndice *X; véase también mi *Postscript,* especialmente los apartados *15 y *16.

[1] H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), página 113; ed. ingl.: *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton, 1949 página 116.

[2] Weyl, *ibid.*

trabajo experimental, desde que se establecen los planes iniciales hasta que se dan los últimos toques en el laboratorio *[2].

Esto es perfectamente visible en algunos casos en que el teórico logra predecir un efecto observable que se llega a producir experimentalmente más tarde; quizá el ejemplo más brillante a este respecto es la predicción de De Broglie del carácter ondulatorio de la materia, predicción confirmada experimentalmente por primera vez por Davisson y Germer *[3]. Aún más conspicuos —tal vez— son los casos en que los experimentos han desempeñado un papel eminente en el progreso de la teoría: en estas ocasiones, lo que fuerza al teórico a buscar una teoría mejor es casi siempre la *falsación* experimental de una teoría que hasta el momento estaba aceptada y corroborada: es decir, el resultado de las contrastaciones guiadas por la teoría. Tenemos ejemplos famosos de este proceso en el experimento de Michelson-Morley, que condujo a la teoría de la relatividad, y en la falsación —por Lummer y Pringsheim— de la fórmula de la radiación de Rayleigh y Jeans y de otra fórmula de la radiación (la de Wien), que llevó a la teoría de los cuantos. Naturalmente, también se dan descubrimientos accidentales, pero son relativamente raros: Mach[3] habla con razón en semejantes casos de una «corrección de las opiniones científicas por circunstancias accidentales» (con lo cual reconoce, a pesar suyo, la importancia de las teorías).

Quizá podamos responder ahora a la pregunta acerca de cómo y por qué aceptamos una teoría con preferencia a otras.

Ciertamente, tal preferencia no se debe a nada semejante a una justificación experimental de los enunciados que componen una teoría, es decir, no se debe a una reducción lógica de la teoría a la experiencia. Elegimos la teoría que se mantiene mejor en la competición con las demás teorías, la que por selección natural muestra ser más apta para sobrevivir; y ésta será la que no solamente haya resistido las contrastaciones más exigentes, sino que sea, asimismo, contrastable del modo más riguroso. Una teoría es una herramienta que sometemos a contraste aplicándola, y que juzgamos si es o no apropiada teniendo en cuenta el resultado de su aplicación *[4].

---

*[2] Tengo ahora la impresión de que debería haber hecho resaltar en este punto una tesis que puede encontrarse en otros lugares de este libro (por ejemplo, en los párrafos cuarto y último del apartado 19): la de que las observaciones —y, más todavía, los enunciados de observaciones y los de resultados experimentales— son siempre *interpretaciones* de los hechos observados, es decir, que son *interpretaciones a la luz de teorías*. Por ello es tan engañosamente fácil encontrar *verificaciones* de una teoría, y tenemos que adoptar una actitud *sumamente crítica* con respecto a nuestras teorías si no queremos argumentar circularmente: precisamente la actitud de tratar de *falsarlas*.

*[3] Max Born relata este caso de un modo breve y excelente en *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, ed. por P. A. Schilpp, 1949, pág. 174. Hay ejemplos mejores, como el descubrimiento de Neptuno por Adams y Leverrier, y el de las ondas hertzianas.

[3] Mach, *Die Prinzipien der Wärmelehre* (1896), pág. 438.

*[4] Sin embargo, para la crítica de la tesis «instrumentalista», véanse las referencias de la nota *1 inmediatamente antes del apartado 12 (pág. 57) y de la parte precedida de asterisco de la nota 1 del mismo apartado.

Desde un punto de vista lógico, el contraste de una teoría depende de ciertos enunciados básicos, que, a su vez, se aceptan o rechazan en virtud de nuestras *decisiones.* Así pues, son las *decisiones* las que determinan el destino de las teorías. Teniendo en cuenta esto, mi respuesta a la pregunta sobre cómo escogemos una teoría se parece a la dada por el convencionalista; y, como él, digo que la elección viene determinada, en parte, por consideraciones de utilidad. No obstante tal cosa, hay una enorme diferencia entre sus opiniones y las mías, pues yo mantengo que lo que caracteriza al método científico es precisamente lo siguiente: que la convención o decisión no determina inmediatamente que aceptemos ciertos enunciados *universales*, sino que —por el contrario— actúa en nuestra aceptación de los enunciados *singulares* (esto es, de los enunciados básicos).

Para el convencionalista, su principio de *sencillez* gobierna la aceptación de enunciados universales: escoge el sistema más sencillo. Frente a ello, yo propongo que se tenga en cuenta antes que nada lo exigente de las contrastaciones (esto último se encuentra en relación muy estrecha con lo que yo llamo «sencillez», pero mi idea de ésta se aparta mucho de la del convencionalista: véase el apartado 46); y sostengo que lo que, en última instancia, decide la suerte que ha de correr una teoría es el resultado de una contrastación, es decir, un acuerdo acerca de enunciados básicos. Juntamente con el convencionalista, entiendo que la elección de una teoría determinada es un acto que ha de llevarse a cabo, un asunto práctico; pero esta elección, para mí, se encuentra bajo la influencia decisiva de la aplicación de dicha teoría y de la aceptación de los enunciados básicos relacionados con tal aplicación; mientras que para el convencionalista lo que decide son, ante todo, motivos estéticos.

Así pues, discrepo del convencionalista al mantener que los enunciados que se deciden por medio de un acuerdo *no son universales, sino singulares;* y del positivista en tanto que sostengo que los enunciados básicos no son justificables por nuestras experiencias inmediatas, sino que —desde un punto de vista lógico— se aceptan por un acto, por una decisión libre (que, mirada psicológicamente, bien puede considerarse como una reacción con una finalidad y bien adaptada a las circunstancias).

Quizá sea posible aclarar la importante distinción hecha entre una *justificación* y una *decisión* —es decir, una decisión a que se llega de acuerdo con un proceder gobernado por reglas— ayudándose de la analogía existente con un procedimiento de gran antigüedad: el conocer de una causa por un jurado.

El *veredicto* del jurado *(vere dictum* = dicho verdaderamente), como el del experimentador, es una respuesta a una cuestión de hechos *(quid facti?)*, que ha de proponerse al jurado en la forma más tajante y definida posible. Pero tanto la cuestión que se pregunta como la forma en que se presenta dependerán, en gran medida, de la situación legal, esto es, del sistema vigente de leyes penales (que corresponde al sistema de teorías). Al tomar una decisión, el jurado acepta, por acuerdo, un enunciado acerca de un acontecimiento fáctico (como si fuese un enunciado básico); la importancia de tal decisión radica en el hecho de que, a partir de ella —juntamente con los enunciados universales del sistema (de leyes penales)—, es posible deducir ciertas consecuencias; dicho de otro modo: la decisión forma la base para la *aplicación* del sistema: el veredicto desempeña el papel de un «enunciado de hechos verdadero». Pero es patente que no hay necesidad de que sea verdadero meramente por haberlo aceptado el jurado, lo cual queda reconocido por la regla que permite revocar o revisar un veredicto.

Se llega al veredicto siguiendo un procedimiento gobernado por reglas; éstas se basan en ciertos principios fundamentales destinados primordialmente —si no exclusivamente— a descubrir la verdad objetiva. Estos principios permiten, a veces, que entren en juego no sólo las convicciones subjetivas, sino incluso cierta parcialidad subjetiva; pero aunque no tengamos en cuenta tales aspectos especiales de este procedimiento tan antiguo, e imaginemos que el procedimiento a que nos referimos se basa únicamente en el intento de hacer que se descubra la verdad objetiva, el veredicto del jurado continuará sin justificar jamás la verdad que afirma, y sin dar pruebas de ella.

Tampoco puede atenderse a las convicciones subjetivas de los miembros del jurado para justificar la decisión tomada; aunque, naturalmente, existe una estrecha conexión causal entre aquéllas y ésta: conexión que puede representarse por medio de leyes psicológicas, por lo cual las convicciones mencionadas pueden llamarse los «motivos» de la decisión. El hecho de que las convicciones no sean justificaciones tiene una gran relación con el hecho de que el procedimiento que emplea el jurado puede regularse por medio de reglas diversas (por ejemplo, las de mayoría simple o ponderada): lo cual hace ver que la relación existente entre las convicciones de los miembros del jurado y el veredicto puede ser sumamente variada.

Frente a lo que ocurre con el veredicto del jurado, el *fallo* del juez está «razonado»: necesita una justificación, y la incluye. El juez trata de justificarlo por medio de otros enunciados —o de deducirlo lógicamente de ellos—: a saber, los enunciados del sistema legal, combinados con el veredicto (que desempeña el papel de las condiciones iniciales); y de ahí que sea posible apelar frente a un fallo, apoyándose en razones lógicas. Por el contrario, sólo cabe apelar frente a la decisión de un jurado poniendo en tela de juicio si se ha llegado a ella de acuerdo con las reglas de procedimiento aceptadas: o sea, desde un punto de vista formal, pero no en cuanto a su contenido. (Es significativo que a las justificaciones de contenidos de decisiones se les llame «informes motivados» en lugar de «informes lógicamente justificados».)

La analogía entre este procedimiento y aquél por el que decidimos acerca de enunciados básicos es muy clara, y sirve para iluminar, por ejemplo, su relatividad y el modo en que dependen de las cuestiones planteadas por la teoría. Cuando un jurado conoce acerca de una causa, sin duda alguna sería imposible *aplicar* la «teoría» si no existiese primero un veredicto al que se ha llegado por una decisión; mas, por otra parte, éste se obtiene por un procedimiento que está de acuerdo con una parte del código legal general (y, por tanto, lo aplica). El caso es enteramente análogo al de los enunciados básicos: aceptarlos es un modo de aplicar un sistema teórico, y precisamente esta aplicación es la que hace posibles todas las demás aplicaciones del mismo.

La base empírica de la ciencia objetiva, pues, no tiene nada de «absoluta»[4]; la ciencia no está cimentada sobre roca: por el contrario, podríamos decir que la atrevida estructura de sus teorías se eleva sobre un terreno pantanoso, es como un edificio levantado sobre pilotes. Estos se introducen desde arriba en la ciénaga, pero en modo alguno hasta alcanzar ningún basamento natural o «dado»; cuando interrumpimos nuestros intentos de introducirlos hasta un estrato más profundo, ello no se debe a que hayamos topado con terreno firme: paramos simplemente porque nos basta que tengan firmeza suficiente para soportar la estructura, al menos por el momento.

---

[4] WEYL (*op. cit.*, pág. 83, ed. ingl., pág. 116) escribe: «... a mi parecer, la pareja de opuestos *subjetivo-absoluto* y *objetivo-relativo* contiene una de las más profundas verdades epistemológicas que es posible extraer del estudio de la Naturaleza Quienquiera que desee lo absoluto habrá de conformarse también con la subjetividad —lo egocéntrico—, y todo el que anhela objetividad no puede evitar el problema del relativismo». Y antes leemos: «lo que se experimenta inmediatamente es *subjetivo y absoluto...*; por otra parte, el mundo objetivo, que la ciencia natural trata de precipitar en una pura forma cristalina... es relativo». Born se expresa en parecidos términos (*Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen*, 3.ª ed., 1922, introducción). Esta tesis es fundamentalmente la teoría kantiana de la objetividad desarrollada en forma coherente (cf. el apartado 8 y la nota 5 del mismo). También Reininger se refiere a esta situación, cuando escribe en *Das Psycho-Physische Problem* (1916), pág. 29: «La metafísica *como ciencia* es imposible... ya que, si bien lo absoluto se experimenta verdaderamente y, por esta razón, puede sentirse de modo intuitivo, con todo, se niega a ser expresado mediante palabras. Pues, '*Spricht* die Seele, so spricht, ach! schon die *Seele* nicht mehr' (si *habla* el alma, ay, ya no es el *alma* quien habla)».

Grados de contrastabilidad

Las teorías pueden ser contrastables de un modo más o menos exigente: es decir, pueden ser falsables con mayor o menor facilidad. Su grado de contrastabilidad tiene gran importancia cuando se trata de escoger entre ellas.

En este capítulo voy a comparar los diversos grados de contrastabilidad o de falsabilidad de las teorías comparando las clases de sus posibles falsadores. Esta investigación es enteramente independiente de la cuestión acerca de si es posible o no distinguir en un sentido absoluto entre teorías *falsables* y *no falsables*: en realidad, podría decirse que el presente capítulo «relativiza» el requisito de falsabilidad al hacer ver que ésta es sólo una cuestión de grado.

31. Un programa y una imagen

Como hemos visto en el apartado 23, una teoría es falsable si existe, al menos, una clase no vacía de enunciados básicos homotípicos prohibidos por ella; esto es, si la clase de sus posibles falsadores no es una clase vacía. Cuando representamos —como hicimos en el apartado 23— la clase de todos los enunciados básicos posibles por un área circular, y los eventos posibles por los radios del círculo, podemos decir: al menos *un* radio —o quizá mejor, un estrecho sector cuya anchura represente el hecho de que el evento ha de ser «observable»— tiene que ser incompatible con la teoría y ha de estar excluido por ella. Los posibles falsadores de varias teorías podrían representarse por sectores de anchos diversos; y se diría que las teorías tienen más o menos posibles falsadores de acuerdo con el ancho mayor o menor de los sectores que respectivamente excluyen. (Dejamos sin resolver por el momento la cuestión sobre si es posible precisar de algún modo este «más» y «menos».) También podríamos decir que si la clase de los posibles falsadores de una teoría es «mayor» que la correspondiente de otra, la primera teoría tendrá más ocasiones de ser refutada por la experiencia; por tanto, comparada con la segunda, podrá decirse que aquélla es «falsable en mayor grado»; lo cual quiere decir, asimismo, que la primera teoría *dice más* acerca del mundo de la experiencia que la segunda, ya que excluye una clase mayor de enunciados básicos (la clase de los enunciados permitidos se hará, por tanto, más pequeña, pero ello no afecta a nuestro razonamiento, pues hemos visto que las teorías no afirman nada acerca de semejante clase). Así pues, puede decirse que la cantidad de información empírica que nos aporta una teoría, es decir, su *contenido empírico*, aumenta con el grado de falsabilidad.

Imaginemos ahora que nos dan una teoría, y que el sector que representa los enunciados básicos prohibidos por ella se hace cada vez más grande; por fin, los enunciados básicos *no* prohibidos estarán representados en un estrecho sector residual (que debe existir siempre si la teoría es coherente). Es claro que semejante teoría será muy fácil de falsar, ya que concede al mundo empírico sólo un estrecho margen de posibilidades, pues excluye casi todos los eventos concebibles (es decir, lógicamente posibles). Afirma tanto acerca del mundo de la experiencia —dicho de otro modo, su contenido empírico es tan grande— que es como si tuviera pocas probabilidades de escapar a la falsación.

Ahora bien; la ciencia teórica procura precisamente llegar a teorías que sean fácilmente falsables en este sentido: procura restringir el ámbito de los eventos permitidos hasta un mínimo, e incluso —si es que puede conseguirse semejante cosa— en una medida tal que toda restricción subsiguiente conduzca a una falsación empírica de la teoría. Si lográsemos obtener una teoría de este tipo, ésta describiría «nuestro mundo concreto» con todo el pormenor alcanzable con una teoría: pues escogería el mundo de «nuestra experiencia» de la clase de todos los mundos de experiencia lógicamente posibles, y con la máxima precisión que es posible lograr mediante una ciencia teórica. Todos los eventos —o clases de acontecimientos— que realmente encontramos y observamos, y sólo ellos, quedarían caracterizados como «permitidos» *1.

32. ¿Cómo han de compararse las clases de posibles falsadores?

Las clases de posibles falsadores son clases infinitas. Y el «más» y el «menos» que cabe aplicar sin precauciones especiales a las clases finitas no pueden aplicarse del mismo modo a clases infinitas.

No podemos soslayar fácilmente esta dificultad: ni siquiera si realizamos las comparaciones considerando, en lugar de los enunciados básicos o *acontecimientos* prohibidos, clases de *eventos* prohibidos, con objeto de averiguar cuál de ellas contiene «más» eventos prohibidos; pues también el número de estos últimos que corresponde a una teoría empírica cualquiera es infinito, como puede verse teniendo en cuenta el hecho de que la conyunción de un evento prohibido con otro evento cualquiera (ya esté prohibido o no) es también un evento prohibido.

Voy a estudiar tres maneras de dar un sentido preciso —incluso

*1 Véanse el apéndice *X y el apartado *15 de mi *Postscript* acerca de otras observaciones sobre los fines de la ciencia.

en el caso de clases infinitas— al «más» y «menos» intuitivos, con objeto de descubrir si puede utilizarse alguno de ellos para comparar clases de eventos prohibidos.

1) El concepto de *número cardinal* (o *potencia) de una clase*. Este concepto no puede ayudarnos a resolver el problema, pues —según puede hacerse ver fácilmente— las clases de posibles falsadores tienen el mismo número cardinal en todas las teorías [1].

2) El concepto de *dimensión*. La vaga idea intuitiva de que un cubo contiene de alguna manera más puntos que, digamos, una línea recta, puede formularse lógicamente con todo rigor por medio del concepto de dimensión de la teoría de conjuntos; este concepto distingue diversas clases o conjuntos de puntos de acuerdo con su riqueza en «relaciones de vecindad» entre sus elementos: los conjuntos de mayor dimensión poseen relaciones de vecindad más abundantes. Emplearemos ahora el concepto de dimensión, que nos permite comparar entre sí clases de «mayor» y «menor» dimensión, para abordar el problema de comparar los grados de contrastabilidad; es posible hacer tal cosa porque los enunciados básicos, combinados conyuntivamente con otros del mismo tipo, vuelven a dar enunciados básicos, pero de «mayor grado de composición» que sus componentes: y este grado de composición de los enunciados básicos puede ponerse en relación con el concepto de dimensión. Sin embargo, lo que ha de emplearse no es el grado de composición de los eventos prohibidos, sino el de los permitidos, por la siguiente razón: los eventos prohibidos por una teoría pueden tener un grado de composición cualquiera, mientras que, por el contrario, algunos enunciados están permitidos meramente a causa de su forma, o sea —dicho con mayor precisión—, debido a que su grado de composición es demasiado pequeño para que puedan contradecir a la teoría en cuestión; y este hecho puede utilizarse para comparar dimensiones [*1].

3) La *relación de subclasificación*. Sean todos los elementos de una clase α elementos, asimismo, de una clase β, de modo que α sea una subclase de β (en símbolos, $\alpha \subset \beta$). Entonces, o bien todos los elementos de β son, a su vez, elementos también de α —en cuyo caso se dice que ambas clases tienen la misma extensión, o son idénticas— o existen elementos de β que no pertenecen a α. En este último caso,

---

[1] Tarski ha demostrado que —bajo ciertos supuestos— toda clase de enunciados es numerable (cf. *Monatschefte f. Mathem. u. Physik* 40, 1933, pág. 100, nota 10). * El concepto de medida es inaplicable por razones parecidas (es decir, porque el conjunto de todos los enunciados de un lenguaje es numerable).

[*1] Hemos traducido aquí y en pasajes análogos el término alemán «*komplex*» por «*compuesto*» [en ingl., *composite*] en lugar de hacerlo por «*complicado*» [en inglés, *complex*], debido a que aquél *no* denota, como lo hace el castellano «complicado», lo opuesto a «sencillo»: lo opuesto a «sencillo» («*einfach*») se denota, más bien, por la palabra alemana «*kompliziert*» (cf. el primer párrafo del apartado 41, en el que se traduce «*kompliziert*» por «complicado»). En vista de que el *grado de sencillez* es una de las cuestiones principales de este libro, hubiera inducido a error hablar aquí (y en el apartado 38) de *grado de complejidad o complicación:* por ello, me he decidido a emplear el término «*grado de composición*» [en ingl., *degree of composition*], que parece adecuarse muy bien al contexto.

los elementos de β que nopertenecen a α forman la «clase diferencia» o el *complemento* de α con respecto a β, y α es una *subclase propia de* β. La relación subclasificadora corresponde muy bien a los intuitivos «más» y «menos», pero tiene la desventaja de que sólo puede emplearse para comparar dos clases tales que una incluya a la otra; por tanto, si las dos clases de posibles falsadores se intersecan (y no está ninguna de ellas incluida en la otra) o no tienen elementos comunes, el grado de falsabilidad de las teorías correspondientes no puede ser comparado mediante la relación de subclasificación, pues son incomparables entre sí en lo que respecta a esta relación.

33. Comparación de los grados de falsabilidad por medio de la relación de subclasificación

Introducimos provisionalmente las siguientes definiciones, que se *perfeccionarán más adelante, cuando estudiemos las dimensiones de* las teorías *1.

1) Se dice que un enunciado x es «falsable en mayor grado» o «más contrastable» que el enunciado y —o, en símbolos, que $Fsb(x) > Fsb(y)$— cuando y solamente cuando la clase de los posibles falsadores de x incluye a la clase de los posibles falsadores de y como una *subclase propia* suya.

2) Si las clases de los posibles falsadores de los dos enunciados x e y son idénticas, entonces tienen el mismo grado de falsabilidad; esto es, $Fsb(x) = Fsb(y)$.

3) Si ninguna de las clases de posibles falsadores de los dos enunciados incluye a la otra como una subclase propia suya, entonces los dos enunciados tienen grados de falsabilidad no comparables ($Fsb(x) \,||\, Fsb(y)$).

Si es aplicable 1), existirá siempre una clase complemento no vacía, que, en el caso de enunciados universales, tiene que ser infinita. Por tanto, no es posible que las dos teorías (estrictamente universales) difieran en que una prohiba un número finito de acontecimientos singulares permitidos por la otra.

Las clases de posibles falsadores de todos los enunciados tautológicos o metafísicos son clases vacías, y, por ello —de acuerdo con 2)—, son idénticas (pues las clases vacías son subclases de todas las clases, y, por consiguiente, también de las clases vacías, de modo que todas éstas son idénticas: lo cual cabe expresar diciendo que existe solamente *una* clase vacía). Si con «e» denotamos un enunciado empírico, y con «t» y «m» una tautología y un enunciado metafísico (por ejemplo, un enunciado puramente existencial) respectivamente, podemos adscribir a los enunciados tautológicos y metafísicos un grado cero de falsabilidad, y escribir: $Fsb(t) = Fsb(m) = 0$, y $Fsb(e) > 0$.

Puede decirse que un enunciado contradictorio (que podemos de-

*1 Véanse el apartado 38 y los apéndices I, *VII y *VIII.

notar con «c») tiene por clase de sus posibles falsadores a la clase de todos los enunciados lógicamente posibles; esto significa que ningún enunciado, cualquiera que sea, es comparable con un enunciado contradictorio en cuanto a su grado de falsabilidad; tenemos, $Fsb(c) > Fsb(e) > 0$[*2]. Si ponemos arbitrariamente $Fsb(c) = 1$, es decir, si asignamos arbitrariamente el número 1 al grado de falsabilidad de un enunciado contradictorio, podemos definir todo enunciado empírico, e, por la condición $1 > Fsb(e) > 0$. Según esta fórmula, $Fsb(e)$ se encuentra siempre en el intervalo entre 0 y 1 con exclusión de estos límites, o sea, en el «intervalo abierto» limitado por estos números; al excluir la contradicción y la tautología (así como los enunciados metafísicos), la fórmula expresa simultáneamente *el requisito de coherencia y el de falsabilidad.*

34. Estructura de la relación de subclasificación. Probabilidad lógica

Hemos definido la comparación entre los grados de falsabilidad de dos enunciados valiéndonos de la relación de subclasificación; por tanto, aquélla participa de todas las propiedades estructurales de esta última. La cuestión de la comparabilidad puede aclararse mediante un diagrama (fig. 1), en el que a la izquierda se representan ciertas

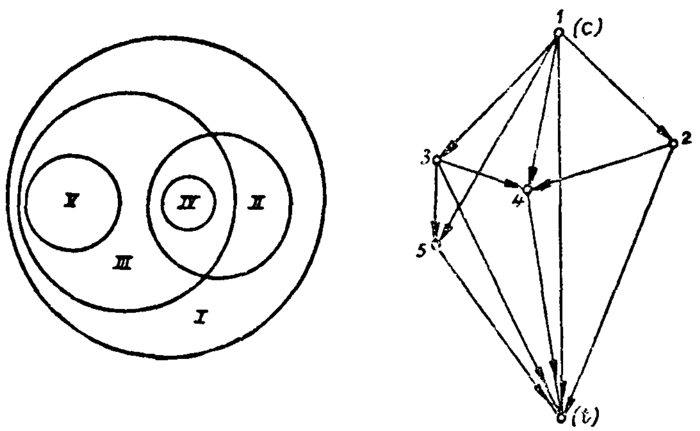


Figura 1

relaciones de subclasificación y a la derecha las relaciones de contrastabilidad correspondientes. Las cifras árabes de la derecha corresponden a las romanas de la izquierda, de tal modo que un número dado con guarismos romanos denota la clase de los posibles falsadores del enunciado denotado por el guarismo árabe correspondiente. Las

[*2] Véase ahora, sin embargo, el apéndice *VII.

flechas del diagrama que hace visibles los grados de contrastabilidad van del enunciado (o los enunciados) más contrastable(s) o falsable(s) a los menos contrastables —y corresponden con bastante precisión a las flechas de deductibilidad: véase el apartado 35.

Gracias al diagrama se advierte que pueden distinguirse y trazarse varias sucesiones de subclases, por ejemplo, las series I-II-IV y I-III-V, y que tales sucesiones podrían hacerse más «densas» introduciendo nuevas clases intermedias. En el caso particular dibujado, todas las sucesiones empiezan en el número I y acaban en la clase vacía, ya que esta última está incluida en toda clase. (No es posible representar la clase vacía en nuestro diagrama de la izquierda, justamente por ser una subclase de toda clase y porque —en consecuencia— debería aparecer, como si dijéramos, en todas partes.) Si nos resolvemos a identificar la clase I con la de todos los enunciados básicos posibles, entonces 1 se convierte en la contradicción (*c*), y 0 (que correspondería a la clase vacía) podría denotar la tautología (*t*). Se puede pasar de I a la clase vacía —o de (*c*) a (*t*)— por varios caminos: y cabe que se crucen algunos de ellos, como se ve en el diagrama de la derecha. Podemos decir, por tanto, que esta relación tiene una estructura reticular (se trata de una «retícula de sucesiones» establecidas por la flecha, o por la relación de subclasificación); en los puntos nodales (por ejemplo, los enunciados 4 y 5) la retícula está parcialmente conectada; la conexión de la relación es completa únicamente en la clase universal y en la clase vacía, que corresponden, respectivamente, a la contradicción, *c*, y a la tautología, *t*.

¿Es posible disponer los grados de falsabilidad de varios enunciados en una escala, esto es, coordinar a éstos unos números con los cuales queden ordenados de acuerdo con su falsabilidad? No cabe duda de que no es dable ordenar de este modo todos los enunciados *[1], pues si hiciésemos tal cosa habríamos comparado arbitrariamente enunciados no comparables. Sin embargo, nada nos impide elegir una de las sucesiones de la retícula e indicar con números el orden de sus enunciados; al hacer esto hemos de proceder de modo tal que a un enunciado que se encuentre más cerca de la contradicción, *c*, se le atribuya siempre un número más elevado que a otro situado más próximo a la tautología, *t*. Puesto que hemos asignado ya los números 0 y 1 a la tautología y a la contradicción respectivamente, deberíamos atri-

*[1] Sigo creyendo que todo intento de hacer comparables todos los enunciados por introducción de una *métrica* ha de incluir un elemento arbitrario, extralógico. Esto es obvio en el caso de enunciados como «todos los hombres adultos miden más de dos pies de altura» (o «todos los hombres adultos miden menos de nueve pies de altura»), esto es, de aquellos cuyos predicados enuncian una propiedad mensurable: pues es posible demostrar que la métrica del contenido o de la falsabilidad tiene que ser una función de la métrica del predicado, y esta última ha de contener siempre un elemento arbitrario —o, al menos, extralógico—. Naturalmente, podemos construir lenguajes artificiales para los que podamos establecer una métrica; pero la medida resultante no será puramente lógica —por muy «obvia» que pueda parecer— en cuanto que sólo se admiten predicados discretos, cualitativos, de sí o no (frente a los cualitativos, mensurables). Véanse también la segunda y tercera notas al apéndice *IX.

buir *fracciones propias* a los enunciados empíricos de la serie elegida.

Con todo, no pretendo escoger, en realidad, ninguna de las sucesiones; y, por otra parte, los números atribuidos a los miembros de la sucesión serían enteramente arbitrarios. No obstante lo cual, el hecho de que sea posible llevar a cabo semejante atribución de fracciones tiene gran interés, especialmente por la luz que arroja sobre la conexión existente entre el grado de falsabilidad y la idea de *probabilidad*. Siempre que podamos comparar los grados de falsabilidad de dos enunciados podremos decir que el que es menos falsable es, asimismo, el más probable en virtud de su forma lógica; llamo a esta probabilidad *[2], «*probabilidad lógica*»[1], que no debe confundirse con la probabilidad numérica que se emplea en la teoría de los juegos de azar y en la estadística: *la probabilidad lógica de un enunciado es complementaria de su grado de falsabilidad*, pues aumenta cuando éste disminuye. La probabilidad lógica 1 corresponde al grado 0 de la falsabilidad, y viceversa; el enunciado más contrastable —esto es, el que tiene mayor grado de falsabilidad— es el lógicamente menos probable, y el menos contrastable es el más probable lógicamente.

Como veremos en el apartado 72, la probabilidad *numérica* puede enlazarse con la probabilidad lógica, y, por tanto, con el grado de falsabilidad. Es posible interpretar la probabilidad numérica como la que se aplica a una subsucesión (escogida de la relación de probabilidad lógica) para la que pueda definirse un *sistema de medición* basado en estimaciones de frecuencia.

Estas observaciones sobre la comparación de grados de falsabilidad no son válidas únicamente para enunciados universales o para sistemas teóricos; pueden ampliarse de modo que se apliquen a enunciados singulares. Así pues, son válidas para teorías en conyunción con condiciones iniciales, por ejemplo; en este caso no debe tomarse la clase de los posibles falsadores por una clase de eventos —es decir, por una clase de enunciados básicos homotípicos—, ya que es una clase de acontecimientos. (Esta advertencia tiene cierta importancia para las relaciones entre la probabilidad lógica y la numérica, que analizaremos en el apartado 72.)

---

*[2] Ahora (desde 1938: cf. el apéndice *II) empleo el término «probabilidad lógica absoluta» en lugar de «probabilidad lógica», con objeto de distinguirla de la «probabilidad lógica relativa» (o «probabilidad lógica condicional»). Véanse, asimismo, los apéndices *IV y *VII a *IX.

[1] A esta idea de probabilidad lógica (la inversa de la contrastabilidad) corresponde la idea de validez de Bolzano, especialmente cuando la aplica a la *comparación de enunciados:* por ejemplo, este autor caracteriza las proposiciones principales de una relación de deductibilidad diciendo que son los enunciados de menor validez, y las consecuencias como los de mayor validez (*Wissenschaftslehre*, 1837, t. II, § 157, número 1). Bolzano explica la relación existente entre este concepto de validez y el de probabilidad en *op. cit.*, § 147. Cf. también KEYNES, *A Treatise on Probability* (1921), página 224; los ejemplos allí dados hacen ver que la comparación que yo hago de la probabilidad lógica es idéntica a la «comparación de la probabilidad que atribuimos *a priori* a una generalización», según Keynes. Véanse también la nota 1 del apartado 36 y la 1 del 83.

35. Contenido empírico, entrañamiento y grados de falsabilidad

En el apartado 31 se ha dicho que lo que yo llamo *contenido empírico* de un enunciado aumenta con su grado de falsabilidad: que cuanto más prohibe un enunciado, tanto más dice acerca del mundo de experiencia (cf. el apartado 6); aquello que yo denomino «contenido empírico» está en estrecha conexión con el concepto de «contenido» tal como Carnap [1], por ejemplo, lo define —pero no es idéntico a él—; emplearé para este último concepto el término «contenido lógico», con objeto de distinguirlo del contenido *empírico*.

Defino el *contenido empírico* de un enunciado p como la clase de sus posibles falsadores (cf. el apartado 31). Mediante el concepto de deductibilidad se define el *contenido lógico* como la clase de todos los enunciados no tautológicos deductibles del enunciado en cuestión (que, por tanto, puede denominarse su «clase consecuencia»). Así, en caso de que q sea deductible de p (en símbolos, si «$p \rightarrow q$» [*1]), el contenido lógico de p es *por lo menos igual* (es decir, igual o mayor) que el del enunciado q; si la deductibilidad es mutua (simbólicamente, si «$p \leftrightarrow q$» [*1]), se dice que p y q tienen igual contenido [2]; si q es deductible de p, pero p no lo es de q, la clase consecuencia de q tiene que ser un subconjunto propio de la clase consecuencia de p; entonces p tiene una clase consecuencia mayor que la de q y mayor contenido lógico (o fuerza lógica [*2]) que este enunciado.

Una consecuencia de mi definición de *contenido empírico* es que la comparación de los contenidos lógico y empírico de dos enunciados p y q lleva al mismo resultado si los enunciados que se comparan no contienen elementos metafísicos. Por tanto, exigiremos lo siguiente: *a)* dos enunciados de igual contenido lógico han de tener también el mismo contenido empírico; *b)* un enunciado p cuyo contenido lógico sea mayor que el de otro enunciado q debe tener mayor (o, al menos, igual) contenido empírico; y, finalmente, *c)* si el contenido empírico de un enunciado p es mayor que el de otro enunciado q, su contenido lógico tiene que ser mayor que el de éste o han de ser no comparables. Ha sido necesario matizar *b)* añadiendo «o, al menos,

---

[1] Carnap, *Erkenntnis* 2, 1932, pág. 458.

[*1] Según esta explicación, «$p \rightarrow q$» quiere decir que el enunciado condicional cuyo antecedente es p y cuyo consecuente es q es *tautológico*, o sea, lógicamente verdadero. (Cuando redacté el texto no veía con claridad este punto, ni me daba cuenta de la importancia del hecho de que una afirmación sobre deductibilidad es metalingüística. Véase también, más arriba, la nota *1 del apartado 18.) Así, pues, «$p \rightarrow q$» puede leerse aquí: «*p entraña a q*».

[2] Carnap, en *op. cit.*, dice: «el término metalógico 'de igual contenido' se define como 'mutuamente deductible'». Las obras de Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (1934) y *Die Aufgabe der Wissenschaftslogik* (1934), se han publicado demasiado tarde para que haya sido posible tenerlas aquí en cuenta.

[*2] Si el contenido lógico de p excede al de q decimos también que p es *más fuerte lógicamente* que q, o que su *fuerza lógica* excede a la de q.

igual» porque *p* podría ser, por ejemplo, la conyunción de *q* con cierto enunciado puramente existencial, o con cualquier otro tipo de enunciado metafísico (al cual podemos atribuir determinado contenido lógico): y, en este caso, el contenido empírico de *p* no sería mayor que el de *q*. Otras consideraciones parecidas hacen necesario añadir a *c)* la cláusula «o han de ser no comparables» *[3].

Al comparar grados de contrastabilidad o de contenido empírico llegaremos, pues, por regla general —es decir, en el caso de enunciados puramente empíricos— a los mismos resultados que si compárasemos contenidos lógicos, o relaciones de deductibilidad. Por tanto, será posible basar en gran medida la comparación de grados de falsabilidad en estas últimas. Ambas relaciones presentan la forma de retículas totalmente conectadas en la contradicción y en la tautología (cf. el apartado 34); lo cual puede expresarse diciendo que una contradicción entraña a todo enunciado, y que cualquier tautología está entrañada por todo enunciado. Además, los enunciados *empíricos* pueden caracterizarse —según hemos visto— como aquéllos cuyo grado de falsabilidad se halla en el intervalo abierto que está limitado por los grados de falsabilidad, por un lado, de las contradicciones, y por el otro, de las tautologías. Análogamente, los enunciados *sintéticos* en general (incluyendo los que son no empíricos) se encuentran colocados por la relación de entrañamiento en el intervalo abierto existente entre la contradicción y la tautología.

A la tesis positivista de que todos los enunciados no empíricos (metafísicos) «carecen de sentido» corresponderá, pues, la tesis de que la distinción que hago entre enunciados *empíricos* y *sintéticos* —o entre contenidos *empírico* y *lógico*— es superflua: pues todos los enunciados sintéticos habrían de ser empíricos (esto es, todos los enunciados auténticos, y no meros pseudoenunciados). Pero me parece que semejante modo de emplear tales palabras, aunque posible, está más cerca de sembrar la confusión en este punto que de aclararlo.

Así pues, considero que la comparación del contenido empírico de dos enunciados equivale a la de sus grados de falsabilidad. Con lo cual, nuestra regla metodológica de que deberían preferirse las teorías que puedan ser sometidas a contrastaciones más exigentes (cf. las reglas anticonvencionalistas del apartado 20), es equivalente a una regla que favorezca las teorías del mayor contenido empírico posible.

36. Niveles de universalidad y grados de precisión

Existen otras exigencias metodológicas que pueden reducirse a la del máximo contenido empírico posible. Dos de ellas se destacan especialmente: la del máximo nivel (o grado) alcanzable de *universalidad*, y la del máximo nivel alcanzable de *precisión*.

*[3] Véase, de nuevo, el apéndice *VII.

Teniendo esto en cuenta podemos examinar las siguientes leyes naturales (ciertamente, concebibles):

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{p} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathbf{q} \arrow[dr] & & \mathbf{r} \arrow[dl] \\
 & \mathbf{s} &
\end{tikzcd}
$$

p: Todos los cuerpos celestes que se mueven en órbitas cerradas se mueven en circunferencias; o, más brevemente: Todas *las órbitas de los cuerpos celestes* son *circunferencias.*

q: Todas las *órbitas de los planetas* son *circunferencias.*

r: Todas *las órbitas de los cuerpos celestes* son *elipses.*

s: Todas *las órbitas de los planetas* son *elipses.*

Las flechas de nuestro diagrama hacen ver las relaciones de deductibilidad existentes entre estos cuatro enunciados: de *p* se siguen todos los demás; de *q* se sigue *s*, que también se sigue de *r*, con lo cual *s* se sigue de todos los demás.

Al pasar de *p* a *q* el *grado de universalidad* disminuye; y *q* dice menos que *p* porque las órbitas de los planetas forman una subclase propia de las órbitas de los cuerpos celestes; en consecuencia, es más fácil falsar *p* que *q*: si este último es falsado, *p* queda falsado también, pero no viceversa. Cuando se pasa de *p* a *r* el grado de precisión (del predicado) decrece: las circunferencias son una subclase propia de las elipses; y si se falsa *r* lo mismo le ocurre a *p*, pero no a la inversa. A las demás transiciones son aplicables las correspondientes observaciones: cuando se discurre de *p* a *s* disminuyen, tanto el grado de universalidad como el de precisión; de *q* a *s* se hace menor la precisión, y de *r* a *s* la universalidad. A un grado más elevado de universalidad *o* de precisión corresponde un contenido (lógico o) empírico mayor, y, por ello, un grado de contrastabilidad más elevado.

Es posible escribir en forma de «enunciado condicional universal» (o de «implicación general», como se dice a menudo) lo mismo los enunciados universales que los singulares. Si expresamos de este modo nuestras cuatro leyes quizá podamos ver más fácil y exactamente cómo pueden compararse los grados de universalidad y de precisión de dos enunciados.

Un enunciado condicional universal (cf. la nota 6 del apartado 14) puede escribirse de la forma siguiente: «$(x)\ (\varphi x \rightarrow fx)$» o, empleando palabras, «todos los valores de x que satisfacen la función de enunciados φx satisfacen también la función de enunciados fx». El enunciado *s* de nuestro diagrama nos proporciona el siguiente ejemplo: «(x) (x es órbita de un planeta $\rightarrow x$ es una elipse)», que significa: «Cualquiera que sea x, si x es órbita de un planeta, entonces x es una elipse». Sean *p* y *q* dos enunciados escritos en esta forma «normal»; podemos decir que *p* tiene mayor universalidad que *q* si la función de enunciados antecedente de *p* (que podemos denotar con «$\varphi_p x$» está tautológicamente implicada por (o, es lógicamente deductible de) la función de enunciados correspondiente de *q* (que puede denotarse por «$\varphi_q x$», pero no es equivalente a ésta; o, dicho de otro modo, si «$(x)\ (\varphi_q x \rightarrow \varphi_p x)$» es tautológica (es decir, verdadera lógicamente). Parecidamente diremos que p tiene mayor precisión que q si «$(x)\ (f_p x \rightarrow f_q x)$» es *tautológica*: o sea, si el predicado (o la función consecuente) de p es más restringido que el de q, lo cual quiere decir que el predicado de p entrañe al de q [*1].

Esta definición puede ampliarse a funciones de enunciados con más de una variable. Mediante transformaciones lógicas elementales se pasa a las relaciones de deductibilidad que hemos afirmado, y que pueden expresarse por la regla siguiente [1]: si la universalidad *y* la precisión de dos enunciados son comparables, entonces el menos universal o menos preciso es deductible del más universal o más preciso, excepto en el caso —naturalmente— de que uno sea más universal y el otro más preciso (como ocurre con q y r en el diagrama) [2].

Podemos decir ahora que nuestra decisión metodológica —que se interpreta a menudo metafísicamente como principio de causalidad— consiste en no dejar nada sin explicar; es decir, en tratar siempre de deducir enunciados de otros de mayor universalidad. Esta decisión se deriva de la exigencia de los máximos grados alcanzables de universalidad y de precisión, y puede reducirse a esta otra exigencia, o regla: que se dé preferencia a las teorías que puedan ser sometidas a contrastaciones más duras [*2].

37. Ambitos lógicos. Notas sobre la teoría de la medición

Si un enunciado p es más fácil de falsar que otro q, debido a su nivel más elevado de universalidad o de precisión, entonces la clase de los enunciados básicos permitidos por p es una subclase propia de la clase de los enunciados básicos permitidos por q. La relación de subclasificación existente entre clases de enunciados permitidos es opuesta de la que se halla entre clases de enunciados prohibidos (posibles falsadores): cabe decir que estas dos relaciones son inversas

---

[*1] Podrá observarse que en el presente apartado (frente a lo que ocurre en los apartados 18 y 35) la flecha se emplea para expresar un condicional en lugar de una relación de entrañamiento; cf. también la nota *1 del apartado 18.

[1] Podemos escribir: $[(\varphi_q x \rightarrow \varphi_p x) \cdot (f_p x \rightarrow f_q x)] \rightarrow [(\varphi_p x \rightarrow f_p x) \rightarrow (\varphi_q x \rightarrow f_q x)]$, o de un modo más breve: $[(\varphi_q \rightarrow \varphi_p) \cdot (f_p \rightarrow f_q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$. * El carácter elemental de esta fórmula —al que aludimos en el texto— resalta claramente si escribimos: «$[(a \rightarrow b) \cdot (c \rightarrow d)] \rightarrow [(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow d)]$», y sustituimos, de acuerdo con el texto, «p» en lugar de «$b \rightarrow c$», «q» en lugar de «$a \rightarrow d$», etc.

[2] Lo que yo llamo universalidad de un enunciado corresponde, aproximadamente, a lo que la lógica clásica llamaría mayor «extensión del sujeto», y lo que designo por mayor precisión, a la menor extensión o a la «restricción del predicado». La regla concerniente a la relación de deductibilidad —de que acabamos de ocuparnos— puede considerarse como una aclaración y una combinación del clásico «*dictum de omni et nullo*» y del principio «*nota-notae*», es decir, el «principio fundamental de la predicación mediata». Cf. Bolzano, *Wissenschaftslehre* II (1837), § 263, núms. 1 y 4; Külpe, *Vorlesungen über Logik* (ed. por Selz, 1923), § 34, 5 y 7.

[*2] Véanse también el apartado *15 y el capítulo *IV de mi *Postscript*, especialmente el apartado *76, texto correspondiente a la nota 5.

(o quizá complementarias). Podemos denominar con «*ámbito*» [1] de un enunciado la clase de los enunciados básicos permitidos por él; el ámbito que un enunciado concede a la realidad es algo así como la «holgura» (o el grado de libertad) que la otorga. Ambito y contenido empírico (cf. el apartado 35) son conceptos contrapuestos (o complementarios), y, por ello, los ámbitos de dos enunciados están en la misma relación que sus probabilidades lógicas (cf. los apartados 34 y 72).

He introducido el concepto de ámbito porque nos sirve para tratar ciertas cuestiones relacionadas con el *grado de precisión de las mediciones*. Supongamos que las consecuencias de dos teorías discrepan tan ligeramente en todos los campos de aplicación que no es posible detectar las pequeñísimas diferencias entre los eventos observables calculados, debido al hecho de que el grado de precisión que nuestros instrumentos pueden alcanzar no es suficientemente alto; entonces será imposible decidir entre las dos teorías mediante experimentos *si antes no se mejora nuestra técnica de medición* *1. Lo cual hace ver que la técnica de medición utilizada determina cierto ámbito, es decir, una región dentro de la cual la teoría permite discrepancias entre las observaciones.

Así pues, la regla de que las teorías han de poseer el grado más elevado posible de contrastabilidad (y, por tanto, han de tolerar sólo el mínimo ámbito) entraña que se eleve cuanto sea posible el grado de precisión de las mediciones.

Se dice con frecuencia que toda medición consiste en la determinación de coincidencias de puntos. Pero la determinación que así expresamos solamente puede ser correcta dentro de ciertos límites; en un sentido estricto, no hay coincidencias de puntos *2; dos «puntos» físicos —digamos, un trazo en una regla graduada y otro en el cuerpo que se ha de medir— pueden llevarse únicamente a una estrecha cercanía: no es posible que coincidan, esto es, que lleguen a coalescer en *un* punto. Por trivial que pueda parecer esta observación en otro contexto, no carece de importancia para la cuestión de la precisión de las mediciones, pues nos recuerda que el proceso de medida ha de describirse del modo siguiente. Nos encontramos con que el punto del cuerpo a medir se halla *entre* dos trazos o marcas de la regla graduada, o bien que —por ejemplo— la aguja de nuestro aparato de medida se sitúa *entre* dos trazos de la escala; podemos, ya

---

[1] Von Kries (1886) introdujo el concepto de ámbito [en ingl., *range*] *(Spielraum)*, y en Bolzano se encuentran ideas parecidas. Waismann *(Erkenntnis* 1, 1930, págs. 228 y sigs.) trata de combinar la teoría del ámbito con la de la frecuencia; cf. el apartado 72. * KEYNES *(Treatise*, pág. 88) da «campo» [en ingl., *field*] como traducción de «*Spielraum*», que aquí vertemos por «ámbito»; y utiliza también (pág. 224) «alcance» [en ingl., *scope*], que, en mi opinión, viene a decir exactamente lo mismo.

*1 Este punto, según creo, ha sido interpretado erróneamente por Duhem. Véase su *Aim and Structure of Physical Theory*, págs. 137 y sigs.

*2 Obsérvese que estoy hablando aquí de medir, no de contar (la diferencia entre una operación y otra está ligada estrechamente a la existente entre los números reales y los racionales).

considerar dichos trazos o marcas como los límites óptimos de error, ya seguir adelante y apreciar la posición (digamos) de la aguja en el interior del intervalo de los trazos, para obtener un resultado más aproximado; este último caso puede describirse diciendo que a la aguja la damos por situada entre dos trazos imaginarios: y, por tanto, siempre queda un intervalo, un ámbito. Los físicos acostumbran a estimar este intervalo en toda medición (así, siguiendo a Millikan, dan para la carga elemental del electrón medida en unidades electrostáticas el valor $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$, y añaden que el ámbito o margen de imprecisión es de $\pm\, 0{,}005 \cdot 10^{-10}$). Pero esto plantea un problema: ¿Qué finalidad puede tener esta especie de sustitución de un trazo de la escala por *dos* —a saber, los dos extremos del intervalo— cuando para cada uno de ellos vuelve a surgir la misma cuestión de cuáles son los límites de aproximación de los extremos del intervalo?

Es claro que no sirve para nada dar los extremos del intervalo a menos que sea posible fijarlos con un grado de precisión mucho mayor que el que esperamos para la medición original; queremos decir, fijarlos dentro de sus propios intervalos de imprecisión (que, por consiguiente, han de ser varios órdenes de magnitud más pequeños que el intervalo que determinan para el valor de la medición original). De esta manera llegamos a la idea de lo que podrían llamarse «extremos difusos» o «*extremos de condensación*» del intervalo.

Estas consideraciones no presuponen la teoría matemática de errores, ni la de la probabilidad, sino más bien al contrario: al analizar la idea de intervalo de medición nos proporcionan el fondo sin el cual apenas tiene sentido la teoría estadística de errores. Si medimos una magnitud muchas veces obtenemos valores que están distribuidos con diferente densidad sobre un intervalo (intervalo de precisión que depende de la técnica de medición utilizada); sólo podemos aplicar a estos valores la teoría de errores, y determinar los extremos del intervalo, si sabemos lo que estamos buscando —a saber, los extremos de condensación del intervalo *[3].

A mi entender, todo esto arroja alguna luz acerca de *la superioridad de los métodos que emplean mediciones* sobre *los métodos puramente cualitativos*. Verdad es que —incluso en el caso de apreciaciones cualitativas, como la estimación del tono de un sonido musical— a veces cabe dar un intervalo de aproximación de la estimación hecha; pero si no interviene una medición, semejante intervalo solamente puede ser muy vago, pues en tales casos no es posible aplicar el concepto de extremos de condensación: concepto aplicable exclusivamente cuando podemos hablar de órdenes de magnitud, y, por ello, sólo cuando están definidos los métodos de medición. Volveré a utilizar el concepto de extremos de condensación de intervalos de precisión en el apartado 68, al hablar de la teoría de la probabilidad.

*[3] Estas consideraciones tienen gran relación con algunos de los resultados que trato en los puntos 8 y sigs. de mi «tercera nota» (incluida aquí en el apéndice *IX), y se apoyan en ellos. Véase también el apartado *15 de mi *Postscript* acerca de la importancia de la medición para la «profundidad» de las teorías.

38. Comparación de grados de contrastabilidad teniendo en cuenta las dimensiones

Hasta ahora hemos estudiado la comparación de teorías en lo que respecta a sus grados de contrastabilidad, sólo en la medida en que es posible compararlas mediante la relación de subclasificación. En algunos casos, este método nos guía con éxito completo en nuestra elección entre teorías; así, podemos decir ahora que el principio de exclusión de Pauli —que habíamos mencionado por vía de ejemplo en el apartado 20— resulta ser, en verdad, una hipótesis auxiliar sumamente satisfactoria: pues aumenta, en gran medida, el grado de precisión y, con él, el de contrastabilidad de la teoría cuántica antigua (del mismo modo que lo hace el enunciado correspondiente de la teoría cuántica moderna, que afirma que los estados antisimétricos los realizan electrones, y los simétricos, partículas sin carga y ciertas partículas múltiplemente cargadas).

Sin embargo, la comparación por medio de la relación de subclasificación no basta para muchos propósitos. Frank, por ejemplo, ha señalado que los enunciados de un nivel de universalidad muy elevado —tales como el principio de conservación de la energía según Planck lo ha formulado— se convierten fácilmente en tautológicos (y pierden, por tanto, su contenido empírico) a menos que puedan determinarse las condiciones iniciales «... mediante *pocas* mediciones, ... esto es, por medio de un número reducido de magnitudes características del estado del sistema» [1]. No es posible elucidar la cuestión del número de parámetros cuyo valor es menester averiguar —y sustituir en las fórmulas— valiéndose de la relación de subclasificación, a pesar de que, sin duda alguna, tiene, de hecho, una íntima relación con el problema de la contrastabilidad y de la falsabilidad, y el de sus grados. Cuantas menos magnitudes se necesiten para determinar las condiciones iniciales, los enunciados básicos que bastarán para falsar la teoría tendrán menor grado de composición [*1], ya que un enunciado básico falsador consiste en la conyunción de las condiciones iniciales con la negación de la predicción que se ha deducido (cf. el apartado 28). Así pues, cabrá comparar teorías en lo que se refiere a su grado de contrastabilidad averiguando el grado de composición mínimo que ha de tener un enunciado básico para ser capaz de contradecir a la teoría; siempre en el supuesto de que podamos encontrar un modo de comparar enunciados básicos y hallar si son más (o menos) compuestos: es decir, si los componen un número mayor (o menor) de enunciados básicos de tipo más simple. La teoría permitirá todos los enunciados básicos —cualquiera que sea su contenido— cuyo grado de composición no llegue al mínimo requerido, y ello simplemente a causa de su bajo nivel de composición.

---

[1] Cf. Frank, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1931), por ej., en la pág. 24

[*1] Para los términos «compuesto» y «composición», véase la nota *1 del apartado 32.

Pero semejante programa tropieza con varias dificultades, pues generalmente no es fácil decir —a base de una mera inspección— si un enunciado es compuesto, es decir, si es equivalente a la conyunción de enunciados más simples. Por otra parte, en todos los enunciados aparecen nombres universales, y el análisis de éstos puede llevar con frecuencia a disociar un enunciado en sus componentes conyuntivos (por ejemplo, quizá sería posible analizar el enunciado «hay un vaso de agua en el lugar de *k*» y separarle en estos otros dos: «hay un vaso que contiene un fluido en el lugar *k*» y «hay agua en el lugar *k*»); pero no podemos esperar que se encuentre un final natural de la disección de enunciados por este método, especialmente puesto que podemos introducir siempre nuevos universales definidos con el propósito de hacer posible una disección ulterior.

Si pretendemos que se conviertan en comparables los grados de composición de todos los enunciados básicos, podría proponerse que se eligiera cierta clase de enunciados como la de los *elementales* o *atómicos* [2], y a partir de éstos podrían entonces obtenerse todos los demás aplicando la conyunción y otras operaciones lógicas. Si lo lográsemos habríamos definido de este modo un «cero absoluto» de composición, y podría expresarse la de cualquier enunciado, como si dijéramos, en grados absolutos de composición [*2]. Pero este procedimiento debe considerarse, por la razón arriba indicada, muy poco apropiado: pues impondría restricciones muy serias al libre uso del lenguaje científico [*3].

---

[2] «Proposiciones elementales», en WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus,* Proposición 5: «Las proposiciones son funciones veritativas de proposiciones elementales»; «proposiciones atómicas» (frente a las «proposiciones moleculares», que son compuestas) en la obra de Whitehead y Russell *Principia Mathematica,* t. I, introducción a la 2.ª ed., 1925, págs. XV y sigs. C. K. Ogden tradujo el término «*Elementarsatz*» de Wittgenstein por «proposición elemental» [en ingl., *elementary proposition*] (cf. *Tractatus* 4.21), mientras que Bertrand Russell, en su prefacio al *Tractatus* (1922), pág. 13, lo vertió como «proposición atómica» [en ingl., *atomic proposition*]; este último término se ha hecho más popular.

[*2] Los grados absolutos de composición determinarían, desde luego, grados absolutos de contenido, y, por tanto, de improbabilidad lógica absoluta. Carnap, en su *Logical Foundations of Probability,* 1950, ha desarrollado más recientemente el programa que aquí he indicado de introducir la improbabilidad —y con ella la probabilidad— escogiendo una clase determinada de enunciados absolutamente atómicos; y ello con el fin de construir una teoría de la inducción. Véanse también las observaciones sobre modelos de lenguaje en el *Prólogo de la edición inglesa* de este libro, en donde aludo al hecho de que el tercer modelo de lenguaje (el sistema lingüístico de Carnap) no admite propiedades mensurables (ni permite, en su forma actual, la introducción de un orden espacial o temporal).

[*3] He empleado aquí las palabras «lenguaje científico» en su sentido más ingenuo, y, por ello, no deben interpretarse en el técnico de lo que actualmente se llama un «sistema lingüístico». Por el contrario, mi intención principal era que recordásemos el hecho de que los científicos no pueden emplear un «sistema lingüístico», ya que tienen que cambiar constantemente su lenguaje a cada paso nuevo que dan. «Materia» o «átomo» han significado después de Rutherford algo diferente a lo que significaban antes, y lo mismo ha ocurrido con «materia» o «energía» después de Einstein: el significado de estos conceptos es una función de la *teoría* —y ésta cambia incesantemente.

Con todo, sigue siendo posible comparar los grados de composición de los enunciados básicos, y, por tanto, los de otros enunciados. Ello se consigue eligiendo arbitrariamente una clase de enunciados *relativamente* atómicos, que tomamos como término de comparación: es posible definir semejante clase por medio de un *esquema o matriz generadora* (por ejemplo, «hay un aparato de medida de ... en el lugar ... y su aguja se encuentra entre los trazos ... y ... de la escala»), de modo que la clase de todos los enunciados obtenidos a partir de esta matriz (o función de enunciados) por introducción de valores determinados sea la de los enunciados que definimos como relativamente atómicos, y, por tanto, igualmente compuestos. Podemos llamar «*campo*» a la clase de todos estos enunciados juntamente con todas las conyunciones que pueden formarse con ellos; podemos, asimismo, llamar «acervo-n del campo» a la conyunción de n enunciados diferentes relativamente atómicos de un campo, y decir que su grado de composición es igual al número n.

Si para una teoría t existe un campo de enunciados singulares (pero no necesariamente básicos) y hay cierto número d tal que la teoría t no pueda ser falsada por ningún acervo-d de dicho campo, pero pueda serlo por algunos acervos-$d + 1$, diremos entonces que d es el *número característico* de la teoría con respecto a tal campo. *Todos los enunciados del campo cuyo grado de composición sea menor o igual que* d serán compatibles con la teoría y estarán permitidos por ella, cualquiera que sea su contenido.

Ahora ya es posible apoyar la comparación de los grados de contrastabilidad de teorías en su número característico d. Mas para evitar las faltas de coherencia que podrían provenir del uso de diferentes campos, es necesario emplear un concepto algo más restringido que el de campo, que es el de *campo de aplicación:* dada una teoría t, decimos que un campo es *campo de aplicación de la teoría t* si existe un número característico d de la teoría t con respecto a dicho campo, y si, además, satisface ciertas condiciones ulteriores (que explicamos en el apéndice I).

Al número característico, d, de una teoría t relativamente a un campo de aplicación, le llamo *dimensión* de t con respecto a éste. Resulta obvio utilizar la expresión «dimensión», ya que podemos imaginar que todos los acervos-n posibles del campo están dispuestos espacialmente (en un espacio de configuración de infinitas dimensiones); si, por ejemplo, $d = 3$, los enunciados admisibles por razón de tener una composición demasiado pequeña forman un subespacio tridimensional de dicha configuración; y la transición de $d = 3$ a $d = 2$ corresponde al paso de un volumen a una superficie. Cuanto más pequeña es la dimensión d, tanto más restringida se encuentra la clase de los enunciados que independientemente de su contenido son incapaces de contradecir a la teoría, en virtud de su bajo nivel de composición; y tanto mayor será el grado de falsabilidad de ésta.

No hemos restringido el concepto de campo de aplicación a los enunciados básicos, sino que cualesquiera tipos de enunciados singulares pueden pertenecer al campo dicho; pero si comparamos las dimensiones de los enunciados básicos valiéndonos del campo, podremos estimar su grado de composición. (Suponemos que a enunciados singulares de elevada composición corresponden enunciados básicos también de elevada composición.) Puede suponerse, por tanto, que a una teoría de mayor dimensión corresponde una clase de enunciados básicos de mayor dimensión y tal que todos los enunciados de esta clase están permitidos por la teoría, con entera independencia de lo que afirmen.

Esto responde a la pregunta acerca de cómo están relacionados los dos métodos de comparar los grados de contrastabilidad, es decir, el que utiliza la dimensión de cada teoría y el que se apoya en la relación de subclasificación. Habrá casos en que no se podrá emplear ninguno de los dos, o sólo uno de ellos, y entonces —como es natural— no habrá ocasión para que entren en conflicto; pero si en un caso concreto son aplicables ambos métodos, se puede concebir que dos teorías de igual dimensión tengan, sin embargo, grados diferentes de falsabilidad si se las examina por el método basado en la relación de subclasificación: en tales casos, debe aceptarse el veredicto de este último método, ya que habría demostrado ser el más sensible; todos los demás casos en que puedan aplicarse ambos métodos, conducirán al mismo resultado, ya que —según puede demostrarse mediante un teorema muy sencillo de la teoría de la dimensión— la dimensión de una clase tiene que ser mayor o igual que la de sus subclases[3].

39. Dimensión de un conjunto de curvas

En ocasiones podemos identificar sencillamente lo que he llamado «campo de aplicación» de una teoría con el *campo de su representación gráfica*, es decir, con el área de un papel cuadriculado en el que representamos la teoría por un gráfico, de modo que cada punto de este campo pueda considerarse representativo de un enunciado relativamente atómico; entonces, la dimensión de la teoría con respecto a este campo (definida en el apéndice I) es idéntica a la dimensión del conjunto de curvas que corresponde a aquélla. Voy a estudiar estas relaciones valiéndome de los dos enunciados q y s del apartado 36 (obsérvese que nuestra comparación de dimensiones se aplica a enunciados con diferentes predicados). La hipótesis q —la de que todas las órbitas planetarias son circunferencias— es tridimensional, pues para su falsación se necesitan, al menos, cuatro enunciados singulares del campo, que corresponderán a cuatro puntos de su representación gráfica. La hipótesis s —a saber, que todas las órbitas planetarias son elipses— es pentadimensional, ya que se requiere un mínimo de seis enunciados singulares del campo (a los que corresponderán seis puntos del gráfico) para falsarla. Hemos visto ya en el

[3] Cf. Menger, *Dimensionstheorie* (1928), pág. 81. * Puede asumirse que las condiciones que se requieren para que sea válido este teorema están satisfechas siempre por los «espacios» de que aquí nos ocupamos.

apartado 36 que q es más fácilmente falsable que s: como todos los círculos son elipses, pudimos comparar ambas hipótesis apoyándonos en la relación de subclasificación, pero el uso de las dimensiones nos capacita para comparar teorías que antes no podíamos: por ejemplo, la hipótesis de las circunferencias con la de las parábolas (que es tetradimensional). Cada una de las palabras «circunferencia», «elipse», «parábola» denota una clase o *conjunto de curvas*, y cada uno de éstos tiene la dimensión d si son necesarios y suficientes d puntos para escoger o caracterizar una curva determinada del conjunto; en la representación algebraica, la dimensión del conjunto de curvas depende del número de *parámetros* cuyos valores podemos elegir libremente; por lo cual podemos decir que el número de parámetros determinables libremente de un conjunto de curvas que representa una teoría caracteriza el grado de falsabilidad (o de contrastabilidad) de la misma.

Con relación a los enunciados q y s de mi ejemplo, creo oportuno hacer algunos comentarios metodológicos acerca de cómo descubrió Kepler sus leyes *[1].

No pretendo sugerir que la creencia en la perfección —principio heurístico que guió a Kepler en sus descubrimientos— estaba inspirada de un modo consciente o inconsciente en consideraciones metodológicas acerca de los grados de falsabilidad; pero sí creo que el éxito de Kepler fue debido, en parte, al hecho de que la hipótesis de las circunferencias de que partió era relativamente fácil de falsar: si Kepler hubiera empezado con una hipótesis que por su forma lógica hubiera sido menos fácilmente contrastable que la de las circunferencias, podría muy bien no haber llegado a ningún resultado en absoluto, si se tiene en cuenta la dificultad de los cálculos, que estaban apoyados literalmente «en el aire» —como si dijéramos, en lo alto de los cielos y en movimientos desconocidos—. El inequívoco resultado *negativo* a que llegó Kepler al falsar su hipótesis de las circunferencias fue, en realidad, su primer éxito: el método empleado había justificado su valía ante sus ojos lo suficiente como para continuar adelante, especialmente desde el momento en que la primera tentativa le había proporcionado ya ciertas aproximaciones.

Sin duda alguna, las leyes de Kepler podían haberse encontrado por otro camino. A mi entender, sin embargo, no fue un mero accidente que fuese aquélla la ruta que le condujo a la solución: pues corresponde al *método de eliminación*, que puede aplicarse únicamente si la teoría es suficientemente fácil de falsar, o sea, suficientemente *precisa* para ser capaz de chocar con la experiencia de observación.

*[1] Las opiniones que aquí se exponen han sido aceptadas, indicando su origen, por W. C. KNEALE, *Probability and Induction* (1949), pág. 230, y J. G. KEMENY, «The Use of Simplicity in Induction», *Philos. Review* 57, 1953: véase su nota en la página 404.

40. Dos maneras de reducir el número de dimensiones de un conjunto de curvas

Varios conjuntos de curvas enteramente diferentes pueden tener la misma dimensión. El conjunto de todas las circunferencias, por ejemplo, es tridimensional, pero el de todas las que pasan por un punto dado es un conjunto bidimensional, como el de todas las rectas. Si queremos que todas las circunferencias pasen por *dos* puntos dados tenemos un conjunto monodimensional, etc. Cada condición suplementaria de que las curvas del conjunto pasen por otro punto reduce en uno la dimensión de aquél.

Clases cero dimensionales [1]	Clases monodimensionales	Clases bidimensionales	Clases tridimensionales	Clases tetradimensionales
—	—	recta	circunferencia	parábola
—	recta que pasa por un punto dado	circunferencia que pasa por un punto dado	parábola que pasa por un punto dado	cónica que pasa por un punto dado
recta que pasa por dos puntos dados	circunferencia que pasa por dos puntos dados	parábola que pasa por dos puntos dados	cónica que pasa por dos puntos dados	—
circunferencia que pasa por tres puntos dados	parábola que pasa por tres puntos dados	cónica que pasa por tres puntos dados	—	—

También puede reducirse el número de dimensiones por otros métodos distintos que el de aumentar el número de puntos dados. Por ejemplo, el conjunto de las elipses con una relación dada entre los semiejes es tetradimensional (como es el de las parábolas), lo mismo que el de las elipses con una excentricidad dada. Naturalmente, el paso de la elipse al círculo equivale a especificar cierta excentricidad (la excentricidad 0) o una razón especial entre los semiejes (la unidad).

Como vamos tras la averiguación de los grados de falsabilidad

[1] *También podríamos haber empezado, como es natural, por la clase vacía (más que determinada) de dimensión menos uno.*

de las teorías, preguntaremos ahora si los diversos métodos existentes de reducir el número de dimensiones son equivalentes para nuestros propósitos, o si hemos de detenernos en un examen más circunstanciado de sus méritos relativos. Vemos, por un lado, que estipular que una curva pase por un *punto singular determinado* (o por una pequeña región) estará ligado frecuentemente —o corresponderá— a la aceptación de un *enunciado singular* determinado, es decir, a una condición inicial; por otra parte, el paso —digamos— de una hipótesis de elipses a una de circunferencias corresponderá, sin duda alguna, a una reducción de la dimensión de *la teoría misma.* Pero, ¿cómo pueden mantenerse separados estos dos métodos de reducir las dimensiones? Podemos dar el nombre de «*reducción material*» al método que *no* opera con estipulaciones en cuanto a la «forma» o «figura» de la curva: esto es, a las reducciones que se obtienen fijando uno o más puntos, por ejemplo, o mediante otra especificación equivalente a ésta. Llamaré «*reducción formal*» del número de dimensiones al otro método, es decir, a aquél en el que se especifica de modo más restricto la forma o figura de la curva: por ejemplo, al pasar de elipse a circunferencia, de ésta a recta, etc.

No es fácil, sin embargo, mantener tajante esta distinción, como puede verse del modo que sigue. Reducir las dimensiones de una teoría significa, en términos algebraicos, remplazar un parámetro por una constante; ahora bien, no está claro, ni mucho menos, cómo podemos distinguir entre métodos diferentes de llevar a cabo tal remplazamiento. La *reducción formal* por la que pasamos de la ecuación general de la elipse a la ecuación de la circunferencia puede describirse diciendo que consiste en igualar uno de los parámetros a cero, y un segundo parámetro a la unidad; pero si se iguala a cero otro parámetro (el término independiente), lo que se obtiene es una *reducción material,* pues queda especificado un punto de la elipse. Me parece, con todo, que es posible mantener clara la discriminación hecha si nos fijamos en su relación con el problema de los nombres universales: pues la reducción material introduce un nombre individual en la definición del conjunto de curvas del caso, y la reducción formal un nombre universal.

Imaginemos ahora que se nos da cierto plano individual, tal vez mediante una «definición ostensiva». Puede definirse el conjunto de todas las elipses de este plano por medio de la ecuación general de la elipse, y el conjunto de las circunferencias por la ecuación general de la circunferencia: definiciones que son *independientes de dónde* — siempre dentro del plano— *dibujemos las coordenadas (cartesianas)* a las que se refieren, y, por consiguiente, son independientes de la elección del origen y la orientación de las coordenadas. El único modo de determinar un sistema de coordenadas concreto es por medio de nombres individuales: por ejemplo, por especificación ostensiva de su origen y su orientación. Dado que la definición del conjunto de elipses (o de circunferencias) es la misma para todas las coordenadas cartesianas, es independiente de la especificación que se haga de dichos nombres individuales: es un *invariante* con respecto a todas las transformaciones de coordenadas del grupo euclídeo (desplazamientos y transformaciones de semejanza).

Si, por otra parte, queremos definir un conjunto de elipses (o de circunferencias) que tengan en común un punto específico, individual, del plano, hemos de operar con una ecuación que no sea invariante con respecto a las transformaciones del grupo euclídeo, sino que se refiera a un sistema de coordenadas singular, es decir, individual u ostensivamente determinado: y, por ello, estará referida a nombres individuales [2].

Las transformaciones pueden ordenarse jerárquicamente. Una definición que sea invariante con respecto a un grupo general de transformaciones también lo será con respecto a otros más especiales; de modo que *para cada definición de un conjunto de curvas existe un* grupo de transformaciones —el más general— que es característico de aquél. Podemos expresar ahora lo siguiente: se dice que la definición D_1 de un conjunto de curvas es «igualmente general» (o más general) que la definición D_2 de otro conjunto de curvas, si aquélla es invariante con respecto al mismo grupo de transformaciones que lo es D_2 (o con respecto a uno más general). Toda reducción de la dimensión de un conjunto de curvas que no disminuya la generalidad de la definición será llamada *formal*, y en caso contrario, *material*.

Si comparamos el grado de falsabilidad de dos teorías a la vista de sus dimensiones, es claro que habremos de tener en cuenta su *generalidad* (es decir, su invariancia con respecto a las transformaciones de coordenadas), además de sus dimensiones.

Desde luego, el procedimiento a seguir tendrá que ser diferente según que la teoría (como la de Kepler) se pronuncie acerca del mundo mediante enunciados geométricos, o sea «geométrica» únicamente en el sentido de que sea posible representarla por un gráfico (por ejemplo, uno en el que se haga visible cómo depende la presión de la temperatura); para este último tipo de teoría no sería adecuado exigir que su definición —o la del conjunto de curvas correspondiente— fuese invariante con respecto a las rotaciones del sistema coordenado, por ejemplo: ya que, en este caso, las coordenadas pueden representar cosas enteramente diferentes (una, presión, y la otra, temperatura).

Con esto se concluye mi exposición acerca de los métodos por los que pueden compararse los grados de falsabilidad. Creo que estos métodos pueden ayudarnos a elucidar ciertas cuestiones epistemológicas, tales como el *problema de la simplicidad*, de que nos ocuparemos a continuación; pero existen también otros problemas que quedan iluminados de un modo nuevo gracias a nuestro examen de los grados de falsabilidad, como veremos más adelante: especialmente, el de la llamada «probabilidad de hipótesis» o de la *corroboración*.

---

[2] Sobre las relaciones entre grupos de transformaciones e «individualización», cf. WEYL, *Philosophie der Mathematik u. Naturwissenschaft* (1927), pág. 59, edición ingl., págs. 73 y sigs., en donde se hace referencia al *Erlanger Programm* de KLEIN.

La sencillez

No parece existir gran acuerdo en lo que respecta a la importancia del llamado «problema de la sencillez». No hace mucho tiempo Weyl dijo que «el problema de la sencillez tiene una importancia central para la epistemología de las ciencias de la Naturaleza»[1]; sin embargo, el interés que suscita este problema ha decaído últimamente, al parecer: y quizá por presentar —especialmente tras el penetrante análisis de Weyl— un cariz casi refractario a toda solución.

Hasta hace poco tiempo se había empleado la idea de sencillez de un modo no crítico, como si fuese algo obvio qué cosa es la sencillez y por qué deberíamos tenerla en gran estima. Muchos filósofos de la ciencia han concedido a este concepto un lugar de importancia crucial en sus teorías, sin caer en la cuenta de las dificultades que plantea. Por ejemplo, los seguidores de Mach, Kirchhoff y Avenarius han pretendido remplazar la idea de explicación causal por la de «descripción más sencilla»; sin el adjetivo «sencilla» —o una palabra análoga— esta doctrina no diría absolutamente nada; y como está encaminada a explicar por qué preferimos una descripción del mundo que echa mano de teorías en lugar de limitarse a utilizar enunciados singulares, dicha doctrina parece presuponer que las teorías son más sencillas que los enunciados singulares; ahora bien, pocos han intentado siquiera explicar por qué habrían de ser más sencillas, o —de un modo más preciso— qué se quiere decir al hablar de sencillez.

Si suponemos, además, que las teorías se emplean buscando la sencillez, entonces no cabe duda de que deberíamos utilizar las más sencillas. Por esto, Poincaré, para quien la elección entre teorías es una cuestión de convención, llega a formular su principio para realizar semejante elección: escoge *la más sencilla* de todas las convenciones posibles. Pero, ¿cuál es la más sencilla?

41. Eliminación de los conceptos estético y pragmático de sencillez

La palabra «sencillez» se emplea en muchos sentidos diferentes. La teoría de Schrödinger, por ejemplo, es de gran sencillez en un sen-

[1] Cf. Weyl, *op. cit.*, pág. 115 y sig.; ed. ingl., pág. 155. Véase también, más abajo, el apartado 42.

tido metodológico, pero en otro sentido muy bien puede llamársele «complicada». Acerca de un problema podemos decir que no tiene una solución sencilla, sino difícil, y calificar no de sencillo, sino de intrincado, un planteamiento o una exposición.

Por lo pronto, excluiré de nuestra discusión la aplicación del término «sencillez» a nada semejante a un planteamiento o una exposición. Se dice con frecuencia de dos exposiciones de una y la misma demostración matemática que una de ellas es más sencilla o más elegante que la otra; esta distinción tiene poco interés desde el punto de vista de la teoría del conocimiento, pues no cae dentro de la jurisdicción de la lógica, sino que indica no más que una preferencia de carácter *estético o pragmático*. Es una situación parecida a la que encontramos cuando alguien dice que una tarea puede «llevarse a cabo por medios más sencillos» que otra, dando a entender que puede ejecutarse más fácilmente o que se necesita menos práctica —o menos conocimientos— para realizarla. En todos estos casos puede eliminarse la palabra «sencillo», ya que su empleo es extralógico.

42. El problema metodológico de la sencillez

¿Qué nos queda —si es que queda algo— después de haber eliminado las ideas estética y pragmática de sencillez? ¿Existe un concepto de ésta que tenga importancia para el lógico? ¿Cabe distinguir entre teorías lógicamente no equivalentes debido a sus grados de sencillez?

Puede parecer muy dudosa una respuesta a estas cuestiones, a la vista del poco éxito que han tenido la mayoría de los intentos de definir este concepto. Así, Schlick da una respuesta negativa, diciendo: «la sencillez es... un concepto que indica preferencias de carácter en parte práctico y en parte estético»[1]; y lo más notable es que contesta de este modo cuando escribe acerca del concepto que aquí nos interesa, y al que yo llamaré *concepto epistemológico de sencillez*, pues continúa: «incluso si somos incapaces de explicar qué es lo que realmente se quiere decir aquí con 'sencillez', debemos reconocer el hecho de que todo científico que ha logrado representar una serie de observaciones por medio de una fórmula muy sencilla (por ejemplo, por una función lineal, cuadrática o exponencial) está convencido inmediatamente de que ha descubierto una ley».

Schlick discute las posibilidades de definir el concepto de regularidad de aspecto legal, y, especialmente, la diferencia entre «ley» y «azar», mediante el concepto de sencillez; finalmente, rechaza éste con la observación de que «el concepto de sencillez es, sin duda alguna, enteramente relativo y vago; no es posible llegar a una definición estricta de causalidad apoyándose en él, ni permite que se distingan de un modo preciso ley y azar»[2]. Teniendo en cuenta este

---

[1] Schlick, *Naturwissenschaften* **19**, 1931, pág. 148. * He traducido libremente el término «*pragmatischer*» de Schlick.

[2] Schlick, *ibid.*

pasaje se hace claro qué es lo que actualmente se espera conseguir del concepto de sencillez: que nos dé una medida del grado de legalidad o de regularidad de los eventos. Feigl proclama una tesis parecida cuando habla de la «idea de definir el grado de regularidad o de legalidad valiéndose del concepto de sencillez» [3].

La idea epistemológica de sencillez desempeña un papel especial en las teorías de la lógica inductiva: por ejemplo, en relación con el problema de la «curva más sencilla». Los creyentes en la lógica mencionada suponen que llegamos a las leyes naturales por generalización a partir de observaciones concretas. Si imaginamos los diversos resultados de una serie de observaciones como puntos marcados en un sistema de coordenadas, entonces la representación gráfica de la ley será una curva que pase por todos esos puntos; pero a través de un número finito de puntos puede dibujarse un número ilimitado de curvas de las formas más diversas, y, por tanto, la ley no está determinada unívocamente por las observaciones: con lo cual la lógica inductiva se enfrenta con el problema de decidir qué curva ha de elegirse entre todas las posibles.

La respuesta usual es que se elija la curva más sencilla. Wittgenstein, por ejemplo, dice: «El proceso de la inducción consiste en asumir *la* ley *más sencilla* que pueda ponerse de acuerdo con nuestra experiencia» [4]. Al elegir la ley más sencilla se supone tácitamente que una función lineal, digamos, es más sencilla que una cuadrática, una circunferencia más sencilla que una elipse, etc.; pero no se nos dan razones para la elección de esta jerarquía concreta de sencilleces con preferencia a otra cualquiera, o para creer que las leyes «sencillas» tienen ventajas sobre las que lo son menos —aparte de las ventajas estéticas y prácticas— [5]. Schlick y Feigl mencionan [6] un trabajo inédito de Natkin en que, según la referencia de Schlick, aquel autor propone que se diga que una curva es más sencilla que otra cuando su curvatura media es más pequeña que la de ésta; o —de acuerdo con la reseña de Feigl— cuando se desvía menos de la recta (las dos versiones no son equivalentes). Esta definición parece estar bastante de acuerdo con nuestras intuiciones; pero, de uno u otro modo, marra el punto decisivo: por ejemplo, hace que ciertas partes de una hipérbola (las partes asintóticas) sean mucho más sencillas que una circunferencia, etc. Y, realmente, no creo que esta cuestión pueda dirimirse mediante tales «artificios» (como Schlick los llama); además, siempre seguiría siendo un misterio por qué habríamos de dar preferencia a la sencillez definida de este modo en particular.

Weyl discute y rechaza un intento muy interesante de apoyar la

---

[3] FEIGL, *Theorie und Erfahrung in der Physik* (1931), pág. 25.

[4] WITTGENSTEIN, *op. cit.*, Proposición 6.363.

[5] La observación de Wittgenstein acerca de la sencillez de la lógica *(op. cit.*, Proposición 5.4541), que «constituye la norma de sencillez», no lleva a ninguna parte. El «principio de la curva más sencilla» de Reichenbach *(Mathematische Zeitschrift* **34**, 1932, pág. 616) se apoya en su axioma de inducción (que creo insostenible) y tampoco nos sirve de ayuda.

[6] En los lugares mencionados.

sencillez en la probabilidad. «Supongamos, por ejemplo, que veinte pares coordenados de valores (x, y) de la misma función $y = f(x)$, se encuentren sobre una recta (dentro de la exactitud que es de esperar) cuando se los representa en papel cuadriculado. Conjeturaremos entonces que nos hallamos frente a una ley natural rigurosa, y que y depende linealmente de x: conjetura que se deberá a la *sencillez* de la línea recta, o a que sería *sumamente improbable* que precisamente estos veinte pares de observaciones elegidas arbitrariamente se encontrasen casi sobre una recta si la ley en cuestión fuese de un tipo distinto; si empleamos ahora la recta para llevar a cabo interpolaciones y extrapolaciones, obtenemos unas predicciones que van más allá de lo que las observaciones nos dicen. Sin embargo, este análisis está perfectamente sujeto a crítica. Pues siempre es posible definir toda suerte de funciones matemáticas que... serán satisfechas por las veinte observaciones del caso; y varias de ellas se desviarán considerablemente de la recta. Con lo que podríamos pretender, para cada una de éstas, que sería *sumamente improbable* que las veinte observaciones se situasen precisamente sobre tal curva, a menos que ésta represente la verdadera ley. En definitiva, es esencial que las matemáticas nos presenten *a priori* la función —o, mejor, la clase de funciones— debido a su sencillez matemática; debe advertirse que esta clase de funciones ha de depender de menos parámetros que el número de observaciones que se tiene que satisfacer»[7]. La observación de Weyl de que «las matemáticas nos presenten *a priori* la clase de funciones, debido a su sencillez matemática», y su referencia al número de parámetros, están de acuerdo con mi tesis (que desarrollaré en el apartado 43). Pero Weyl no nos dice en qué consiste la «sencillez matemática», y —sobre todo— no dice qué *ventajas lógicas o epistemológicas* se supone que tiene la ley más sencilla con respecto a otra más complicada[8].

Los diversos pasajes que hemos citado son muy importantes, debido a su trascendencia para nuestro propósito actual, es decir, para el análisis del concepto epistemológico de sencillez: pues éste no ha sido determinado con precisión hasta el momento. Por tanto, es posible recusar cualquier intento de precisarlo (entre ellos el mío), diciendo que el concepto de sencillez que interesa a los epistemólogos es realmente otro enteramente distinto. Yo podría responder a tales objeciones que no atribuyo la menor importancia a la *palabra* «sencillez»:

---

[7] WEYL, *op. cit.*, pág. 116; ed. ingl., pág. 156. *Cuando escribí este libro no sabía (y Weyl, sin duda alguna, también lo ignoraba al escribir el suyo) que Harold Jeffreys y Dorothy Wrinch habían sugerido —seis años antes que Weyl— que se midiese la sencillez de una función por su parvedad en parámetros libremente determinables (véase su estudio conjunto en *Phil. Mag.* **42**, 1921, págs. 369 y sigs.). Aprovecho esta ocasión para reconocer de modo enteramente explícito la prelación de estos autores.

[8] Los comentarios ulteriores de Weyl sobre la relación entre sencillez y corroboración son también pertinentes a este respecto; están de acuerdo, en gran medida, con mi propia opinión, que expongo en el apartado 82, aunque mi modo de abordar el asunto es muy diferente; cf. la nota 1 del apartado 82, *y la nueva nota situada a continuación de ésta (es decir, la nota *1 del apartado 43).

no he sido yo quien ha introducido semejante término, y soy perfectamente consciente de sus desventajas; lo único que afirmo es que el concepto de sencillez que voy a aclarar ayuda a contestar precisamente aquellas cuestiones que —como las citas hechas muestran— los filósofos de la ciencia han planteado frecuentemente en relación con su «problema de la sencillez».

43. Sencillez y grado de falsabilidad

Todas las cuestiones epistemológicas que surgen alrededor del concepto de sencillez pueden contestarse si igualamos este concepto con el de *grado de falsabilidad*. Como es fácil que este aserto encuentre una actitud de oposición *[1], trataré primero de hacerlo más aceptable intuitivamente.

---

*[1] Ha sido muy satisfactorio encontrar por lo menos un epistemólogo —William Kneale— que ha aceptado esta teoría de la sencillez (incluidas las ideas del apartado 40). Este autor escribe en su libro *Probability and Induction*, 1949, págs. 229 y sig.: «... es fácil ver que la hipótesis más sencilla en este sentido es también la que podemos esperar eliminar más rápidamente en caso de que sea falsa... En resumen, la norma de asumir siempre la hipótesis más sencilla que esté de acuerdo con los hechos conocidos es la que más rápidamente nos permitirá desembarazarnos de hipótesis falsas»; y en una nota a pie de página se refiere a la pág. 116 del libro de Weyl, así como al mío. Pero ni en esta página —de la que he citado las frases pertinentes a esta cuestión en el texto— ni en ninguna otra parte del espléndido libro de Weyl (ni en ningún otro) he sido capaz de encontrar el menor rastro de la tesis de que la sencillez de una teoría se halla en conexión con su falsabilidad —es decir, con la facilidad de su eliminación—. Y en caso de que Weyl (o cualquier otra persona llegada a mi noticia) se hubiera anticipado a mi teoría, no habría escrito yo (como lo hice hacia el final del apartado anterior) que Weyl «no dice qué *ventajas lógicas o epistemológicas* se supone que tiene la ley más sencilla».

Los hechos son los siguientes: en su profunda discusión del problema (que aquí he citado en el apartado 42, texto correspondiente a la nota 7), Weyl menciona, en primer lugar, la opinión intuitiva de que una curva sencilla —digamos, una línea recta— ofrece ventajas sobre otra más complicada, *porque podría considerarse un accidente muy improbable que todas las observaciones se ajustaran a una curva tan sencilla;* pero, en lugar de seguir esta opinión intuitiva (que, a mi entender, le hubiese llevado a advertir que una teoría más sencilla es más contrastable), Weyl la *rechaza* por no resistir a una crítica racional: señala que lo mismo podría decirse de *cualquier curva dada,* por complicada que sea (el argumento es enteramente correcto, pero deja de ser válido si consideramos no ya los casos que verifican la ley, sino los *posibles falsadores* y su grado de composición). Weyl continúa luego discutiendo la escasez de los parámetros como criterio de sencillez, sin poner en relación de ninguna forma este rasgo, ni con la opinión intuitiva que acababa de rechazar, ni con ningún concepto que, como el de contrastabilidad o el de contenido, pudiese explicar nuestra preferencia epistemológica por las teorías más sencillas.

La caracterización hecha por Weyl de la sencillez de una curva por su parvedad en parámetros había sido expuesta con anterioridad —desde 1921— por Harold Jeffreys y Dorothy Wrinch *(Phil. Mag.* 42, págs. 369 y sigs.). Pero si Weyl meramente no llegó a advertir lo que ahora es «fácil ver» (según Kneale), Jeffreys vio, en realidad, —y sigue viendo— justamente lo opuesto: atribuye a la ley más sencilla la máxima probabilidad previa, en lugar de la máxima improbabilidad previa. (Así, pues, las tesis de Jeffreys y de Kneale juntas pueden ilustrar la observación de Schopenhauer de que la solución de un problema con frecuencia parece primero una paradoja y luego una perogrullada). Me interesa añadir que posteriormente he desarrollado

He puesto ya de manifiesto que las teorías de menor dimensión son más fácilmente falsables que las de mayor dimensión: por ejemplo, una ley que tenga la forma de una función de primer grado es falsable con más facilidad que otra expresable por medio de una función de segundo grado; pero esta última pertenecerá todavía al grupo de las más falsables entre todas las leyes cuya forma matemática sea la de una función algebraica. Lo cual concuerda bastante bien con la observación de Schlick acerca de la sencillez: «ciertamente, nos sentimos inclinados a considerar una función de primer grado más sencilla que una de segundo, aunque no hay duda de que esta última representa también una ley a la que no cabe hacer ningún reproche...» [1].

Como hemos visto, el grado de universalidad y precisión de una teoría aumenta con su grado de falsabilidad; por consiguiente, quizá podamos identificar el *grado de estrictez* de una teoría —algo así como el grado en que ésta impone el rigor de la ley sobre la Naturaleza— con su grado de falsabilidad: lo cual hace ver que este último realiza justamente lo que Schlick y Feigl esperaban que hiciera el concepto de sencillez. A lo cual puedo añadir que, mediante la idea de los grados de falsabilidad, es factible aclarar también la distinción que Schlick había querido trazar entre ley y azar: los enunciados probabilitarios acerca de sucesiones que tienen características azarosas resultan ser de dimensión infinita (cf. el apartado 65), no sencillos, sino complicados (cf. el apartado 58 y la parte final del 59), y sólo falsables tomando precauciones especiales (apartado 68).

En los apartados 31 a 40 hemos discutido minuciosamente la comparación de los grados de contrastabilidad; varios de los ejemplos y de otros detalles que allí se dan podrían trasladarse fácilmente al problema de la sencillez; y esto ocurre, especialmente, con el grado de universalidad de una teoría: un enunciado puede remplazar a otros menos universales que él, y, por tal razón, se le ha llamado a menudo «más sencillo». Puede decirse que el concepto de dimensión de una teoría precisa la idea de Weyl de emplear el número de parámetros para determinar el concepto de sencillez *[2]; y cabe respon-

---

mi tesis sobre la sencillez y que al hacer tal cosa he puesto cuanto he podido de mi parte —y espero que no del todo infructuosamente— por aprender de Kneale. Cf. el apéndice *X y el apartado *15 de mi *Postscript.*

[1] SCHLICK, *Naturwissenschaften* 19, 1931, pág. 148 (cf. la nota 1 del apartado anterior).

*[2] Como ya he mencionado en las notas 7 del apartado 42 y *1 del presente, Harold Jeffreys y Dorothy Wrinch fueron los primeros en proponer que se midiese la sencillez de una función por su escasez en parámetros libremente determinados; pero también propusieron atribuir mayor probabilidad previa a la hipótesis más sencilla. Por lo cual, cabe representar sus tesis por el esquema

sencillez = parvedad de parámetros = elevada probabilidad previa.

Ocurre que yo abordé el problema desde un ángulo enteramente diferente. Me ocupaba de la averiguación de los grados de contrastabilidad, y encontré, en primer lugar, que ésta puede medirse por la improbabilidad «lógica» (que corresponde exactamente a la improbabilidad «previa» de Jeffreys), y después, que es posible igualar la contrastabilidad —y, por tanto, la improbabilidad previa— con la escasez en pa-der a ciertas posibles objeciones a la teoría de este autor por medio de nuestra distinción entre una reducción formal y una reducción material de la dimensión de una teoría (cf. el apartado 40): entre estas objeciones se encuentra la de que un conjunto de elipses cuyos semiejes se hallen en una relación determinada —o cuya excentricidad tenga un valor numérico fijo— tiene exactamente el mismo número de parámetros que un conjunto de círculos, aunque no cabe duda de que es menos «sencilla».

Pero, sobre todo, nuestra teoría explica *por qué es tan deseable la sencillez.* Para comprenderlo no hay necesidad de que asumamos un «principio de economía del pensamiento» ni nada por el estilo: hemos de valorar más los enunciados sencillos que los menos sencillos, *porque nos dicen más, porque su contenido empírico es mayor y porque son mejor contrastables.*

44. Figura geométrica y forma funcional

Nuestra perspectiva del concepto de sencillez nos permite resolver cierto número de contradicciones que hasta ahora habían hecho dudar de si tal concepto era de alguna utilidad.

Pocos considerarían que la *figura geométrica* de una curva logarítmica, digamos, sea especialmente sencilla; pero se acostumbra a pensar que una *ley* que puede representarse por una función logarítmica es una ley sencilla. De modo parecido, se dice ordinariamente que una *función sinusoidal* es sencilla, aun cuando no lo sea tanto la figura geométrica de la *curva sinusoidal.*

Podemos desembarazarnos de dificultades de este tipo si recordamos la relación existente entre el número de parámetros y el grado de falsabilidad, y si distinguimos entre las reducciones material y formal del número de dimensiones (hemos de recordar, asimismo, el papel de la invariancia en lo que respecta a las transformaciones de los sistemas coordenados). Si hablamos de la *forma o figura geométrica* de una curva, lo que pedimos es invariancia con respecto a todas las transformaciones pertenecientes al grupo de los desplazamientos, y podemos pedirla con respecto a las transformaciones de semejanza: pues no pensamos que la forma o figura geométrica esté ligada a una *posición* determinada. En consecuencia, si nos imaginamos la forma de una curva logarítmica con un solo parámetro ($y = \log_a x$) situada en cualquier sitio de un plano, tendrá entonces *cinco* parámetros (para tener en cuenta las transformaciones de semejanza), y no será —en modo alguno— una curva de extremada sencillez. Si, por otra

---

rámetros; y únicamente al final igualé la elevada contrastabilidad con la elevada sencillez. Por tanto, mi tesis puede presentarse por medio del esquema: *contrastabilidad* =

elevada improbabilidad previa = *parvedad de parámetros* = *sencillez.*

Puede verse que estos dos esquemas coinciden parcialmente; pero se encuentran en oposición directa en el punto decisivo (probabilidad frente a improbabilidad). Véase también el apéndice *VIII.

parte, una *teoría o ley* está representada por una curva logarítmica, entonces las transformaciones de coordenadas del tipo mencionado no entran en juego: en tales casos, no hay que tener en cuenta rotaciones, desplazamientos paralelos o transformaciones de semejanza, ya que —por regla general— una curva logarítmica es una representación gráfica en la que no pueden intercambiarse las coordenadas (por ejemplo, el eje de las x puede representar presión atmosférica, y el de la y, altura sobre el nivel del mar); por esta razón, tampoco tienen importancia aquí las transformaciones de semejanza. Análogas consideraciones son oportunas acerca de oscilaciones *sinusoidales* a lo largo de un eje concreto, por ejemplo, el eje de los tiempos, y también acerca de otros muchos casos.

45. La sencillez de la geometría euclídea

Uno de los argumentos que han desempeñado un papel destacado en la mayoría de las discusiones sobre la teoría de la relatividad ha sido la sencillez de la geometría euclídea. Nadie ha dudado jamás de que ésta es, como tal, más sencilla que cualquier geometría no euclídea de curvatura constante —por no hablar siquiera de las geometrías no euclídeas cuya curvatura varía de un punto a otro.

A primera vista, el tipo de sencillez de que se habla con esto parece tener poco que ver con los grados de falsabilidad. Pero si los enunciados en cuestión se formulan como hipótesis empíricas, encontramos que también en este caso coinciden los conceptos de sencillez y de falsabilidad.

Paremos ahora mientes en qué argumentos pueden ayudarnos a contrastar la hipótesis, «en nuestro mundo tenemos que emplear cierta geometría métrica con tal y cual radio de curvatura». Solamente será posible llevar a cabo una contrastación si identificamos ciertas entidades geométricas con determinados objetos físicos: por ejemplo, las líneas rectas con rayos de luz, o los puntos con intersecciones de hilos. Si adoptamos semejante identificación (una definición coordinadora, o tal vez una definición ostensiva; cf. el apartado 17), puede hacerse ver que la hipótesis de la validez de una geometría euclídea del rayo de luz es falsable en mayor grado que cualquier otra de las hipótesis que —frente a ella— afirman la validez de una geometría no euclídea: pues si medimos la suma de los ángulos de un triángulo formado con rayos luminosos, cualquier desviación apreciable de los 180° falsará la hipótesis euclidiana, mientras que la de una geometría de Bolyai-Lobatschewski con curvatura constante dada será compatible con toda medida concreta que no exceda de los 180°; además, para falsar esta última hipótesis no sólo sería necesario medir la suma de los ángulos, sino también el tamaño (absoluto) del triángulo —lo cual quiere decir que tendría que definirse otra unidad de medida (además de la de ángulos), tal como una unidad de área—. Así pues, vemos que se necesitan más mediciones para llevar a cabo una falsación, que la hipótesis es compatible con mayores variaciones del resultado de aquéllas, y que, por ello, es más difícil de falsar, o sea, es falsable en grado menor. Para decirlo de otro modo: la geometría euclídea es la única geometría métrica con una curvatura determinada en la que son posibles las transformaciones de semejanza; en consecuencia, las figuras pertenecientes a ella pueden ser invariables con respecto a más transformaciones, es decir, pueden ser de menor dimensión —o, más sencillas.

46. El convencionalismo y el concepto de sencillez

Lo que el convencionalista llama «sencillez» no corresponde a lo que yo entiendo por esta palabra. Su idea central y su punto de partida es que ninguna teoría está determinada por la experiencia de un modo libre de ambigüedad: punto en el que estoy de acuerdo. El convencionalista cree también que, por tanto, debe elegir la teoría «más sencilla»; pero como no trata a sus teorías como sistemas falsables, sino como estipulaciones convencionales, lo que quiere decir con «sencillez» es, sin duda alguna, algo muy distinto que el grado de falsabilidad.

Verdaderamente, el concepto convencionalista de sencillez resulta ser, en parte estético y en parte práctico. Por ello, el comentario que sigue de Schlick (cf. el apartado 42) se aplica al concepto convencionalista de sencillez, pero no al mío: «es seguro que sólo puede definirse el concepto de sencillez por una convención, que ha de ser siempre arbitraria»[1]. Es curioso que los mismos convencionalistas no han caído en la cuenta del carácter convencional de su propio concepto fundamental (el de sencillez): y es claro que no se han percatado de ello, pues de otro modo hubieran advertido que su apelación a la sencillez no puede jamás salvarlos de la arbitrariedad, una vez que han escogido el camino de la convención arbitraria.

Desde mi punto de vista, debe decirse que un sistema tiene *el máximo grado de complicación* si — de acuerdo con la práctica convencionalista— se aferra uno a él como a algo establecido de una vez para siempre y que se está decidido a rescatar, en todo momento en que peligre, introduciendo hipótesis auxiliares: pues el grado de falsabilidad de un sistema protegido de tal modo sería igual a *cero*. Así pues, nuestro concepto de sencillez nos lleva otra vez a las reglas metodológicas del apartado 20: especialmente a la regla o principio que nos sujeta para que no nos demos a las hipótesis *ad hoc* y auxiliares —el principio de parquedad en el uso de hipótesis.

---

[1] Schlick, *ibid.*, pág. 148.

La probabilidad

Me ocuparé en este capítulo exclusivamente de la *probabilidad de eventos* y de los problemas que plantea —que surgen en relación con la teoría de los juegos de azar y con las leyes probabilísticas de la física—. Dejaré de lado, por ahora, el problema que puede denominarse de la *probabilidad de hipótesis* —cuestiones tales como la de si una hipótesis contrastada con frecuencia es más probable que otra sometida menos veces a contraste—, que estudiaré en los apartados 79 a 85 bajo el título de «Corroboración».

En la física moderna desempeñan un papel decisivo una serie de ideas que implican la teoría de la probabilidad; pero todavía nos falta una definición satisfactoria y coherente de ésta, o —lo cual viene a ser lo mismo— seguimos careciendo de un sistema axiomático satisfactorio para el cálculo de probabilidades. Las relaciones entre probabilidad y experiencia necesitan aún ser aclaradas; y al investigar este problema descubriremos algo que a primera vista parece ser una objeción casi insuperable a mis tesis metodológicas: pues, aunque los enunciados probabilitarios desempeñan un papel de una importancia tan vital en la ciencia empírica, resultan ser, en principio, *refractarios a toda falsación estricta.* Con todo, esta misma roca en que íbamos a tropezar se convertirá en una piedra de toque sobre la cual contrastar mi teoría, y averiguar qué es lo que vale.

Nos enfrentamos, pues, con dos tareas. *La primera es fundamentar de nuevo el cálculo de probabilidades,* lo cual trataré de hacer desarrollando la teoría de la probabilidad como una teoría de la frecuencia —siguiendo las directrices marcadas por Richard von Mises, pero sin emplear lo que él llama el «axioma de convergencia» (o «axioma del límite»), y con un «axioma de aleatoriedad» algo más débil—. *La segunda tarea consiste en elucidar las relaciones existentes entre probabilidad y experiencia,* lo cual quiere decir tanto como resolver lo que yo llamo *el problema de la decidibilidad de los enunciados probabilitarios.*

Confío en que estas investigaciones contribuirán a aliviar la insatisfactoria situación actual, en la que los físicos emplean abundantemente las probabilidades sin ser capaces de decir de un modo coherente qué significado dan a «probabilidad» *1.

---

*1 A partir de 1934 he realizado tres tipos de cambios en la teoría de la probabilidad:

1) La introducción de un cálculo de probabilidades formal (axiomático), que pue-

47. El problema de la interpretación de los enunciados probabilitarios

Comenzaré distinguiendo dos tipos de enunciados probabilitarios: los que enuncian la probabilidad en forma numérica —a los que llamaré enunciados probabilitarios *numéricos*— y los que no lo hacen de este modo.

Así, el enunciado «la probabilidad de sacar once con dos dados (perfectos) es 1/18» sería un ejemplo de enunciado probabilitario numérico. En cuanto a los no numéricos, pueden ser de diversos tipos. «Es muy probable que obtengamos una mezcla homogénea mezclando agua y alcohol» constituye un ejemplo de un tipo de enunciados que, debidamente interpretados, podrían transformarse quizá en probabilitarios numéricos (como, «la probabilidad de obtener ... está muy cerca de 1»); tenemos un tipo muy distinto de enunciado probabilitario no numérico con «es muy improbable que se descubra un efecto físico que contradiga a la teoría cuántica», el cual —según creo— no puede transformarse en uno numérico, ni equipararse a uno de este tipo, sin alterar su sentido. Me ocuparé primero de los enunciados probabilitarios *numéricos*, y luego de los otros, a los que considero menos importantes.

Ante todo enunciado probabilitario numérico surge siempre la cuestión: «¿Cómo hemos de interpretar un enunciado de este tipo, y —en particular— la afirmación numérica que hace?».

48. Las interpretaciones subjetiva y objetiva

La teoría clásica (de Laplace) de la probabilidad define el valor numérico de una probabilidad como el cociente que se obtiene al dividir el número de casos favorables por el de los casos igualmente posibles. Podemos no tener en cuenta las objeciones lógicas que se

---

de interpretarse de muchos modos: por ejemplo, en el sentido de las interpretaciones lógica y frecuencial debatidas en este libro y también en el de la interpretación de propensiones que discuto en mi *Postscript*.

2) Una simplificación de la teoría frecuencial de la probabilidad, conseguida llevando a cabo el programa de reconstrucción de dicha teoría que subyace a todo este capítulo, de un modo más completo y directo que en 1934.

3) La sustitución de la teoría objetiva de la probabilidad a base de las frecuencias por otra interpretación objetiva —la *interpretación de propensiones*— y la del cálculo frecuencial por el formalismo neoclásico (o de teoría de la medida).

Los dos primeros cambios proceden de 1938, y están indicados en el libro mismo (es decir, en este volumen): el primero en ciertos apéndices nuevos (del *II al *V) y el segundo —que afecta a la argumentación del presente capítulo— en una serie de notas nuevas de este capítulo y en el nuevo apéndice *VI (en cuanto a aquéllas, en la nota *1 del apartado 57 se describe el cambio principal).

El tercero (que introduje de un modo provisional en 1953) está explicado y desarrollado en mi *Postscript*, en donde se le aplica también a los problemas de la teoría cuántica.

han planteado frente a tal definición [1], tales como la de que «igualmente posibles» es otra manera de expresar «igualmente probables»; pero incluso en tal caso difícilménte podemos aceptar que semejante definición nos haga disponer de una interpretación aplicable sin ambigüedades: pues bajo ella se encuentran latentes varias interpretaciones diferentes, que voy a clasificar en los dos grupos de objetivas y subjetivas.

El frecuente uso de expresiones que poseen cierto matiz psicológico —tales como «*esperanza* matemática», «ley normal de *errores*», por ejemplo, etc.— sugiere una *interpretación subjetiva* de la teoría de la probabilidad, que en su forma original es más bien *psicologista:* trata el grado de probabilidad como si fuese una medida de los sentimientos de certidumbre o incertidumbre, de creencia o de duda, que pueden surgir en nosotros ante ciertas aserciones o conjeturas. Cuando lo que nos ocupa son ciertos enunciados no numéricos, la palabra «probable» puede traducirse satisfactoriamente de este modo; pero no me parece muy apropiada una interpretación de los enunciados probabilitarios numéricos que se encamine en esta dirección.

Sin embargo, existe una nueva variante de la interpretación subjetiva [*1], que merece que le dediquemos mayor atención. Esta no interpreta los enunciados probabilitarios psicológica sino *lógicamente:* como aserciones acerca de lo que puede llamarse la «proximidad lógica» [2] de los enunciados. Todos sabemos que éstos pueden encontrarse entre sí en variadas relaciones lógicas, como son las de deductibilidad, incompatibilidad o independencia mutua; pues bien, la teoría lógico-subjetiva —cuyo principal exponente es Keynes [3]— considera la *relación probabilitaria* como un tipo especial de relación lógica entre dos enunciados. Los dos casos extremos de esta relación de probabilidad son la deductibilidad y la contradicción: un enunciado q «da» [4] —según dicen— a otro enunciado p la probabilidad 1 si p se sigue de q; y en caso de que p y q se contradigan mutuamente, la probabilidad

---

[1] Cf., por ejemplo, Von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), páginas 62 y sigs.; 2.ª ed. (1936), págs. 84 y sigs.; trad. ingl., por J. Neyman, D. Sholl y E. Rabinowitsch, *Probability, Statistics and Truth* (1939), págs. 98 y siguientes [trad. esp. por Juan Carlos Grimberg, *Probabilidad, estadística y verdad* (1946), Espasa-Calpe Argentina, págs. 115 y sigs. *(T.)*]. Aunque se suele llamar «de Laplace» a la definición clásica (también en este libro), se remonta por lo menos a la *Doctrine of Chances* (1718) de De Moivre. Véase C. S. Peirce, *Collected Papers* **2**, 1932 (primeramente publicado en 1878), pág. 417, párrafo 2.673, sobre una objeción temprana a la expresión «igualmente posible».

[*1] En el capítulo *II del *Postscript* (en donde se critica en detalle la interpretación subjetiva) discuto más a fondo las razones por las que cuento la interpretación lógica como una variante de la *subjetiva*. Cf. también el apéndice *IX.

[2] Waismann, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs*, *Erkenntnis* **1**, 1930, pág. 237: «la probabilidad así definida es, pues, algo así como una medida de la proximidad lógica o de la conexión deductiva entre los dos enunciados». Cf., asimismo, Wittgenstein, *op. cit.*, Proposición 5.15 y sigs.

[3] J. M. Keynes, *A Treatise on Probability* (1921), págs. 95 y sigs.

[4] Wittgenstein, *op. cit.*, Proposición 5.152: «Si p se sigue de q, la proposición 'q' da a la proposición 'p' la probabilidad 1. La certeza de la conclusión lógica es un caso límite de la probabilidad».

que q da a p es 0. Entre estos extremos se hallan las demás relaciones probabilitarias, que, hablando de un modo aproximado, cabe interpretar del modo siguiente: la probabilidad numérica de un enunciado p (dado el q) es tanto mayor, cuanto menos trasciende su contenido lo que ya se encuentra incluido en aquel enunciado q del que depende la probabilidad de p (y que «da» a éste una probabilidad).

Puede advertirse el parentesco existente entre esta teoría y la psicologista a partir del hecho de que Keynes define la probabilidad como el «grado de creencia racional»; con lo cual quiere decir, la cantidad de confianza que conviene otorgar al enunciado p a la vista de la información o conocimiento que nos dispensa aquel enunciado q que «da» probabilidad a p.

Un tercer modo de interpretar la definición mencionada, la *interpretación objetiva*, considera que todo enunciado probabilitario numérico enuncia algo acerca de la *frecuencia relativa* con que acontece un evento de cierto tipo dentro de una *sucesión de acontecimientos* [5].

Según esta interpretación, el enunciado «la probabilidad de que la próxima tirada de este dado dé un cinco es igual a 1/6» no es realmente una aserción acerca de la próxima tirada, sino sobre toda la *clase de tiradas*, de la cual la próxima es meramente un elemento. El enunciado en cuestión dice únicamente que, dentro de esta clase de tiradas, la frecuencia relativa de los cincos vale 1/6.

De acuerdo con esta tesis, los enunciados probabilitarios numéricos sólo son admisibles en el caso de que se les pueda dar una *interpretación frecuencial*. Los teóricos de la frecuencia acostumbran a soslayar los enunciados probabilitarios de los que no cabe dar una interpretación frecuencial, y especialmente los no numéricos.

En las páginas que siguen trataré de construir de nuevo la teoría de la probabilidad como una *teoría frecuencial* (modificada). Así pues, declaro mi fe en una *interpretación objetiva*, debida principalmente a que creo que sólo una teoría objetiva puede explicar la aplicación del cálculo de probabilidades en la ciencia empírica. Admito abiertamente que la teoría subjetiva es capaz de dar una solución coherente al problema de cómo decidir los enunciados probabilitarios, y que —en general— tropieza con menos dificultades lógicas que la teoría objetiva; pero su solución es que los enunciados probabilitarios son no empíricos, son tautologías, y de ahí que sea enteramente inaceptable cuando recordamos cómo se utiliza la teoría de las probabilidades por la física. (Rechazo la variante de la teoría subjetiva que mantiene que los enunciados probabilitarios objetivos deberían derivarse de suposiciones subjetivas, quizá utilizando como

[5] Sobre la antigua teoría frecuencial, cf. la crítica de Keynes (*op. cit.*, págs. 95 y sigs.), en donde se hace referencia especial a *The Logic of Chance*, de VENN. Acerca de la tesis de Whitehead, cf. el apartado 80 (nota 2). Los principales representantes de la nueva teoría frecuencial son R. von Mises (cf. la nota 1 del apartado 50), Dörge, Kamke, Reichenbach y Tornier. *Una nueva interpretación objetiva, ligada muy estrechamente a la teoría frecuencial pero distinta de ella incluso en el formalismo matemático, es la *interpretación de propensiones*, que introduzco en los apartados *53 y sigs. de mi *Postscript*.

«puente» el teorema de Bernoulli [6]: considero enteramente irrealizable este programa por razones lógicas.)

49. El problema fundamental de la teoría del azar

La aplicación más importante de la teoría de la probabilidad se encuentra en lo que podemos llamar eventos —o acontecimientos— «azarosos» o «aleatorios». Estos se caracterizan, al parecer, por un tipo peculiar de incalculabilidad que le predispone a uno a creer —tras gran número de tentativas infructuosas— que todos los métodos racionales conocidos de predicción han de fallar cuando aquéllos se presentan: tenemos algo así como la sospecha de que no es un científico quien podría predecirlos, sino únicamente un profeta. Y, con todo, justamente esta incalculabilidad es lo que nos hace concluir que es posible aplicar a semejantes eventos el cálculo de probabilidades.

Este modo de concluir, algo paradójico, de la incalculabilidad a la calculabilidad (es decir, a la aplicabilidad de cierto cálculo), pierde enteramente el carácter de paradoja —hay que reconocerlo— si aceptamos la teoría subjetiva. Pero tal forma de sortear la paradoja es extremadamente insatisfactoria, pues entraña la tesis de que el cálculo de probabilidades no es un método de calcular predicciones (frente a lo que ocurre con todos los demás métodos de la ciencia empírica), sino —según esta teoría— meramente un método de llevar a cabo transformaciones lógicas de algo que ya conocíamos; o, mejor, de algo que *no* conocemos, pues precisamente realizamos tales transformaciones cuando carecemos de conocimientos [1]. Verdaderamente, esta concepción disuelve la paradoja, pero *no explica cómo puede contrastarse ni corroborarse un enunciado de ignorancia interpretado como enunciado frecuencial*, y éste es exactamente nuestro problema. ¿Cómo es posible explicar el hecho de que a partir de la incalculabilidad —esto es, de la ignorancia— podamos sacar conclusiones que cabe interpretar como enunciados acerca de frecuencias empíricas, y que encontramos luego brillantemente corroborados por la práctica?

Ni siquiera la teoría frecuencial ha sido capaz hasta ahora de dar una solución satisfactoria a este problema, al que yo llamo *el problema fundamental del azar*. En el apartado 67 haremos ver que tiene cierta relación con el «axioma de convergencia», el cual cons-

[6] Este es el mayor error de Keynes; cf., más abajo, el apartado 62, especialmente la nota 3. *No he cambiado de opinión en este punto, aun cuando creo ahora que el teorema de Bernoulli puede servir de «puente» *dentro* de una teoría objetiva: precisamente entre las propensiones y la estadística. Véanse también el apéndice *IX y los apartados *55 a *57 de mi *Postscript.*

[1] Waismann, en *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 238, dice: «no existe otra razón para introducir el concepto de probabilidad que lo incompleto de nuestro conocimiento». C. Stumpf *(Sitzungsbericht der Bayerischen Akademie der Wissenschaften,* Phil.-hist. Klasse, 1892, pág. 41) sostiene una tesis parecida. *Creo que esta opinión tan extendida tiene la culpa de las peores confusiones, como haré ver circunstanciadamente en mi *Postscript*, capítulos *II y *V.

tituye una parte integrante de la teoría en su estado actual; pero cabe encontrarle una solución satisfactoria dentro del marco de la teoría de la frecuencia, una vez que se elimina el axioma que hemos mencionado: y se encuentra al analizar los supuestos que nos permiten pasar, en una argumentación, de la sucesión irregular de acontecimientos aislados a la regularidad o estabilidad de sus frecuencias.

50. La teoría frecuencial de Von Mises

La primera teoría frecuencial que proporciona unos fundamentos para todos los teoremas principales del cálculo de probabilidades fue propuesta por Richard von Mises [1]. Explicaremos sus ideas fundamentales.

El cálculo de probabilidades es una teoría de ciertas sucesiones de eventos o acontecimientos azarosos o aleatorios: es decir, de eventos reiterados tales como una serie de tiradas con un dado. Se definen estas tiradas como «azarosas» o «aleatorias» por medio de dos condiciones axiomáticas: el *axioma de convergencia* (o *axioma del límite)* y el *axioma de aleatoriedad;* Von Mises llama «colectivo» a toda sucesión de eventos que satisfaga ambas condiciones.

Hablando de un modo tosco, un colectivo es una sucesión de eventos que es capaz, en principio, de ser continuada indefinidamente: por ejemplo, una sucesión de tiradas de un dado que supongamos indestructible. Cada uno de los eventos tiene cierto carácter o *propiedad:* por ejemplo, una tirada puede hacer aparecer un cinco, y entonces tiene la *propiedad cinco*. Si separamos todas las tiradas que han tenido la propiedad cinco —hasta llegar a cierto elemento dentro de la sucesión— y dividimos su número por el número total de tiradas hasta llegar a este elemento (esto es, por el número ordinal de éste en la sucesión), obtenemos la *frecuencia relativa* de los cincos hasta llegar a dicho elemento. Si determinamos ahora la frecuencia relativa de los cincos hasta llegar a cada elemento de la sucesión, obtenemos una nueva sucesión: la *sucesión de las frecuencias relativas de los cincos*. Esta es distinta de la sucesión original de eventos a que corresponde, y a la que podría designarse por «sucesión de eventos» o «sucesión de propiedades».

Tomaré como ejemplo sencillo de colectivo el que podemos llamar «alternativa»; denotamos con este término una sucesión de eventos en que se supone aparecen *únicamente dos propiedades:* por ejemplo, la sucesión de tiradas de una moneda. Llamaremos «1» a una de

---

[1] R. von Mises, *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift* 4, 1919, pág. 1; *Grundlagen der Wahrscheinlichsrechnung, Mathematische Zeitschrift* 5, 1919, pág. 52; *Wahrscheinlichkeit, Statistik, und Wahrheit* (1928), 2.ª ed., 1936, trad. ingl. por J. Neyman, D. Sholl y E. Rabinowitsch: *Probability, Statistics and Truth*, 1939 [vers. esp. por Juan Carlos Grinberg: *Probabilidad, estadística y verdad* (1946), Espasa-Calpe Argentina *(T.)*]; *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik (Vorlesungen über angewandte Mathematik* 1), 1931.

las propiedades (cara) y «0» a la otra (cruz). Entonces puede representarse una sucesión de eventos del modo siguiente:

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

A esta «alternativa» corresponde —o, mejor, está coordinada a la propiedad «1» de esta alternativa— la siguiente sucesión de frecuencias relativas, o «sucesión de frecuencias»[2]:

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{7}{13} \quad \frac{7}{14} \quad \ldots\ldots \qquad \text{(A')}$$

Ahora bien; el *axioma de convergencia* (o «axioma del límite») postula que la sucesión de frecuencias tiende a un *límite* definido al hacerse cada vez mayor la sucesión de eventos. Von Mises emplea este axioma porque tenemos que asegurarnos *un valor fijo de la frecuencia* con el cual podamos trabajar a pesar de que las frecuencias reales tengan valores fluctuantes. En todo colectivo existen, al menos, dos propiedades: y si se nos dan los límites de las frecuencias correspondientes a *todas* las propiedades del colectivo tenemos lo que se llama su «*distribución*».

El *axioma de aleatoriedad* —o, como se le llama a veces, «el principio de exclusión de los sistemas de jugar»— está encaminado a dar expresión matemática al carácter azaroso de la sucesión. Es evidente que un jugador podría mejorar sus posibilidades de ganancia utilizando un sistema de jugar si las sucesiones de tiradas de una perra chica mostrasen ciertas regularidades (por ejemplo, una aparición bastante regular de cruces a continuación de toda serie de tres salidas seguidas de caras). Pues el axioma de aleatoriedad postula, con respecto a todos los colectivos, que no existe un sistema de jugar que les sea aplicable con éxito: postula que —sea cual fuere el sistema de jugar por el que escojamos unas tiradas supuestamente favorables— las frecuencias relativas dentro de la sucesión de *tiradas supuestamente favorables* se aproximarán al mismo límite que las que aparecen en la sucesión de *todas las tiradas*, con tal de que se continúe jugando el número de veces suficiente. Así pues, una sucesión para la que exista un sistema de jugar por cuyo medio el jugador pueda mejorar sus posibilidades de ganar, no será un colectivo en el sentido de Von Mises.

Por tanto, para este autor, la probabilidad es otro término para el «límite de la frecuencia relativa en un colectivo», y de aquí que la

[2] Podemos coordinar con cada sucesión de propiedades tantas sucesiones distintas de frecuencias relativas como propiedades estén definidas en la sucesión. Así pues, en el caso de la alternativa habrá dos sucesiones diferentes; pero éstas pueden deducirse una de otra, ya que son complementarias (los términos correspondientes suman 1); y por esta razón hablo —de un modo breve— de «la (es decir, la única) sucesión de frecuencias relativas coordinada con la alternativa (α)», con lo cual querré siempre decir la sucesión de frecuencias coordinada con la propiedad «1» de dicha alternativa (α).

idea de probabilidad sea *únicamente* aplicable *a sucesiones de eventos:* restricción que es fácil sea enteramente inaceptable desde el punto de vista de Keynes. Von Mises contestó a los críticos que presentaban objeciones contra la estrechez de su interpretación, subrayando la diferencia entre el empleo científico de la probabilidad (por ejemplo, en la física) y sus usos populares: señaló que sería un error pedir que un término científico adecuadamente definido correspondiese en todos los respectos a su utilización precientífica, inexacta.

Según Von Mises, la *tarea del cálculo de probabilidades* consiste pura y exclusivamente en esto: en inferir ciertos «colectivos deducidos» con ciertas «distribuciones deducidas» a partir de determinados «colectivos iniciales» dados con ciertas «distribuciones iniciales» dadas; dicho brevemente: en calcular probabilidades que no están dadas a partir de las que lo están.

Von Mises resume en cuatro puntos los rasgos característicos de su teoría [3]: el concepto de colectivo precede al de probabilidad; este último se define como límite de frecuencias relativas; se formula un axioma de aleatoriedad, y se define la tarea del cálculo de probabilidades.

51. Plan de una nueva teoría de la probabilidad

Los dos axiomas o postulados que Von Mises formula para definir el concepto de colectivo han sufrido fuertes críticas, que —a mi entender— no carecen de justificación. En particular, se han planteado objeciones contra la combinación de un axioma de convergencia con otro de aleatoriedad [1], basándose en que es inadmisible aplicar el concepto matemático de límite —o de convergencia— a una sucesión que, por su misma definición (esto es, por el axioma de aleatoriedad), no ha de estar sujeta a ninguna regla ni ley. Pues el límite matemático no es sino una *propiedad característica de la regla o ley matemática por la que está determinada la sucesión.* Se trata meramente de una propiedad de esta regla o ley si, para una fracción cualquiera elegida arbitrariamente y próxima a cero, existe un elemento de la sucesión tal que todos los que le siguen se separen de cierto valor determinado —llamado su límite— en una cantidad menor que aquella fracción.

Con objeto de salir al paso de semejantes objeciones, se ha propuesto abstenerse de combinar el axioma de convergencia con el de aleatoriedad, y postular sólo aquél, es decir, la existencia de un límite. En cuanto al axioma de aleatoriedad, lo que se propone es, bien abandonarlo completamente (Kamke), bien reemplazarlo por otro requisito más débil (Reichenbach); estas sugerencias presuponen que este último axioma es el causante de las dificultades.

Frente a estas opiniones me siento inclinado a acusar al axioma

---

[3] Cf. Von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1931), pág. 22.

[1] Waismann, *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 232.

de convergencia no menos que al de aleatoriedad. Pienso, por tanto, que es preciso llevar a cabo dos tareas: el perfeccionamiento del axioma de aleatoriedad (lo cual es principalmente un problema matemático) y la eliminación total del axioma de convergencia, cuestión por la que ha de preocuparse especialmente el epistemólogo [2] (cf. el apartado 66).

A continuación me propongo ocuparme primero de la cuestión matemática, y después, de la epistemológica.

La primera de estas tareas, es decir, la reconstrucción de la teoría matemática [3], tiene como principal meta la deducción del teorema de Bernoulli —la primera «ley de los grandes números»— a partir de un *axioma de aleatoriedad modificado:* a saber, modificado de suerte que no se pida más de lo que es necesario para alcanzar dicha meta. O, para ser más preciso, lo que pretendo es deducir la fórmula binomial (a la que a veces se llama «la fórmula de Newton») en lo que yo llamo su «tercera forma»; a partir de ésta pueden obtenerse del modo usual el teorema de Bernoulli y los demás teoremas de límites de la teoría de la probabilidad.

Mi plan consiste en preparar primero una *teoría frecuencial para clases finitas*, y en desarrollar dentro de este marco la teoría cuanto sea posible —esto es, hasta lograr la deducción de la («primera») fórmula binomial—. Esta teoría resulta ser una parte bastante elemental de la teoría de clases, y la expondremos únicamente con objeto de obtener una base para la discusión del axioma de aleatoriedad.

Después continuaré con las *sucesiones infinitas* (es decir, con las sucesiones de eventos que pueden continuarse indefinidamente) por el conocido método de introducir un axioma de convergencia, ya que necesitamos alguno de este tipo para la discusión del axioma de aleatoriedad. Y después de deducir y examinar el teorema de Bernoulli, me ocuparé de *cómo podría eliminarse el axioma de convergencia* y de qué clase de sistema axiomático quedaría como resultado.

En el curso de las deducciones matemáticas emplearé *tres* símbolos de frecuencia diferentes: F'' simbolizará frecuencias relativas en clases finitas; F' será símbolo del límite de las frecuencias relativas de una sucesión de frecuencias infinita, y, finalmente, F habrá de simbolizar la probabilidad objetiva —esto es, la frecuencia relativa en una sucesión «irregular», «aleatoria» o «azarosa».

52. Frecuencia relativa dentro de una clase finita

Consideremos ahora una clase α de un número *finito* de acontecimientos, por ejemplo, la clase de las tiradas con este dado concreto;

[2] Schlick, *en Naturwissenschaften* **19**, 1931, expresa esta preocupación. *Sigo creyendo que ambas tareas tienen importancia; aunque casi logré realizar en el libro lo que me había propuesto, sólo las he llevado a cabo de un modo satisfactorio en el nuevo apéndice *VI.

[3] Publicaré por separado una exposición detallada de la construcción matemática. *Cf. el nuevo apéndice *VI.

esta clase α, que se supone ser una clase *no vacía*, sirve algo así como de marco de referencia, y la llamaremos una *clase de referencia* (finita); en cuanto al número de elementos que pertenecen a ella —o sea, a su número cardinal—, lo denotaremos por «$N(\alpha)$», que ha de leerse «el número de α». Sea ahora β otra clase, finita o no: diremos que β es nuestra clase de propiedades, y puede ser, por ejemplo, la clase de *todas* las tiradas que hacen aparecer un cinco —o, como también diremos, que tienen la propiedad cinco.

La clase de los elementos que pertenecen tanto a α como a β (por ejemplo, la clase de las tiradas hechas ayer con este dado concreto que tenían la propiedad cinco) se llama la clase producto de α y β, y se la denota por «$\alpha \,.\, \beta$», que ha de leerse «α y β». Como $\alpha \,.\, \beta$ es una subclase de α, tiene que contener como máximo un número finito de elementos (y puede ser una clase vacía); «$N(\alpha \,.\, \beta)$» denotará el número de elementos de $\alpha \,.\, \beta$.

Mientras que simbolizamos *números* (finitos) de elementos por N, el símbolo correspondiente a *frecuencias relativas* será F″; por ejemplo, escribiremos «${}_\alpha F''(\beta)$» —que puede leerse «la frecuencia-α de β»— en lugar de «la frecuencia relativa de la propiedad β dentro de la clase finita de referencia α». Podemos definir ahora

$$ {}_\alpha F''(\beta) = \frac{N(\alpha.\beta)}{N(\alpha)} \qquad \text{(Definición 1)} $$

que en nuestro ejemplo querría decir: «la frecuencia relativa de los cinco en las tiradas de ayer con este dado es, por definición, igual al cociente que se obtiene dividiendo el número de cincos sacados ayer con este dado por el número total de tiradas hechas ayer con este dado» *1.

A partir de esta definición bastante trivial se pueden deducir muy fácilmente los teoremas del *cálculo de frecuencias en clases finitas* (en particular, el teorema general de multiplicación, el teorema de adición y los teoremas de división, esto es, las reglas de Bayes; cf. el apéndice II). Es característico de los teoremas de este cálculo de frecuencias —y de los del cálculo de probabilidades en general— que nunca aparecen en ellos los números cardinales (números N), sino únicamente frecuencias relativas (esto es, razones o números F); los números N sólo aparecen en las demostraciones de unos pocos teoremas fundamentales que se deducen directamente de la definición, pero no en los teoremas mismos *2.

---

*1 Desde luego, la definición 1 se refiere a la clásica definición de probabilidad como razón de los casos favorables a los igualmente posibles, pero debe distinguirse claramente de ésta, ya que aquí no se asume que los elementos de α sean «igualmente posibles».

*2 Escogiendo un conjunto de fórmulas-F de las que puedan deducirse otras fórmulas-F, obtenemos un *sistema axiomático* formal *para la probabilidad;* compárense los apéndices II, *II, *IV y *V.

Haremos ver ahora cómo ha de entenderse esto valiéndonos de un ejemplo muy sencillo (damos otros en el apéndice II). Denotemos con «$\bar{\beta}$» la clase de todos los elementos que no pertenecen a β (léase, «el complemento de β», o, simplemente, «no β»); podemos escribir ahora:

$$_{\alpha}F''(\beta) + {}_{\alpha}F''(\bar{\beta}) = 1$$

Este teorema contiene solamente números F, pero su demostración emplea los números N; pues se sigue de la definición 1 por medio de un teorema sencillo del cálculo de clases que afirma que $N(\alpha . \beta) + N(\alpha . \bar{\beta}) = N(\alpha)$.

53. Selección, independencia, insensibilidad, intrascendencia

Entre todas las operaciones que pueden ejecutarse con frecuencias relativas de clases finitas, la de *selección*[1] tiene una importancia especial para lo que sigue.

Supongamos que estén dadas, una clase de referencia finita, α —por ejemplo, la clase de los botones que hay en una caja—, y dos clases de propiedades, β (digamos, los botones rojos) y γ (los botones grandes, por ejemplo). Tomamos ahora la clase producto $\alpha . \beta$ como *nueva clase de referencia,* y planteamos la cuestión del valor de $_{\alpha . \beta}F''(\gamma)$, esto es, de la frecuencia de γ en la nueva clase de referencia[2]. A esta última, $\alpha . \beta$, puede llamársela «el resultado de seleccionar elementos β de α», o bien la «selección de α según la propiedad β», ya que podemos considerarla obtenida por selección dentro de α de todos los elementos (botones) que tienen la propiedad β (ser rojos),

Ahora bien; puede ocurrir que γ aparezca en la nueva clase de referencia, $\alpha . \beta$, con la misma frecuencia relativa que en la clase de referencia original, α; es decir, puede cumplirse

$$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {}_{\alpha}F''(\gamma)$$

En este caso, decimos (siguiendo a Hausdorff[3]) que las propiedades β y γ son «*mutuamente independientes* dentro de la clase de referencia α». La relación de independencia es una relación triádica, y simétrica en las propiedades β y γ[4]. Si dos propiedades β y γ son

---

[1] El término de Von Mises es «*elección*» («*Auswahl*»).

[2] El teorema general de división contesta a la cuestión que aquí planteo (cf. el apéndice II).

[3] Hausdorff, *Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Ges. d. Wissenschaften,* Leipzig, Mathem.-physik. Klasse 53, 1901, pág. 158.

[4] Es incluso triplemente simétrica —esto es, para α, β y γ— si asumimos que β y γ son también *finitas.* Para la demostración de nuestra aserción de simetría, cf. el apéndice II (1^s) y (1_s). *La condición de finitud que afirmo en esta nota no es suficiente para la triple simetría; quizá he tratado de expresar la condición de que β y γ estén acotadas por la clase finita de referencia α, o —lo cual es más probable—

(mutuamente) independientes dentro de una clase de referencia α, podemos decir que la propiedad γ es —dentro de α— *insensible* a la selección de elementos β; o quizá que la clase de referencia α es —con respecto a la propiedad γ— insensible a la selección realizada según la propiedad β.

Cabe también interpretar la independencia mutua —o insensibilidad— de β y γ dentro de α, desde el punto de vista de la teoría subjetiva, del modo siguiente: si se nos informa de que un elemento concreto de la clase α tiene la propiedad β, esta información es *intrascendente* [en ingl., *irrelevant*] si es que β y γ son mutuamente independientes dentro de α: a saber, intrascendente para la cuestión de si semejante elemento tiene o no, asimismo, la propiedad γ [*1]. Si, por el contrario, sabemos que γ aparece más a menudo (o menos a menudo) en la subclase $\alpha . \beta$ (que se ha seleccionado a partir de α de acuerdo con la propiedad β), entonces la información de que un elemento tiene la propiedad β es *trascendente* [en ingl., *relevant*] para la cuestión de si este elemento posee también o no la propiedad γ [5].

54. Sucesiones finitas. Selecciones ordinal y de vecindad

Supongamos que los elementos de una clase finita de referencia, α, estén *numerados* (por ejemplo, que haya escrito un número en cada botón de los que están en la caja) y dispuestos en una *sucesión*, de acuerdo con su número ordinal. En una sucesión de este tipo podemos distinguir dos tipos de selección que tienen una importancia especial: a saber, la que se hace de acuerdo con el número ordinal del elemento —brevemente, la selección ordinal— y la que atiende a su vecindad.

La *selección ordinal* consiste en efectuar una selección a partir de la sucesión α teniendo en cuenta una propiedad β que depende del número ordinal del elemento (sobre cuya selección se ha de decidir). Por ejemplo, β puede ser la propiedad de ser *par*, de modo que seleccionaríamos de α todos los elementos cuyo número ordinal fuese par: obtendríamos así una *subsucesión seleccionada*. En caso de que

que α debería ser nuestro universo finito del discurso (que son condiciones suficientes). El ejemplo siguiente hace ver la insuficiencia de la condición formulada en la nota: tómese un universo de cinco botones, de los que cuatro sean redondos (α), dos redondos y negros ($\alpha\beta$), dos redondos y grandes ($\alpha\gamma$), uno redondo, negro y grande ($\alpha\beta\gamma$) y uno cuadrado, negro y grande ($\bar{\alpha}\beta\gamma$); no tenemos triple simetría, ya que $_{\alpha}F''(\gamma) \neq {}_{\beta}F''(\gamma)$.

*1 Así pues, cualquier información acerca de la posesión de propiedades es trascendente, o intrascendente, si y sólo si las propiedades en cuestión son, respectivamente, dependientes, o independientes. De ahí que pueda definirse la trascendencia a base de la independencia, aunque no a la inversa (cf. la próxima nota y la *1 del apartado 55).

5 Keynes ha puesto objeciones a la teoría frecuencial porque ha creído que era imposible definir la *trascendencia* dentro de ella: cf. *op. cit.*, págs. 103 y sigs. * De hecho, la teoría subjetiva no puede definir la *independencia* (objetiva), lo cual constituye una seria objeción a aquélla, como pongo de manifiesto en mi *Postscript*, capítulo *II, especialmente los apartados *40 a *43.

una propiedad γ sea independiente de la selección ordinal que atiende a β, podemos decir también que la *selección ordinal* es independiente con respecto a γ; o que la sucesión α es —con respecto a γ— insensible a la selección de elementos β.

La *selección de vecindad* es posible por el hecho de que se crean ciertas relaciones de vecindad al ordenar los elementos de una sucesión numerada. Esto nos permite, por ejemplo, seleccionar todos los elementos cuyo predecesor inmediato tenga la propiedad γ; o bien, aquellos cuyos predecesores primero y segundo —o cuyo sucesor segundo— tengan la propiedad γ; etc.

Así pues, si tenemos una sucesión de eventos —digamos, de tiradas de una moneda— hemos de distinguir dos clases de propiedades: las primarias (del tipo de «caras» o «cruces»), que pertenecen a cada elemento independientemente de su situación en la sucesión; y las secundarias, como «par» o «sucesor de una cruz», que los elementos adquieren en virtud de su posición en la sucesión.

Se designa con el nombre de «alternativa» a una sucesión con dos propiedades primarias. Como ha hecho ver Von Mises, si se pone suficiente cuidado es posible desarrollar las partes esenciales de la teoría de la probabilidad como una teoría de las alternativas, sin por ello perder generalidad. Si denotamos las dos propiedades primarias de una alternativa por las cifras «1» y «0», cabe representar toda alternativa por una sucesión de unos y ceros.

Ahora bien; la estructura de una alternativa puede ser *regular* o bien más o menos *irregular*. Estudiaremos a continuación más circunstanciadamente la regularidad o irregularidad de ciertas alternativas finitas *[1].

55. Libertad-*n* en sucesiones finitas

Partamos de una alternativa finita, α, por ejemplo, de una que consista en mil unos y ceros dispuestos regularmente del modo que sigue:

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ldots \qquad (\alpha)$$

En esta alternativa tenemos una equidistribución, es decir, las frecuencias relativas de los unos y de los ceros son iguales. Si denotamos la frecuencia relativa de la propiedad 1 por «F″(1)», y por «F″(0)» la de 0, podemos escribir:

$$_{\alpha}F''(1) = {_{\alpha}F''}(0) = \tfrac{1}{2} \qquad (1)$$

Seleccionamos ahora de α todos los términos que tienen la propiedad de vecindad de *suceder inmediatamente a un uno* (dentro de la suce-

*[1] Pueden omitirse los apartados 55 a 64 —o quizá solamente los 56 a 64— en una primera lectura. Quizá sea incluso recomendable pasar directamente desde aquí —o desde el final del apartado 55— al capítulo X.

sión α). Denotando esta propiedad por «β», podemos llamar «α . β» a la subsucesión seleccionada, que tendrá la siguiente estructura:

$$1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots \qquad (\alpha.\beta)$$

Esta sucesión es, a su vez, una alternativa con equidistribución; además, ni la frecuencia relativa de los ceros ni la de los unos han cambiado; de modo que tenemos

$$_{\alpha.\beta}F''(1) = {_\alpha}F''(1)\,; \quad _{\alpha.\beta}F''(0) = {_\alpha}F''(0)\,. \qquad (2)$$

Según la terminología introducida en el apartado 53, podemos decir que *las propiedades primarias de la alternativa α son insensibles* a una selección que se haga teniendo en cuenta la propiedad β; o, más brevemente, que α es insensible a la selección según β.

Puesto que todo elemento de α, o bien tiene la propiedad β (la de ser sucesor de un uno) o bien la de ser sucesor de un cero, podemos denotar esta segunda propiedad por «$\bar{\beta}$». Si seleccionamos ahora los miembros que tienen la propiedad $\bar{\beta}$ llegamos a la alternativa:

$$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots \qquad (\alpha.\bar{\beta})$$

Esta sucesión ofrece una desviación muy leve respecto de una equidistribución, ya que comienza y termina con cero (puesto que α misma termina con «0,0» debido a su equidistribución): si α contiene dos mil elementos, α . $\bar{\beta}$ contendrá quinientos ceros y solamente cuatrocientos noventa y nueve unos. Estas desviaciones con respecto a la equidistribución (o a otras distribuciones) proceden sólo del primero o del último elemento, y pueden hacerse tan pequeñas como se quiera sin más que tomar una sucesión suficientemente larga; por esta razón no las tendremos en cuenta en lo sucesivo, especialmente dado que nuestra investigación ha de ampliarse a las sucesiones infinitas, en las que aquéllas desaparecen; por tanto, diremos que la alternativa α . $\bar{\beta}$ tiene una equidistribución, o bien que la alternativa α es *insensible* a la selección de elementos con la propiedad $\bar{\beta}$. En consecuencia, α —o, mejor, la frecuencia relativa de las propiedades primarias de α— es insensible tanto a la selección que atiende a β como a la que atiende a $\bar{\beta}$; y podemos decir, pues, que α es insensible a *toda* selección que atienda a la propiedad del *predecesor inmediato.*

Es claro que tal insensibilidad se debe a determinados aspectos de la estructura de la alternativa α, los cuales pueden distinguirla de otras alternativas: así, las alternativas α . β y α . $\bar{\beta}$ *no* son insensibles a la selección ejecutada de acuerdo con la propiedad de un predecesor.

Podemos estudiar ahora la alternativa α para ver si es insensible a otras selecciones, especialmente a la selección según la propiedad de un *par* de predecesores. Por ejemplo, podemos seleccionar de α

todos los elementos que sean sucesores de una pareja 1,1. Vemos inmediatamente que α *no* es insensible a la selección del sucesor de cualquiera de los posibles pares 1,1; 1,0; 0,1 y 0,0: en ninguno de estos casos tienen una equidistribución las subsucesiones resultantes; por el contrario, consisten todas en *bloques* ininterrumpidos (o *«iteraciones»)*, es decir, en unos exclusivamente o ceros exclusivamente.

Desde el punto de vista de la teoría subjetiva, el hecho de que α sea insensible a la selección según predecesores aislados, pero no a la que atiende a parejas de predecesores, podría expresarse del modo siguiente: la información acerca de la propiedad de un predecesor de un elemento de α es intrascendente para la cuestión de la propiedad de este elemento. Por otra parte, la información sobre las propiedades de su par de predecesores tiene la máxima trascendencia, ya que, dada la ley con arreglo a la cual está construida α, nos permite *predecir* la propiedad del elemento en cuestión: la información acerca de las propiedades de su par de predecesores nos proporciona, por decirlo así, las condiciones iniciales que necesitamos para deducir la predicción. (La ley con arreglo a la cual está construida α requiere como condiciones iniciales un par de propiedades, y, por tanto, es «bidimensional» con respecto a éstas. La especificación de *una* propiedad es «intrascendente» sólo por tener un grado de composición insuficiente para servir de condición inicial. Cf. el apartado 38*[1].)

Teniendo en cuenta lo estrechamente que está relacionada la idea de causalidad —o de *causa y efecto*— con la deducción de predicciones, emplearé de ahora en adelante los términos que indico a continuación. La aserción hecha más arriba acerca de la alternativa α, a saber, «α es insensible a la selección según predecesores *aislados*», la expresaré ahora diciendo: «α está libre de secuelas de predecesores *aislados»;* o, con mayor brevedad, «α es libre-1». Y en lugar de decir, como antes, que α es (o no es) insensible a la selección «que atiende a *parejas* de predecesores», diré ahora: «α (no) está libre de secuelas de *parejas* de predecesores», o, sucintamente, «α (no) es libre-2» *[2].

---

*[1] Tenemos con esto otra indicación de que los términos «trascendente» e «intrascendente» [en ingl., *relevant* e *irrelevant*], que figuran con tal profusión en la teoría subjetiva, son enormemente engañosos; pues si p es intrascendente, y lo mismo le ocurre a q, no deja de ser sorprendente saber que $p.q$ puede tener la máxima trascendencia. Véase también el apéndice *IX, especialmente los puntos 5 y 6 de la primera nota.

*[2] Yo he introducido la idea general de distinguir entre vecindades de acuerdo con su tamaño, y la de operar con selecciones de vecindad perfectamente definidas; pero el término «libre de secuelas» *(«nachwirkungsfrei»)* se debe a Reichenbach, aun cuando este autor lo empleaba entonces sólo en el sentido absoluto de «insensible a la selección realizada según un grupo precedente *cualquiera* de elementos». También es mía la idea de introducir un concepto *definible por recurrencia* de libertad-1, libertad-2, ... libertad-n, y de emplear, por tanto, el método recurrente para analizar selecciones de vecindad y, especialmente, para *construir sucesiones aleatorias* (también he utilizado tal método para definir la independencia mutua de n eventos). Este método es enteramente distinto del de Reichenbach, aunque él emplea uno de sus términos en un sentido modificado; véanse también, más abajo, la nota 4 del apartado 58 y —en especial— la 2 del apartado 60.

Empleando como prototipo la alternativa libre-1 α, podemos construir fácilmente otras sucesiones, asimismo con equidistribución, que no solamente estén libres de secuelas debidas a un predecesor, es decir, que sean libres-1 (como α), sino que, además, estén libres de secuelas de un par de predecesores, esto es, que sean libres-2; luego podemos pasar a sucesiones que sean libres-3, etc. Y de este modo llegamos a una idea general que es fundamental para lo que sigue: la de libertad frente a secuelas de todos los grupos de antecesores hasta el número n, o —como diremos— la de libertad-n. Con mayor precisión: diremos que una secuencia es «libre-n» si y sólo si las frecuencias relativas de sus propiedades primarias son «insensibles-n», o sea, insensibles a la selección según predecesores aislados, y a la selección según pares de predecesores, y según ternas de predecesores ... y según acervos-n de predecesores [1].

Puede construirse una alternativa α libre-1 reiterando el *período generador*

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \tag{A}$$

un número cualquiera de veces. Análogamente, obtenemos una alternativa libre-2 con equidistribución si tomamos

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \tag{B}$$

como período generador. Con el período generador

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \tag{C}$$

se llega a una alternativa libre-3, y a partir del período generador

$$0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \tag{D}$$

se forma una alternativa libre-4. Puede observarse que la impresión —intuitiva— de encontrarse frente a una sucesión irregular aumenta al crecer el número n que define su libertad-n.

El período generador de una alternativa libre-n con equidistribución ha de contener al menos 2^{n+1} elementos. Por otra parte, los períodos que hemos dado pueden empezar, naturalmente, en sitios diferentes: (C), por ejemplo, puede comenzar con su cuarto elemento, y en su lugar obtendríamos

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \tag{C'}$$

Existen otras transformaciones que tampoco alteran la libertad-n

[1] Como el doctor K. Schiff me ha señalado, cabe simplificar esta definición: basta pedir insensibilidad a la selección de cualquier acervo-n predecesor (para un n dado); y entonces es posible demostrar fácilmente la insensibilidad a la selección de acervos-n—1 (etc.).

de una sucesión. En otro lugar *[3] describiremos un método de construir períodos generadores de sucesiones libres-*n*, para todo número *n*.

Si al período generador de una alternativa libre-*n* añadimos los *n* primeros elementos del período siguiente, llegamos a una sucesión de longitud $2^{n+1} + n$, que tiene —entre otras— la *siguiente propiedad*: en ella aparece, por lo menos una vez, toda distribución de $n + 1$ ceros y unos, es decir, todo acervo-*n* posible *[4].

56. Sucesiones de segmentos. Primera forma de la fórmula binomial

Dada una sucesión finita α, a una subsucesión de α que conste de *n* elementos consecutivos le llamamos un «segmento de α de longitud *n*», o, más brevemente, un «segmento-*n* de α». Si se nos da un número determinado *n* además de la sucesión α, podemos distribuir los segmentos-*n* de α en una sucesión, que será la *sucesión de los segmentos-n* de α. Si se nos da una sucesión α, podemos construir una nueva sucesión formada con segmentos-*n* de α, del modo siguiente: empezamos con el segmento formado por los *n* primeros elementos de α; luego viene el segmento constituido por los elementos 2 a $n + 1$ de α; en general, tomamos para elemento *x* de la nueva sucesión el segmento formado por los elementos *x* a $x + n - 1$ de α; podemos llamar «sucesión de los segmentos-*n* imbricados de α» a la nueva sucesión así obtenida: este nombre indica que dos elementos (esto es, segmentos) consecutivos cualesquiera de la nueva sucesión están imbricados de modo que tienen comunes $n - 1$ elementos de la sucesión original α.

Podemos obtener ahora, por selección, otras sucesiones-*n* a partir de la sucesión de segmentos imbricados: especialmente, *sucesiones de segmentos-n adyacentes*.

Una sucesión de segmentos-*n* adyacentes contiene sólo aquellos segmentos-*n* que se siguen inmediatamente, sin imbricación, en α. Por ejemplo: puede empezar con el segmento-*n* formado por los elementos numerados de 1 a *n* en la sucesión original α, a éste seguir los correspondientes a los elementos $n+1$ a $2n$, $2n+1$ a $3n$, etc. En general, una sucesión de segmentos adyacentes comenzará por el ele-

---

*[3] Cf. la nota *1 del apéndice IV. Resulta una sucesión de longitud $2^n + n - 1$ tal, que al suprimir los $n - 1$ últimos elementos obtenemos un período generador de una alternativa libre-*m*, en que $m = n - 1$.

*[4] Parece apropiada la siguiente definición, que es aplicable a una alternativa A de longitud dada cualquiera pero finita, y con equidistribución. Sea N la longitud de A, y *n* el mayor entero tal que $2^{n+1} \leqslant N$; se dice que A es *perfectamente aleatoria* si y sólo si el número relativo de apariciones de cualquier pareja, terna, ..., acervo-*m* (hasta $m = n$) dados, discrepa del correspondiente a cualesquiera otros pareja, terna, ..., acervo-*m* en una cantidad no mayor —respectivamente— que $m/N^{1/2}$, digamos. Mediante esta caracterización es posible decir de una alternativa dada A cualquiera que es, aproximadamente, aleatoria, e incluso podemos definir el grado de su aproximación. Cabe basar una definición más completa en el método (de hacer máxima mi función E) descrito en los puntos 8 y sigs. de mi «Tercera nota», reimpresa aquí en el apéndice *IX.

mento k-ésimo de α, y sus segmentos contendrán los elementos de α numerados de k a $n+k-1$, de $n+k$ a $2n+k-1$, de $2n+k$ a $3n+k-1$, etc.

En lo sucesivo, denotaremos con «$\alpha_{(n)}$» la sucesiones de segmentos-n imbricados, y con «α_n» las sucesiones de segmentos-n adyacentes.

Prestemos ahora algo más de atención a las sucesiones de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$. Cada elemento de esta sucesión es un segmento-n de α. Podemos considerar como propiedad primaria de un elemento de $\alpha_{(n)}$, por ejemplo, el acervo-n ordenado de ceros y unos en que consiste dicho elemento; o, más sencillamente, tomar como propiedad primaria del mismo el *número de sus unos* (dejando de lado, pues, el *orden* de los unos y los ceros): es claro que si denotamos el número de unos con m, tenemos $m \leq n$.

Ahora bien; a partir de toda sucesión $\alpha_{(n)}$ obtenemos otra *alternativa* al seleccionar un m concreto $(m \leq n)$ y adscribir la propiedad «m» a todo elemento de la sucesión $\alpha_{(n)}$ que tenga exactamente m unos (y, por tanto, $n-m$ ceros) y la propiedad $\overline{m}$ (no m) a todos los demás elementos de $\alpha_{(n)}$; por tanto, todo elemento de $\alpha_{(n)}$ ha de poseer una de estas dos propiedades.

Imaginemos ahora de nuevo que se nos da una alternativa finita α con las propiedades primarias «1» y «0», y supongamos que la frecuencia de los unos, $_{\alpha}F''(1)$, es igual a p, y que la de los ceros, $_{\alpha}F''(0)$, es igual a q (no asumimos que se trate de una equidistribución, en la que sería $p=q$).

Partiendo de que la alternativa α sea al menos libre-n—1 (siendo n un número natural arbitrario), podemos preguntar lo siguiente: ¿con qué frecuencia aparece la propiedad m en la sucesión $\alpha_{(n)}$?; o, dicho de otro modo, ¿cuál será el valor de $_{\alpha_{(n)}}F''(m)$?

Con los recursos de la aritmética elemental podemos resolver esta cuestión [1], sin apoyarnos en otro supuesto que el de que α sea al menos libre-n—1. Y la respuesta se halla contenida en la fórmula siguiente, cuya demostración se encontrará en el apéndice III:

$$_{\alpha_{(n)}}F''(m) = {}^{n}C_{m}\, p^{m} q^{n-m} \qquad (1)$$

El segundo miembro de la fórmula «binomial» (1) fue obtenido —en un contexto diferente— por Newton (y por ello se le llama, a veces, fórmula de Newton); designaré aquélla como «primera forma de la fórmula binomial» *1.

---

[1] Llamo «problema bernoulliano» (siguiendo a Von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1931, pág. 128) al problema correspondiente para sucesiones infinitas de segmentos adyacentes; y con referencia a las sucesiones infinitas de segmentos imbricados, le denomino «el problema casi bernoulliano» (cf. la nota 1 del apartado 60). Por lo que el problema que aquí estudio sería el *problema casi bernoulliano para sucesiones finitas.*

*1 En el texto original empleaba el término «fórmula de Newton»; pero como parece ser poco usado en inglés, me he decidido a traducirlo por «fórmula binomial» [ambas expresiones son corrientes en castellano *(T.)*].

Una vez llegados a esta fórmula, abandonaré la teoría frecuencial en lo que respecta a clases de referencia *finitas;* y dicha fórmula nos proporcionará los fundamentos para la discusión del axioma de aleatoriedad.

57. Sucesiones infinitas. Estimaciones frecuenciales hipotéticas

Es sumamente fácil extender los resultados obtenidos con sucesiones finitas libres-*n* a sucesiones infinitas libres-*n* definidas por un *período generador* (cf. el apartado 55). Podemos denominar «sucesión de referencia» a una sucesión infinita de elementos que desempeñe el papel de clase de referencia a la que se refieran las frecuencias relativas; que corresponde, más o menos, a «colectivo» en el sentido de Von Mises *[1].

El concepto de libertad-*n* presupone el de frecuencia relativa, ya que aquello que su definición exige que sea insensible —insensible a toda selección que tenga en cuenta determinados predecesores— es precisamente la *frecuencia relativa* con que aparece una propiedad determinada. En nuestros teoremas que se ocupan de sucesiones infinitas emplearé —pero sólo provisionalmente (hasta el apartado 64)— la idea de *límite de frecuencias relativas* (denotado por F′) para remplazar a la de *frecuencia relativa en clases finitas* (F″). Con tal de que nos limitemos a sucesiones de referencia construidas *de acuerdo con una regla matemática determinada*, la utilización de aquel concepto no nos plantea problemas, ya que siempre podemos determinar —en el caso de las sucesiones dichas— si la sucesión correspondiente

---

*[1] Llego aquí al punto en que no logré llevar a cabo del todo mi programa intuitivo: es decir, el de analizar la aleatoriedad cuanto fuese posible dentro de la región de las sucesiones *finitas*, y sólo cuando esto estuviese hecho continuar en lo que respecta a las *infinitas* (en las que necesitamos *límites* de frecuencias relativas), con objeto de llegar a una teoría en que la existencia de límites frecuenciales se siguiese del carácter aleatorio de la sucesión. Podría haber realizado dicho programa muy fácilmente si mi paso siguiente hubiese consistido en construir sucesiones (finitas) libres-*n mínimas* para *n* creciente, como hice en el antiguo apéndice IV: puede mostrarse sin dificultad que si en tales sucesiones mínimas se hace crecer *n* sin fin y sin límite, éstas se convierten en infinitas y las frecuencias pasan a límites frecuenciales, sin necesidad de nuevos supuestos (véanse la nota *2 del apéndice IV y el nuevo apéndice *VI). De este modo se hubieran simplificado los próximos apartados, que —ello no obstante— conservan su significación; mas hubiera resuelto completamente y sin necesidad de asumir nada más los problemas de los apartados 63 y 64, puesto que al hacerse demostrable la existencia de límites ya no es preciso mencionar los puntos de acumulación.

Sin embargo, todos estos perfeccionamientos permanecen dentro del marco de la pura teoría frecuencial; y —excepto en la medida en que definen un tipo ideal de desorden objetivo— resultan innecesarios si adoptamos una interpretación de propensiones del formalismo neoclásico (de la teoría de la medida), tal como se explica en los apartados *53 y sigs. de mi *Postscript.* Pero incluso en este caso sigue siendo necesario hablar de hipótesis frecuenciales, esto es, de estimaciones hipotéticas y de sus contrastaciones estadísticas; por lo cual, el presente apartado sigue teniendo trascendencia; y lo mismo ocurre a gran parte de los siguientes, hasta el 64.

de frecuencias relativas es convergente o no; y solamente origina dificultades si se trata de sucesiones para las que no se da regla matemática alguna, sino solamente empírica (por ejemplo, cuando se determina la sucesión por las tiradas de una moneda): pues en estos casos no está definido el concepto de límite (cf. el apartado 51).

Veamos un ejemplo de regla matemática para construir una sucesión: «el *n*-ésimo elemento de la sucesión α será 0 si y sólo si *n* es divisible por cuatro». Así queda definida la alternativa infinita

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \qquad (\alpha)$$

cuyos límites de frecuencias relativas son ${}_{\alpha}F'(1) = 3/4$ y ${}_{\alpha}F'(0) = 1/4$. Por razones de brevedad llamaré «*sucesiones matemáticas*» a las que, como la anterior, se definen por medio de una regla matemática.

Por el contrario, tendríamos un ejemplo de una regla para construir una *sucesión empírica* en la siguiente: «el *n*-ésimo elemento de la sucesión α será 0 si y sólo si en la *n*-ésima tirada de la moneda sale cruz». Pero no es necesario que las reglas empíricas definan siempre sucesiones de carácter aleatorio; por ejemplo, yo llamaría empírica a la regla siguiente: «el *n*-ésimo elemento de la sucesión será 1 si y sólo si en el *n*-ésimo segundo (a partir de un instante cero fijado) el péndulo *p* se encuentra a la izquierda de su posición de reposo».

Este ejemplo hace ver que, en ocasiones, será posible remplazar una regla empírica por una matemática: así, basándonos en ciertas hipótesis y mediciones relativas a un péndulo determinado. Podemos encontrar, de este modo, una sucesión matemática que se aproxime a nuestra frecuencia empírica, y ello con un grado de precisión que puede satisfacernos o no, según la finalidad que tengamos a la vista. Mas para lo que estamos tratando ahora tiene un interés especial la posibilidad (de la que es muestra nuestro ejemplo) de obtener una sucesión matemática cuyas diversas *frecuencias* se aproximen a las de cierta sucesión empírica.

Al dividir las sucesiones en matemáticas y empíricas establezco una distinción que más podría llamarse «intensional» que «extensional». Pues si se nos da una sucesión «extensionalmente», esto es, por enumeración de sus elementos uno tras otro —con lo cual podremos conocer sólo una parte de ella, un segmento finito, por largo que sea— es imposible determinar, a partir de las propiedades de tal segmento, si la sucesión de que forma parte es matemática o empírica: únicamente podemos decidir si una sucesión es de uno u otro tipo si se nos da una regla de construcción, es decir, una regla «intensional».

Puesto que queremos manejar las sucesiones infinitas valiéndonos del concepto de límite (de las frecuencias relativas), hemos de restringir nuestra investigación a sucesiones matemáticas, y precisamente a aquéllas cuya sucesión correspondiente de frecuencias relativas sea convergente; restricción que equivale a un axioma de convergencia. (No nos ocuparemos de los problemas que suscita este axioma hasta llegar a los apartados 63 a 66, ya que es conveniente tratarlos al mismo tiempo que la «ley de los grandes números».)

Así pues, nos cuidaremos exclusivamente de *sucesiones matemáticas;* pero sólo de aquéllas de que podamos esperar, o conjeturar, que se aproximan —en lo que respecta a las frecuencias— a las *sucesiones empíricas de carácter azaroso o aleatorio,* ya que, principalmente, nos interesamos por éstas. Mas esperar —o conjeturar— que una sucesión matemática se aproximará, en lo que se refiere a las frecuencias, a una empírica, no es otra cosa que *formar una hipótesis,* y precisamente una hipótesis acerca de las frecuencias de la sucesión empírica [1].

El hecho de que nuestras estimaciones de las frecuencias en sucesiones empíricas aleatorias sean hipótesis, no tiene ninguna influencia sobre el modo en que podemos calcular tales frecuencias. Indudablemente, en lo que respecta a clases *finitas,* no importa lo más mínimo la manera en que se obtienen las frecuencias con las cuales empezamos nuestros cálculos: podemos haberlas hallado por un recuento real, mediante una regla matemática o a partir de hipótesis variadas; podemos, incluso, haberlas inventado, simplemente. Al calcular frecuencias aceptamos unas como dadas, y de ellas deducimos otras frecuencias.

Lo mismo ocurre con nuestras estimaciones de frecuencias en sucesiones *infinitas.* Así pues, la cuestión de las «fuentes» de nuestras estimaciones de frecuencias no es un problema del cálculo de probabilidades; lo cual, sin embargo, no quiere decir que esté excluida de nuestra discusión de los problemas de la teoría de la probabilidad.

En el caso de sucesiones empíricas infinitas podemos distinguir dos «fuentes» principales de nuestras estimaciones hipotéticas de frecuencias, es decir, dos maneras en que pueden aparecérsenos como verosímiles: una es la estimación que se basa en una «*hipótesis equiazarosa*» (o hipótesis de igual probabilidad), y la otra se apoya en una *extrapolación de resultados estadísticos.*

Con «*hipótesis equiazarosa*» me refiero a una hipótesis que afirme que las probabilidades de las diversas propiedades primarias son iguales: hace una aserción de *equidistribución;* estas hipótesis se suelen apoyar en consideraciones de *simetría* [2]. Tenemos un ejemplo muy típico en la conjetura de que al tirar un dado se obtendrán frecuencias iguales, la cual se basa en la simetría y la equivalencia geométrica de las seis caras del cubo.

En cuanto a las hipótesis frecuenciales basadas en una *extrapolación estadística,* las tasas de mortalidad estimadas constituyen un buen ejemplo. En este caso, se averiguan datos estadísticos acerca de la mortalidad; y *sobre la hipótesis de que las tendencias observadas*

---

[1] Discutiré más adelante, en los apartados 65 a 68, el *problema de la decidibilidad* de las hipótesis frecuenciales: esto es, el de si puede someterse a contraste una conjetura o hipótesis de esta índole, y —en caso afirmativo— de cómo, de si cabe corroborarla de algún modo, y de si es falsable. *Cf., asimismo, el apéndice *IX.

[2] Keynes se ocupa de estas cuestiones en su análisis del *principio de indiferencia.* Cf. *op. cit.,* cap. IV, págs. 41-64.

continuarán siendo estables muy aproximadamente, o de que no cambiarán mucho —al menos durante el período inmediatamente subsiguiente—, se lleva a cabo una extrapolación desde los casos conocidos a los desconocidos: esto es, a partir de los acontecimientos que se han clasificado empíricamente y sometido a recuento.

Quienes estén inclinados al inductivismo tenderán quizá a dejar de lado el carácter hipotético de estas estimaciones: pueden confundir, tal vez, una estimación hipotética —es decir, una predicción frecuencial apoyada en extrapolaciones estadísticas— con una de sus «fuentes» empíricas, o sea, con la clasificación y recuento reales de acontecimientos y sucesiones de acontecimientos pasados. Se pretende, a menudo, que «deducimos» estimaciones de probabilidad —esto es, predicciones de frecuencias— a partir de acontecimientos pasados que se han clasificado y contado (así las estadísticas de mortalidad). Pero desde un punto de vista lógico semejante pretensión no está justificada en absoluto: no hemos realizado deducción lógica alguna; lo único que hemos hecho es proponer una hipótesis no verificable, que jamás podrá justificarse lógicamente: la conjetura de que las frecuencias permanecerán *constantes*, y permitirán, por tanto, la extrapolación. Ciertos creyentes en la lógica inductiva mantienen que las *hipótesis equiazarosas* son «deductibles empíricamente» o «explicables empíricamente», pues las suponen basadas en una experiencia estadística —esto es, en frecuencias observadas empíricamente—. Por mi parte creo, sin embargo, que al hacer este tipo de estimación frecuencial hipotética nos guiamos, a menudo, exclusivamente por nuestras reflexiones acerca de la importancia de la simetría y por otras consideraciones parecidas; y no veo ninguna razón por la que tales conjeturas habrían de estar inspiradas exclusivamente por la acumulación de una gran masa de observaciones inductivas. Con todo, no atribuyo demasiada importancia a estas cuestiones acerca del origen o «fuentes» de nuestras estimaciones (cf. el apartado 2): en mi opinión, importa mucho más que se vea con entera claridad el hecho de que toda estimación frecuencial predictiva, incluyendo cualquiera que podamos obtener por extrapolación estadística —y, sin duda alguna, todas las que se refieran a sucesiones empíricas infinitas—, será siempre una pura conjetura, ya que, en todo caso, ha de ir mucho más lejos de lo que estamos autorizados a afirmar basándonos en las observaciones.

La distinción que hago entre hipótesis equiazarosas y extrapolaciones estadísticas corresponde, más o menos, a la distinción clásica entre probabilidades «*a priori*» y «*a posteriori*». Pero como estos términos se emplean en tantos sentidos diferentes[3], y como, además, están indisolublemente impregnados de asociaciones de orden filosófico, será mejor que los evitemos.

[3] Born y Jordan, por ejemplo, en su *Elementare Quantenmechanik* (1930), página 308, emplean el primero de estos términos para denotar una hipótesis de equidistribución. Por otro lado, A. A. Chuprov utiliza la expresión «probabilidad *a priori*» para todas las *hipótesis* frecuenciales, con objeto de distinguirlas de sus *contrastes estadísticos;* esto es, de los resultados obtenidos *a posteriori*, por recuento empírico.

En el estudio que realizo a continuación del axioma de aleatoriedad trataré de encontrar sucesiones matemáticas que se aproximen a las sucesiones empíricas aleatorias: lo cual quiere decir que habré de estudiar hipótesis frecuenciales *2.

58. Estudio del axioma de aleatoriedad

En el apartado 54 hemos introducido y explicado los conceptos de selección ordinal (esto es, de selección según la posición) y de selección de vecindad; mediante ellos voy a examinar ahora el axioma de aleatoriedad de Von Mises —o principio de exclusión de los sistemas de jugar—, pues espero encontrar un requisito más débil que, sin embargo, sea capaz de ocupar su puesto. En la teoría de Von Mises, este «axioma» forma parte de su definición del concepto de colectivo, pues pide que los límites de las frecuencias de un colectivo sean insensibles a todo tipo de selecciones sistemáticas (como indica el autor mencionado, todo sistema de jugar puede considerarse siempre como una selección sistemática).

La mayor parte de las críticas que se han alzado frente a este axioma están dirigidas contra un aspecto de su formulación de escasa importancia relativa y bastante superficial: se refieren al hecho de que entre todas las selecciones posibles habrá una que será —digamos— la de las tiradas que sacan cinco, y a que, evidentemente, la frecuencia de los cincos en esta selección será muy diferente de la misma en la sucesión original. Debido a esto, Von Mises —al formular el axioma de aleatoriedad— habla de lo que él llama «selecciones» o «elecciones» que sean «independientes del resultado» de la tirada en cuestión, y, por tanto, de las que se definan sin hacer uso para nada de la propiedad del elemento que se ha de seleccionar [1]. Pero cabe contestar a los innumerables ataques levantados contra esta formulación [2] sin más que señalar que podemos formular el axioma de aleatoriedad de Von Mises sin emplear en absoluto las expresiones discutibles [3]; pues es posible redactarlo así, por ejemplo: los límites de las frecuencias de un colectivo han de ser insensibles a las selecciones ordinales y de vecindad y a todas las combinaciones posibles de ambos métodos de selección.

De esta forma desaparecen las dificultades que hemos mencionado. Pero otras se conservan: así, quizá sea imposible *demostrar* que el concepto de colectivo definido por medio de un axioma de aleatorie-

---

*2 Este es, precisamente, el programa a que aludía en la nota *1 anterior, y llevado a cabo en los apéndices IV y *VI.

1 Cf., por ejemplo, la obra de Von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), pág. 25; trad. ingl., 1939, pág. 33 [vers. cast., 1946, pág. 46 *(T.)*].

2 Cf., por ejemplo, Feigl, en *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 256, en donde se dice que esta formulación «no es expresable matemáticamente». La crítica de Reichenbach, en *Mathematische Zeitschrift* 34, 1932, págs. 594 y sig., es muy parecida.

3 Dörge ha hecho una observación análoga, pero sin desarrollarla.

dad tan exigente no es contradictorio; dicho de otro modo: que la clase de los «colectivos» no es una clase vacía. (Kamke ha acentuado enérgicamente la necesidad de demostrar tal cosa [4].) Por lo menos, parece imposible construir un *ejemplo* de un colectivo —con lo cual se demostraría que existen colectivos—. Esto se debe a que para dar un ejemplo de una sucesión infinita que haya de satisfacer derterminadas condiciones es imprescindible una regla matemática; mas no puede existir semejante regla para un colectivo en el sentido de Von Mises, por definición, ya que cualquier regla podría emplearse como sistema de jugar o como sistema de selección. Realmente, esta crítica parece incontrovertible si se eliminan *todos los* sistemas *posibles* de jugar [*1].

Sin embargo, frente a la idea de excluir todos los sistemas de jugar es posible plantear otra objeción: la de que, en realidad, se pide *demasiado*. Si vamos a axiomatizar un sistema de enunciados —en este caso, los teoremas del cálculo de probabilidades; en particular, el teorema especial de la multiplicación o teorema de Bernoulli—, entonces los axiomas elegidos no sólo deben ser suficientes para la deducción de los teoremas del sistema, sino también *necesarios*. Pero puede mostrarse que la exclusión de *todos* los sistemas de selección es *innecesaria* para la deducción del teorema de Bernoulli y de sus corolarios; es enteramente suficiente postular la exclusión de una clase especial de selección de vecindad, ya que basta pedir que la sucesión sea insensible a las selecciones efectuadas de acuerdo con acervos-*n* arbitrarios de predecesores: es decir, que sea *libre-n de secuelas para todo n*, o, más brevemente, que sea «*absolutamente libre*».

Propongo, pues, reemplazar el principio de Von Mises de exclusión de los sistemas de jugar por el requisito menos exigente de «libertad absoluta», en el sentido de libertad-*n* para todo *n;* y, por tanto, definir las sucesiones *matemáticas* azarosas como las que cumplen este requisito. La principal ventaja que tenemos haciendo esto es que no se excluyen *todos* los sistemas de jugar, de modo que es posible dar reglas matemáticas para construir sucesiones que sean «absolutamente libres» en nuestro sentido, y, por tanto, es posible construir ejemplos (cf. el apartado *a)* del apéndice IV); con lo cual quedamos a salvo de la objeción de Kamke que hemos indicado más arriba, ya que podemos demostrar ahora que el concepto de sucesión matemática azarosa no es un concepto vacío, y de ahí que es coherente [*2].

---

[4] Cf., por ejemplo, KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (1932), página 147, y *Jahresbericht der Deutschen mathem. Vereinigung* 42, 1932. Debe oponerse también la objeción de Kamke a la tentativa de Reichenbach de perfeccionar el axioma de aleatoriedad introduciendo *sucesiones normales*, ya que este autor no ha logrado demostrar que tal concepto sea un concepto *no vacío;* cf. REICHENBACH, *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Mathematische Zeitschrift* 34, 1932, página 606.

[*1] Es controvertible, sin embargo, si ha de eliminarse un conjunto *numerable* cualquiera dado de sistemas de jugar: pues entonces podría construirse un ejemplo de una sucesión (por medio de una especie de método de la diagonal). Véase el apartado *54 de mi *Postscript* (texto siguiente a la nota 5) acerca de A. Wald.

[*2] La referencia al apéndice IV tiene considerable importancia. Obsérvese tam-

Quizá ha de parecer extraño que tratemos de dibujar los rasgos, tan irregulares, de las sucesiones debidas al azar, por medio de sucesiones matemáticas que han de conformarse a las reglas más estrictas; y, a primera vista, el axioma de aleatoriedad de Von Mises puede presentar un aspecto que se ajuste más a nuestras intuiciones: pues cuando nos dicen que una sucesión debida al azar tiene que ser completamente irregular, de suerte que toda presunción de regularidad falle en algún punto lejano de la sucesión —con tal de que continuemos tratando de falsar la conjetura de regularidad prolongando suficientemente la sucesión—, tal cosa nos parece enteramente satisfactoria. Pero este argumento intuitivo favorece también mi propuesta: pues si las sucesiones debidas al azar son irregulares, entonces *a fortiori* no serán sucesiones regulares de un tipo particular; ahora bien, nuestro requisito de «libertad absoluta» no hace sino excluir un tipo particular de sucesión regular; si bien uno muy importante.

Puede verse que, efectivamente, se trata de un tipo importante teniendo en cuenta el hecho de que el requisito que hemos exigido excluye implícitamente los tres tipos siguientes de sistemas de jugar (cf. el apartado siguiente): en primer término, las selecciones de vecindad «normales» o «puras» *[3], es decir, aquellas por las que seleccionamos de acuerdo con una *característica constante de la vecindad;* excluimos también la selección ordinal «normal», que escoge elementos que distan entre sí una magnitud constante, como los que están numerados con k, $n + k$, $2n + k$, ..., etc.; y, finalmente, eliminamos muchas combinaciones de estos dos tipos de selección (por ejemplo, la selección de todo n-ésimo elemento siempre que su vecindad posea ciertas características especificadas constantes). Una propiedad típica de todas estas selecciones es que no se refieren a un elemento absolutamente primero de la sucesión, y que, por ello, pueden dar la misma subsucesión seleccionada si la numeración de la sucesión original empieza en otro elemento (apropiado). En consecuencia, los sistemas de jugar que están excluidos por el requisito que he impuesto son los que podrían emplearse sin conocer el primer elemento de la sucesión: son invariantes respecto de ciertas transformaciones (lineales); es decir, son sistemas de jugar *sencillos* (cf. el apartado 43). Solamente *[4] no quedan excluidos los sistemas de jugar que se refieren a las distancias absolutas de los elementos a un elemento (inicial) absoluto [5].

El requisito de libertad-n para todo n —o sea, de «libertad absoluta»— parece también estar de muy buen acuerdo con lo que la mayoría de nosotros, consciente o inconscientemente, pensamos que ocurre en las sucesiones debidas al azar; por ejemplo, que el resulta-

---

bién que la mayoría de las objeciones que se han opuesto a mi teoría se contestaban en el párrafo siguiente del texto.

*3 Cf., más adelante, el último párrafo del apartado 60.

*4 *Solamente* es exacta la palabra «solamente» si hablamos de sistemas de jugar *predictivos:* cf., más adelante, la nota *3 del apartado 60, y la nota 6 del apartado *54 de mi *Postscript.*

5 Ejemplo: la selección de todos los términos cuyo número sea primo.

do de una tirada de un dado no depende de los resultados de las tiradas anteriores (y la costumbre de menear el dado antes de tirar está encaminada a asegurar esta «independencia»).

59. Sucesiones azarosas. Probabilidad objetiva

A la vista de lo que se ha dicho hasta ahora propongo la siguiente definición.

Se dirá que una sucesión de eventos o una sucesión de propiedades —especialmente, una alternativa— es «azarosa» o «aleatoria» cuando y sólo cuando los límites de las frecuencias de sus propiedades primarias sean «absolutamente libres»: esto es, insensibles a toda selección basada en las propiedades de un acervo-n cualquiera de predecesores. A una frecuencia límite correspondiente a una sucesión aleatoria se la llamará *probabilidad objetiva* de la propiedad en cuestión dentro de la sucesión considerada, y se la simbolizará por F. Esto puede expresarse también del modo siguiente: sea azarosa —o aleatoria— la sucesión α, dotada de la propiedad primaria β; en este caso, se cumplirá lo siguiente:

$$_{\alpha}\mathrm{F}(\beta) = {_{\alpha}\mathrm{F}'}(\beta)$$

Hemos de mostrar ahora que nuestra definición basta para deducir los principales teoremas de la teoría matemática de la probabilidad, en especial el de Bernoulli. Y luego —en el apartado 64— modificaremos la definición dada aquí de tal manera que se la haga independiente del concepto de *límite de frecuencias* [*1].

60. El problema de Bernoulli

La primera fórmula binomial que mencionamos en el apartado 56, a saber,

$$_{\alpha(n)}\mathrm{F}''(u) = {^{n}C_{m}}\, p^{m} q^{n-m} \tag{1}$$

es válida para sucesiones finitas de segmentos imbricados, y se la puede deducir sobre la hipótesis de que la sucesión *finita* α sea al menos libre-n—1. Apoyándonos en el mismo supuesto obtenemos inmediatamente una fórmula que corresponde exactamente a aquélla, mas para

[*1] Actualmente me inclinaría a emplear el concepto de «probabilidad objetiva» de un modo diferente: esto es, en un sentido más amplio, de suerte que abarcase *todas las interpretaciones* «objetivas» *del cálculo de probabilidades formal,* como la interpretación frecuencial y —muy en especial— la interpretación de propensiones que estudio en el *Postscript.* Aquí —en el apartado 59— utilizo este concepto meramente como auxiliar para la construcción de cierta forma de la teoría frecuencial.

sucesiones infinitas: es decir, si α es infinita y al menos libre-n-1, entonces

$$_{\alpha(n)}F'(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m} \tag{2}$$

Puesto que las sucesiones azarosas son absolutamente libres (esto es, libres-n para todo n), la fórmula (2) o *segunda* fórmula binomial debe poder aplicarse también a ellas, y esto cualquiera que sea el valor escogido de n.

A continuación nos ocuparemos *exclusivamente* de sucesiones azarosas o aleatorias (tal como se las ha definido en el apartado anterior). Vamos a mostrar que para las *sucesiones azarosas* es válida —además de la fórmula (2)— una tercera fórmula binomial (3), que es la siguiente:

$$_{\alpha_n}F(m) = {}^{n}C_{m}p^{m}q^{n-m} \tag{3}$$

Esta fórmula difiere de la (2) de dos modos distintos: en primer lugar, se la afirma de sucesiones de segmentos adyacentes, α_n, en lugar de las sucesiones de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$; y, además, no contiene el símbolo F′, sino el F. Todo lo cual quiere decir que afirma, por implicación, que las *sucesiones de segmentos adyacentes* son, a su vez, azarosas o aleatorias, ya que F —es decir, la probabilidad objetiva— está definida únicamente para sucesiones azarosas.

Siguiendo a Von Mises, llamo problema de Bernoulli a la cuestión —a que responde (3)— de la probabilidad objetiva de la propiedad m en una sucesión de segmentos adyacentes (o sea, a la cuestión del valor de $_{\alpha_n}F(m)$) [1]. Para resolverla —y, por tanto, para deducir la tercera fórmula binomial (3)— basta asumir que α es azarosa o aleatoria [2] (pues para nuestra tarea equivale a mostrar que el teorema especial de multiplicación es válido para la sucesión de segmentos adyacentes de una sucesión aleatoria α).

La demostración [*1] de la fórmula (3) puede llevarse a cabo en dos pasos. Mostramos primeramente que la fórmula (2) no sólo es válida para sucesiones de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$, sino también para sucesiones de segmentos adyacentes, α_n. Y después hacemos ver

---

[1] Puede llamarse «problema casi bernoulliano» a la cuestión correspondiente en el caso de sucesiones de segmentos *imbricados*, esto es, al problema de $_{\alpha(n)}F'(m)$; cf. la nota 1 del apartado 56 y también el apartado 61.

[2] REICHENBACH *(Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnnug, Mathematische Zeitschrif* 34, 1932, pág. 603) se opone implícitamente a esta aserción cuando escribe: «... las sucesiones normales están libres también de secuelas, *mientras que no se cumple necesariamente lo contrario*»; pero las sucesiones normales de Reichenbach son aquéllas para las que es válida (3). (Mi demostración es posible gracias al hecho de haberme apartado de los procedimientos anteriormente empleados, al definir el concepto de «libertad de secuelas» no directamente, sino por medio de la «libertad-n de secuelas»: con lo cual he hecho aquél accesible al método de inducción matemática.)

[*1] Doy aquí solamente un bosquejo de la demostración. Los lectores no interesados en ella pueden pasar al último párrafo del presente apartado.

que estas últimas son «absolutamente libres». (No es posible invertir el orden de estos pasos, ya que, decididamente, una sucesión de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$, *no* es «absolutamente libre»: de hecho, estas sucesiones constituyen un ejemplo típico de lo que podrían llamarse «sucesiones con secuelas» [3].)

Primer paso. Las sucesiones de segmentos adyacentes, α_n, son subsucesiones de $\alpha_{(n)}$, y pueden obtenerse a partir de éstas por medio de una selección ordinal normal. Así pues, si somos capaces de mostrar que los límites de las frecuencias de las sucesiones imbricadas, $\alpha_{(n)}F'(m)$, son insensibles a la selección ordinal normal, hemos dado el primer paso (e incluso hemos ido un poco más lejos), ya que en tal caso hemos demostrado la fórmula

$$\alpha_n F'(m) = \alpha_{(n)} F'(m) \qquad (4)$$

Esbozaré primero esta demostración para $n = 2$: esto es, haré ver que

$$\alpha_2 F'(m) = \alpha_{(2)} F'(m) \qquad (m \leqslant 2) \qquad (4a)$$

es verdadera; y luego será fácil generalizar esta fórmula para todo *n*.

A partir de una sucesión $\alpha_{(2)}$ de segmentos imbricados podemos seleccionar dos —y sólo dos— sucesiones distintas, α_2, de segmentos adyacentes: una de ellas, que denotaremos con (A), contiene los segmentos primero, tercero, quinto, ..., de $\alpha_{(2)}$, esto es, las parejas de α formadas por los números 1,2; 3,4; 5,6; ...; la otra —para denotar la cual utilizaremos el símbolo (B)— contiene los segmentos segundo, cuarto, sexto, ..., de $\alpha_{(2)}$, o sea, las parejas de elementos de α constituidas por los números 2,3; 4,5; 6,7; ..., etc. Supongamos ahora que la fórmula (4a) *no* sea válida para *una* de las *dos* sucesiones (A) o (B), de modo que el segmento (o sea, la pareja) 0,0 aparezca *demasiado frecuentemente* en la sucesión (A), por ejemplo; entonces, en la sucesión (B) tiene que aparecer una desviación complementaria, es decir, el segmento 0,0 ha de aparecer *demasiado poco frecuentemente* («demasiado frecuentemente» y «demasiado poco frecuentemente» en comparación con la fórmula binomial). Pero esto se encuentra en contradicción con la «libertad absoluta» que hemos asumido para α; pues si la pareja 0,0 aparece en (A) con mayor frecuencia que en (B), entonces dicha pareja debe aparecer —en segmentos suficientemente largos de $\alpha_{(2)}$— más frecuentemente a ciertas *distancias características entre sí que a otras distancias mutuas*: las distancias correspondientes a la frecuencia mayor serían las que prevalecerían si las parejas 0,0 perteneciesen a *una* sola de las dos sucesiones α_2, y las correspondientes a la frecuencia menor de dicha pareja serían las que dominarían si ésta perteneciese a *ambas* sucesiones α_2. Lo cual contradice la «libertad absoluta» de α: pues, de acuerdo con la segunda fórmula bino-

---

[3] Von Smoluchowski apoyaba su teoría del movimiento browniano en sucesiones con secuelas, es decir, en sucesiones de segmentos imbricados.

mial, aquélla entraña que la frecuencia con que aparece una sucesión determinada de longitud n en cualquier sucesión de $\alpha_{(n)}$ depende *exclusivamente* del número de unos y de ceros que aparecen en ella, y no de su *colocación* en la sucesión *[2].

De este modo se demuestra (4a); y como esta demostración puede generalizarse fácilmente a cualquier n, se sigue de ello la validez de (4), con lo que se completa el primer paso de la demostración.

Segundo paso. Mediante una argumentación análoga puede mostrarse que las sucesiones α_n son «absolutamente libres», como vamos a ver. Volvemos a considerar únicamente en un principio las sucesiones α_2; y pondremos de manifiesto que éstas son libres-1, para empezar. En efecto: supongamos que una de las dos sucesiones α_2 —por ejemplo, la (A)— *no* sea libre-1; entonces, en (A), a continuación de *al menos* uno de los segmentos constituidos por dos elementos (o sea, una pareja concreta de α), digamos tras del segmento 0,0, ha de aparecer otro segmento —digamos, 1,1— con mayor frecuencia de lo que aparecería si (A) fuese «absolutamente libre»; lo cual quiere decir que el segmento 1,1 tendría que aparecer con mayor frecuencia en la subsucesión seleccionada a partir de (A) de acuerdo con el segmento predecesor 0,0 de lo que nos haría esperar la fórmula binomial.

Pero este supuesto contradice a la «libertad absoluta» de la sucesión α. Pues si en (A) el segmento 1,1 sigue al 0,0 demasiado frecuentemente, como compensación debe ocurrir lo contrario en (B), ya que, de otro modo, la cuaterna 0,0,1,1 aparecería demasiado frecuentemente —en un segmento suficientemente largo de α— a ciertas *distancias características* entre sí: a saber, a las distancias que resultarían si las dobles parejas en cuestión perteneciesen a *una* y la misma sucesión α_2; y, además, a otras *distancias características* aparecería dicha cuaterna con una frecuencia demasiado baja —es decir, a las distancias que prevalecerían si perteneciesen a *ambas* sucesiones α_2—. Así pues, nos tropezamos exactamente con la misma situación que antes; y es posible mostrar, mediante consideraciones análogas a las anteriores, que el supuesto de una aparición preferente a ciertas distancias características es incompatible con la «libertad absoluta» que hemos supuesto para α.

Una vez más podemos generalizar esta demostración; de suerte que es posible decir de las sucesiones α que no sólo son libres-1, sino también libres-n para todo n; y, en consecuencia, que son *azarosas* —o aleatorias.

Así se termina nuestro esquema de los dos pasos. Por tanto, estamos ya autorizados para remplazar F′ por F en (4): lo cual quiere decir que podemos aceptar la pretensión de que la tercera fórmula binomial resuelve el problema de Bernoulli.

*[2] La formulación que sigue puede ayudar desde el punto de vista intuitivo: si las parejas 0,0 son más frecuentes a ciertas distancias características que a otras, entonces podría emplearse fácilmente este hecho como base de un sistema sencillo que mejoraría las posibilidades de un jugador; ahora bien, los sistemas de jugar de este tipo son incompatibles con la «libertad absoluta» de la sucesión. Las mismas consideraciones subyacen al «segundo paso» de la demostración.

Hemos hecho patente también, de pasada, que las sucesiones $\alpha_{(n)}$ de segmentos imbricados son insensibles a la *selección normal ordinal* siempre que α sea «absolutamente libre».

Lo mismo ocurre con las sucesiones α_n de segmentos adyacentes, pues toda selección ordinal normal de α_n puede considerarse como una selección del mismo tipo de $\alpha_{(n)}$; y, por tanto, será también aplicable a la sucesión α misma, ya que ésta es idéntica a $\alpha_{(1)}$ y a α_1.

Hemos mostrado, pues, entre otras cosas, que de la «libertad absoluta» —que quiere decir, insensibilidad a un tipo especial de selección de vecindad— se sigue la insensibilidad a la selección ordinal normal. Puede verse fácilmente que otra consecuencia ulterior es la insensibilidad a cualquier selección «pura» de vecindad (esto es, a una selección que tenga en cuenta una caracterización constante de la vecindad, o sea, una caracterización que no varíe con el número ordinal del elemento). Y, por fin, se sigue que la «libertad absoluta» ha de entrañar insensibilidad a todas [*3] las combinaciones de estos dos tipos de selección.

61. La ley de los grandes números (teorema de Bernoulli)

El teorema de Bernoulli —o (primera[1]) «ley de los grandes números»— puede deducirse de la tercera fórmula binomial mediante razonamientos puramente aritméticos, una vez hecha la asunción de que podemos llevar n al límite: $n \longrightarrow \infty$. Cabe afirmarla únicamente, por tanto, de sucesiones α infinitas, ya que solamente en éstas pueden aumentar indefinidamente de longitud los segmentos-n de las sucesiones α_n; mas sólo de las sucesiones α que sean, además, «absolutamente libres», puesto que nada más podemos llevar n al límite $(n \longrightarrow \infty)$ si asumimos la libertad-n para todo n.

El teorema de Bernoulli nos da la solución de un problema sumamente afín al que (siguiendo a Von Mises) he denominado «problema de Bernoulli»: concretamente, al del valor de ${}_{\alpha_n}F(m)$. Según indiqué en el apartado 56, puede decirse que un segmento-n tiene la propiedad «m» cuando contiene precisamente m unos; y la frecuencia relativa de los unos dentro de este segmento (finito) es, naturalmente, m/n. Podemos establecer ahora la siguiente definición: un segmento-n de α tiene la propiedad «$\triangle p$» si y sólo si la frecuencia relativa de los unos discrepa del valor ${}_{\alpha}F(1) = p$ en una cantidad menor que δ —siendo δ una cantidad tan pequeña como queramos (pero distinta de cero)—: es decir, si discrepa de la probabilidad de los unos en la sucesión α en una cantidad menor... Podemos tam-

---

*3 Según creo ahora, la palabra «todas» es errónea, y para ser un poco más preciso sería menester remplazarla por «todas ... que pudieran utilizarse como sistemas de jugar». Cf., más arriba, la nota *4 del apartado 58, y la nota 6 (que se refiere a A. Wald) del apartado *54 de mi *Postscript*.

1 Von Mises distingue el teorema de Bernoulli —o de Poisson— de su inverso, que él llama «teorema de Bayes» o «la segunda ley de los grandes números».

bién expresar esta condición diciendo: un segmento-n tiene la propiedad «$\triangle p$» si y sólo si $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta$; y, en otro caso, tendrá la propiedad «$\overline{\triangle p}$». Ahora bien; el teorema de Bernoulli responde a la pregunta acerca del valor de la frecuencia —o probabilidad— de segmentos de este tipo (o sea, de los que tienen la propiedad $\triangle p$) dentro de sucesiones α_n: contesta, por tanto, a la cuestión acerca del valor de ${}_{\alpha_n}F(\triangle p)$.

Intuitivamente se adivina que si el valor de δ ($\delta > 0$) está fijado y n crece, la frecuencia de dichos segmentos (que poseen la propiedad $\triangle p$) crecerá también, y, con ella, el valor de ${}_{\alpha_n}F(\triangle p)$ (y que este crecimiento será monótono). La demostración de Bernoulli (que puede encontrarse en cualquier tratado de cálculo de probabilidades) procede a evaluar semejante aumento apoyándose en la fórmula binomial; se encuentra que si n aumenta más allá de todo límite, el valor de ${}_{\alpha_n}F(\triangle p)$ se aproxima a su valor máximo, 1, por pequeño que sea el de δ; lo cual puede expresarse con los símbolos conocidos así:

$$\lim_{n \to \infty} {}_{\alpha_n}F(\Delta p) = 1 \qquad \text{(para cualquier valor de } \Delta p\text{)} \qquad (1)$$

Se llega a esta fórmula transformando la *tercera* fórmula binomial (para sucesiones de segmentos *adyacentes); la segunda* fórmula binomial, que es análoga a ella, pero corresponde a sucesiones de segmentos *imbricados*, llevaría, empleando el mismo método, a la fórmula correspondiente a la anterior,

$$\lim_{n \to \infty} {}_{\alpha_{(n)}}F'(\Delta p) = 1 \qquad \text{(para cualquier valor de } \Delta p\text{)} \qquad (2)$$

que es válida para sucesiones de segmentos imbricados y para selecciones ordinales normales de ellos, y, por tanto, para sucesiones con *secuelas* (estudiadas por Smoluchowski [2]). La fórmula (2) misma da lugar a la (1) en caso de que se seleccionen segmentos que no estén imbricados, y que sean, por tanto, libres-n. Puede decirse que (2) es una variante del teorema de Bernoulli —a la cual se aplica, *mutatis mutandis,* lo que voy a decir acerca del teorema de Bernoulli.

Es posible expresar lingüísticamente el teorema de Bernoulli —esto es, la fórmula (1)— del modo siguiente: Diremos que un segmento finito de (gran) longitud determinada, seleccionado de una sucesión aleatoria α, es una «buena muestra» si y sólo si la frecuencia de los unos *en tal segmento* difiere de p —esto es, del valor de la probabilidad de los unos *en la sucesión aleatoria* α— en una cantidad menor que una pequeña fracción fijada arbitrariamente. Podemos decir que la probabilidad de dar con una buena muestra se acerca a 1 cuanto queramos con tal de que hagamos los segmentos en cuestión suficientemente largos [*1].

---

[2] Cf. la nota 3 del apartado 60 y la nota 5 del 64.

[*1] En la traducción se ha refundido esta frase (sin alterar su contenido), introduciendo el concepto de una «buena muestra»: el original se valía únicamente del *definiens* de dicho concepto.

Al formular de este modo el teorema aparece dos veces la palabra «*probabilidad*» (o «*valor de la probabilidad*»). ¿Cómo debe interpretarse o traducirse aquí? En el sentido de mi definición de frecuencia sería menester traducirla del modo siguiente (y doy en cursiva las dos versiones de la palabra «probabilidad» en el lenguaje frecuencial): *una mayoría aplastante* de todos los segmentos suficientemente largos serían «buenas muestras», es decir, su frecuencia relativa discreparía del *valor p de la frecuencia* de la sucesión aleatoria en cuestión, en una cantidad tan pequeña como quisiéramos; de un modo más breve: la *frecuencia p* se realiza aproximadamente en *casi todos los segmentos suficientemente largos*. (No hace al caso para la discusión presente cómo llegamos al valor p: podría ser, por ejemplo, el resultado de una estimación hipotética.)

Teniendo en cuenta que la frecuencia de Bernoulli, $\alpha_n F(\triangle p)$, crece monótonamente al crecer la longitud n del segmento y decrece también monótonamente al decrecer n, y que, por tanto, el valor de la frecuencia relativa se realiza raramente en segmentos cortos (si se los compara con los largos), podemos decir también lo que sigue.

El teorema de Bernoulli enuncia que los segmentos cortos de sucesiones «absolutamente libres» o azarosas mostrarán a menudo discrepancias de p relativamente grandes (y, por tanto, fluctuaciones relativamente grandes); mientras que en los más largos se observarán, en la mayoría de los casos, discrepancias de p cada vez más pequeñas al aumentar su longitud. En consecuencia, la mayoría de las desviaciones (del valor de p) se harán tan pequeñas como queramos en segmentos suficientemente largos; o, dicho de otro modo, las desviaciones grandes se harán tan raras como queramos.

Por tanto, si tomamos un segmento muy largo de una sucesión aleatoria, con objeto de hallar por recuento —o quizá empleando otros métodos empíricos y estadísticos— cuáles son las frecuencias en sus subsucesiones, encontraremos, en la inmensa mayoría de los casos, el siguiente resultado: existe una frecuencia media característica, tal que las frecuencias relativas del segmento total y de casi todos los subsegmentos largos se desvían muy poco de ella, mientras que las correspondientes a subsegmentos más pequeños discreparán cada vez más —y más a menudo— de dicha frecuencia media según vayamos escogiéndolos más y más pequeños. Cabe denominar este hecho, este comportamiento estadísticamente comprobable de los segmentos finitos, llamándole su «comportamiento *casi-convergente*», o el hecho de que *las sucesiones aleatorias son estadísticamente estables* *2.

Así pues, el teorema de Bernoulli afirma que los segmentos pequeños de las sucesiones azarosas muestran a menudo grandes fluctuaciones, mientras que los grandes se comportan siempre de una manera que sugiere constancia y convergencia; dicho sucintamente: que en

---

*2 KEYNES dice de la «ley de los grandes números» que «un nombre mucho mejor para ella sería el de la 'estabilidad de las frecuencias estadísticas'» (cf. su *Treatise*, pág. 336).

lo pequeño encontramos desorden y aleatoriedad, y en lo grande orden y constancia. A este comportamiento es a lo que se refiere «*la ley de los grandes números*».

62. El teorema de Bernoulli y la interpretación de los enunciados probabilitarios

Acabamos de ver que al formular lingüísticamente el teorema de Bernoulli aparece dos veces la palabra «probabilidad».

El teórico de la frecuencia no tiene ninguna dificultad para traducir esta palabra, en ambos casos, de acuerdo con su definición, y puede dar una interpretación clara de la fórmula de Bernoulli y de la ley de los grandes números. ¿Puede hacer lo mismo quien se adhiere a la teoría subjetiva en su forma lógica?

El teórico de la probabilidad subjetiva que quiere definir «probabilidad» como «grado de creencia racional» es perfectamente coherente, y está en su pleno derecho, cuando interpreta las palabras «la probabilidad de ... se acerca a 1 cuanto queramos» en el sentido de: «es *casi seguro* [1] que ...»; pero cuando continúa diciendo «... que la frecuencia relativa discrepará *de su valor más probable p* en una cantidad menor que una dada...» —o, con las palabras de Keynes [2], «que la proporción de la aparición de los eventos divergirá de *la proporción más probable, p*, en una cantidad menor que una dada...»—, lo único que hace es dejar en la obscuridad las dificultades que encuentra. Pues tales expresiones parecen ser correctas, al menos cuando se oyen por primera vez; pero si traducimos de nuevo la palabra «*probable*» (que a veces se suprime) conforme a la teoría subjetiva, entonces el texto completo es del siguiente tenor: «es casi seguro que las frecuencias relativas discreparán del valor *p* del grado de creencia racional en una cantidad menor que una dada...»; lo cual, para mí, carece enteramente de sentido *[1], pues las frecuencias relativas

---

[1] Von Mises emplea también la expresión «*casi seguro*»; pero, según él, ha de considerarse, desde luego, *definida* por «tiene una frecuencia próxima a 1» *«o igual a 1».

[2] Keynes, *A Treatise on Probability* (1921), pág. 338. *La cita *precedente* ha tenido que insertarse porque vuelve a traducir el pasaje que yo había citado de la edición alemana de Keynes, en la que se apoyaba mi texto.

*[1] Quizá merezca la pena de ser más explícito en este punto. Keynes escribe (en un pasaje que precede al citado más arriba): «Si la probabilidad de que acontezca un evento bajo ciertas condiciones es *p*, entonces ... la proporción más probable de sus acontecimientos con respecto al número total de ocasiones es *p*...». Lo cual, según su propia teoría, debería poderse traducir así: «Si el grado de creencia racional en el acontecimiento de un evento es *p*, entonces *p* es también una proporción de acontecimientos, esto es, una frecuencia relativa: a saber, aquélla a cuya aparición corresponde el máximo grado de nuestra creencia racional». No planteo ninguna objeción al segundo uso de la expresión «creencia racional» (que es el que podría también verterse por «es casi seguro que...»); a lo que sí objeto es a que *p* sea una vez un grado de creencia racional y otra una frecuencia: dicho de otro modo, no comprendo cómo pueda ser igual una frecuencia empírica a un grado de creencia racional, ni cómo sea posible demostrar tal cosa mediante teorema alguno, por profundo que sea (cf., asimismo, el apartado 49 y el apéndice *IX).

sólo pueden compararse con otras frecuencias relativas, y pueden discrepar o no únicamente de ellas. Y es claro que sería inadmisible dar a *p*, *después* de la deducción del teorema de Bernoulli, un sentido diferente del que tenía antes de la misma [3].

Vemos, pues, que la teoría subjetiva es incapaz de interpretar la fórmula de Bernoulli basándose en la ley *estadística* de los grandes números. La deducción de las leyes estadísticas es sólo posible dentro del marco de la teoría frecuencial: si partimos de una teoría estrictamente subjetiva no llegaremos jamás a enunciados estadísticos —ni siquiera si tratamos de salvar la separación por medio del teorema de Bernoulli [*2].

63. El teorema de Bernoulli y el problema de la convergencia

Desde un punto de vista epistemológico, la deducción que he esbozado de la ley de los grandes números es insatisfactoria: pues el papel desempeñado en nuestro análisis por el teorema de la convergencia dista mucho de ser claro.

En efecto, he introducido tácitamente un axioma de este tipo al confinar mi investigación a las sucesiones matemáticas con límites de frecuencia (cf. el apartado 57). En consecuencia, podría uno sentirse tentado a pensar que nuestro resultado —es decir, la deducción de la ley de los grandes números— es trivial: pues podría considerarse que el hecho de que las sucesiones «absolutamente libres» sean *estadísticamente estables* está entrañado por su convergencia, que se ha asumido axiomáticamente, si no implícitamente.

Pero esta opinión sería errónea, como Von Mises ha hecho ver con toda claridad. Pues existen sucesiones [1] que satisfacen el axioma de convergencia aunque el teorema de Bernoulli no es válido para ellas, ya que —siendo la frecuencia cercana a 1— pueden aparecer segmentos de una longitud cualquiera que discrepen de *p* en una cantidad cualquiera (la existencia del límite *p* se debe, en estos casos,

[3] Von Mises fue quien primero señaló esto —al tratar de una cuestión análoga— en *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), pág. 85 (2.ª ed., 1936, pág. 136; las palabras pertinentes faltan en la traducción inglesa) [vers. esp., págs. 181 y sig. *(T.)*]. Puede hacerse notar, además, que las frecuencias relativas no pueden ser comparadas con «grados de certidumbre de nuestro conocimiento», aunque no sea más que porque la ordenación de tales grados es *convencional* y no es necesario que se lleve a cabo por coordinación de los mismos con fracciones comprendidas entre 0 y 1. Solamente si se *define* la métrica de los grados subjetivos de certidumbre coordinándolos con frecuencias relativas (pero *sólo* entonces), se podrá tolerar que la ley de los grandes números se deduzca dentro del marco de la teoría subjetiva (cf. el apartado 63).

[*2] Pero es posible emplear el teorema de Bernoulli como puente entre la interpretación *objetiva* a base de «propensiones» y la estadística. Cf. los apartados *49 a *57 de mi *Postscript.*

[1] Como ejemplo, Von Mises cita la sucesión de las cifras que ocupan el último lugar en una tabla de raíces cuadradas con seis cifras. Cf., por ejemplo, *Wahrscheinlichkeit, Statistik un Wahrheit* (1928), págs. 86 y sig. (2.ª ed., 1936, pág. 137; ed. inglesa, pág. 165; [ed. cast., págs. 184 y sigs. *(T.)*]); y *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1931), págs. 181 y sig.

a que las discrepancias, aunque pueden crecer sin límite, se anulan mutuamente); estas sucesiones tienen *el aspecto* de divergentes en segmentos arbitrariamente grandes, aun cuando las sucesiones correspondientes de frecuencias convergen, en realidad. Así pues, la ley de los grandes números no es, en modo alguno, una consecuencia trivial del axioma de convergencia, y éste es enteramente insuficiente para deducir aquélla; y, por esta razón, no es posible prescindir de mi axioma de aleatoriedad modificado o requisito de «libertad absoluta».

La reconstrucción que hemos realizado de la teoría sugiere, sin embargo, la posibilidad de que la ley de los grandes números sea *independiente* del axioma de convergencia. Pues hemos visto que el teorema de Bernoulli se sigue inmediatamente de la fórmula binomial, y además, hemos puesto de manifiesto que la primera fórmula binomial puede deducirse para *sucesiones finitas*, y —por tanto— sin necesidad de ningún teorema de convergencia: sólo se requería el supuesto de que la sucesión de referencia, α, era, al menos, libre-$n - 1$ (supuesto del que se seguía la validez del teorema especial de multiplicación, y, con ella, la validez de la primera fórmula binomial); y todo lo que era menester para llevar a cabo el paso al límite —y obtener el teorema de Bernoulli— era suponer que podíamos hacer n tan grande como quisiéramos. Teniendo presente esto nos damos cuenta de que el teorema de Bernoulli es, aproximadamente, válido incluso para sucesiones *finitas*, con tal de que sean libres-n para un n suficientemente grande.

Parece, pues, que la deducción del teorema de Bernoulli no depende de ningún axioma que postule la existencia de un límite de la frecuencia, sino *únicamente* de la «libertad absoluta» o aleatoriedad. El concepto de límite desempeña sólo un papel secundario: se lo emplea para aplicar cierta concepción de la frecuencia relativa (que originariamente está sólo definida para clases finitas, y sin la cual no podría formularse el concepto de libertad-n) a las sucesiones que pueden continuarse indefinidamente.

Aún más: no debería olvidarse que el mismo Bernoulli dedujo su teorema dentro del marco de la teoría clásica, que no incluye ningún axioma de convergencia; y, asimismo, que la definición de la probabilidad como *límite* de frecuencias es solamente una *interpretación* —y no la única posible— del formalismo clásico.

Trataré de justificar mi conjetura —la independencia del teorema de Bernoulli con respecto al axioma de convergencia— deduciendo este teorema sin suponer nada más que la libertad-n (que ha de definirse de un modo apropiado) *1. Y me esforzaré por hacer ver

*1 Sigo considerando perfectamente justificada mi antigua duda acerca de la asunción de un axioma de convergencia, y la posibilidad de pasarse sin él: justificación que se encuentra en las exposiciones del apéndice IV, nota *2, y del apéndice *VI, *en donde se hace ver que la aleatoriedad (si se la define por medio de «sucesiones aleatorizadas mínimas»)* *entraña* la convergencia, de modo que ésta no necesita ser postulada separadamente. Además, mi referencia al formalismo clásico está justificada por la teoría de la probabilidad neoclásica (o de la teoría de la medida), que

que es válido incluso para sucesiones matemáticas cuyas propiedades primarias *no tengan límites de frecuencia.*

Sólo consideraré satisfactoria, desde el punto de vista del epistemólogo, mi deducción de la ley de los grandes números, si puede hacerse patente lo que acabo de indicar. Pues es un «hecho de experiencia» —o, al menos, así se nos dice a veces— que las sucesiones empíricas azarosas presentan el peculiar comportamiento que he designado como «casi-convergente» o «estadísticamente estable» (cf. el apartado 61): si se registra estadísticamente el comportamiento de largos segmentos, cabe determinar que las frecuencias relativas se acercan cada vez más a un valor fijo, y que los intervalos dentro de los que fluctúan se hacen cada vez más pequeños. Es posible contemplar bajo muy diversos ángulos este llamado «hecho empírico», tan discutido y analizado, y al que, sin duda, se considera a menudo como la corroboración empírica de la ley de los grandes números. Los pensadores con inclinaciones inductivistas suelen tomarlo como una ley fundamental de la Naturaleza, que no cabría reducir a un enunciado más sencillo: o sea, como una peculiaridad de nuestro mundo que —simplemente— es menester aceptar. Creen que habría que convertir a esta ley natural, expresada en forma adecuada —por ejemplo, mediante el axioma de convergencia—, en el fundamento de la teoría de la probabilidad, con lo que ésta asumiría el carácter de una ciencia natural.

Mi propia actitud con respecto a este llamado «hecho empírico» es bastante diferente. Me inclino a creer que es reductible al carácter azaroso de las sucesiones; o sea, que cabe deducirle del hecho de que éstas sean libres-*n*. Considero que la gran hazaña de Bernoulli y Poisson en el campo de la teoría de la probabilidad ha consistido, precisamente, en su descubrimiento de una vía por la que hacer ver que este pretendido «hecho de experiencia» es una tautología, y que, a partir del desorden en lo pequeño (siempre que satisfaga una condición de libertad-*n* convenientemente formulada), se sigue lógicamente cierto tipo de estabilidad en lo grande.

Si logramos deducir el teorema de Bernoulli sin *asumir* axioma alguno de convergencia, habremos reducido el problema epistemológico de la ley de los grandes números a un problema de independencia axiomática, y, por tanto, a una cuestión puramente lógica. Tal deducción explicaría también por qué el axioma de convergencia da muy buen resultado en todas las aplicaciones prácticas (en los intentos de calcular el comportamiento aproximado de las sucesiones empíricas); pues, incluso si resulta que la restricción a sucesiones convergentes es innecesaria, es patente que no será inadecuado emplear sucesiones matemáticas convergentes para el cálculo de la conducta aproximada de sucesiones empíricas que, por razones lógicas, son estadísticamente estables.

---

estudio en el capítulo *III del *Postscript;* y, de hecho, lo está por los «números normales» de Borel. Pero ya no estoy de acuerdo con la opinión implícita en la cláusula siguiente del texto, aunque sí con los demás párrafos de este apartado.

64. Eliminación del axioma de convergencia. Solución del «problema fundamental de la teoría del azar»

Hasta ahora, los límites de las frecuencias no habían tenido en nuestra reconstrucción de la teoría de la probabilidad otra función que la de proporcionarnos un concepto inequívoco de frecuencia relativa aplicable a sucesiones infinitas, de suerte que apoyándonos en él fuese posible definir el concepto de «libertad absoluta» (de secuelas): pues es una *frecuencia relativa* lo que ha de ser insensible a la selección que tiene en cuenta los predecesores.

Hemos restringido antes nuestro estudio a las alternativas con límites frecuenciales, con lo cual introdujimos tácitamente un axioma de convergencia. Ahora bien; para liberarnos de este axioma voy a eliminar tal restricción sin remplazarla por ninguna otra; esto quiere decir que tendremos que construir un concepto frecuencial que pueda asumir la función del límite de frecuencias —que hemos rechazado— y que sea capaz de ser aplicado a *todas* las sucesiones de referencia infinitas [*1].

Un concepto frecuencial que cumple estas condiciones es el de *punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas.* (Se dice que un valor *a* es un punto de acumulación de una sucesión, si a partir de cierto elemento existen elementos que discrepen de *a* en una cantidad menor que una dada, por pequeña que ésta sea.) Puede verse que este concepto es aplicable sin restricciones a todas las sucesiones infinitas de referencia, teniendo en cuenta el hecho de que para toda alternativa infinita tiene que existir, *al menos, un* punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas correspondiente a aquélla: como las frecuencias relativas no pueden ser nunca mayores que 1 ni inferiores a 0, cualquier sucesión de ellas ha de estar acotada por 1 y 0; y (según un famoso teorema de Bolzano y Weierstrass) por ser una sucesión infinita acotada, ha de tener, *al menos, un* punto de acumulación [1].

Por razones de brevedad, llamaremos «una *frecuencia media de* α» a todo punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas correspondiente a una alternativa α; y podemos ahora decir: si una sucesión α tiene *una y sólo una* frecuencia media, ésta es, al mismo tiempo, su *límite* frecuencial; y a la inversa: si no tiene límite frecuencial, entonces tiene más de una [2] frecuencia media.

Veremos que la idea de frecuencia media es muy apropiada para nuestros propósitos: exactamente lo mismo que habíamos *estimado*

[*1] Con objeto de no *postular* la convergencia, apelé en el párrafo siguiente a lo que puede *demostrarse:* a saber, a la existencia de puntos de acumulación. Pero todo esto resulta innecesario si adoptamos el método descrito en la nota *1 del apartado 57 y en el apéndice *VI.

[1] Hecho que, por extraño que parezca, no ha sido empleado hasta ahora en la teoría de la probabilidad.

[2] Puede hacerse ver fácilmente que si existe más de *una* frecuencia media en una sucesión de referencia, los valores de todas ellas forman un continuo.

antes —quizá en una estimación hipotética— que p era el límite frecuencial de una sucesión α, trabajamos ahora con la estimación de que p es una frecuencia media de α. Y, siempre que tomemos ciertas precauciones necesarias [3], podemos llevar a cabo *cálculos* mediante las frecuencias medias estimadas, de modo análogo a como lo hacíamos con los límites de las frecuencias. Además, el concepto de frecuencia límite es aplicable a todas las sucesiones de referencia infinitas posibles, sin ninguna restricción.

Si pretendemos ahora interpretar nuestro símbolo ${}_{\alpha}F'(\beta)$ como una frecuencia media —en lugar de como límite frecuencial— y cambiamos, de acuerdo con ello, la definición de probabilidad objetiva (apartado 59), la mayoría de nuestras fórmulas seguirán siendo deductibles. Sin embargo, surge una dificultad: las frecuencias medias *no son únicas;* si estimamos o conjeturamos que ${}_{\alpha}F'(\beta) = p$ es una frecuencia media, ello no excluye la posibilidad de que ${}_{\alpha}F'(\beta)$ tenga otros valores distintos de p; y si postulamos que no ha de ocurrir así, introducimos de este modo, por implicación, el axioma de convergencia. Si, por otra parte, definimos la probabilidad objetiva prescindiendo de semejante postulado de unicidad [4], llegamos (al menos en primera instancia) a un *concepto ambiguo de probabilidad:* pues bajo ciertas circunstancias una sucesión puede tener simultáneamente varias frecuencias medias que sean «absolutamente libres» —cf. el apartado *c)* del apéndice IV—. Lo cual es difícilmente aceptable, ya que estamos acostumbrados a trabajar con probabilidades *únicas o desprovistas de ambigüedad;* es decir, a suponer que para una y la misma propiedad únicamente puede existir una y sólo una probabilidad p dentro de una sola sucesión de referencia.

No obstante tal cosa, cabe superar fácilmente la dificultad que se encuentra para definir un concepto de probabilidad única sin el axioma del límite. En efecto, podemos introducir el requisito de unicidad en el último paso, *tras* haber postulado que la sucesión sea «absolutamente libre» (que es, después de todo, el procedimiento más natural): lo cual nos lleva a proponer, para resolver nuestro problema, la siguiente modificación de nuestras definiciones de sucesiones azarosas y de probabilidad objetiva.

Sea α una alternativa (con una o varias frecuencias medias), y sea el caso que los unos de α tengan una y sólo una frecuencia media, p,

---

[3] El concepto de «selección independiente» ha de interpretarse más estrictamente de lo que hasta el momento se ha hecho, ya que de otro modo no puede demostrarse la validez del teorema especial de multiplicación. Para los detalles, véase mi obra mencionada en la nota 3 del apartado 51 (* en su lugar, consúltese ahora el apéndice *VI).

[4] Cabe hacer tal cosa porque ha de ser posible aplicar inmediatamente a las frecuencias medias la teoría para clases finitas (exceptuando el teorema de unicidad). Si una sucesión α tiene una frecuencia media p, entonces debe contener —independientemente del término a partir del cual empecemos a contar— segmentos de cualquier magnitud *finita* cuya frecuencia discrepe de p tan poco como queramos; y el cálculo se lleva a cabo para dichos segmentos. El que p esté libre de secuelas querrá decir, pues, que esta frecuencia media de α es también una frecuencia media de cualquier selección de α de acuerdo con predecesores.

que sea «absolutamente libre»: decimos entonces que α es azarosa o aleatoria, y que p es la probabilidad objetiva de los unos en α.

Será conveniente dividir esta definición en dos requisitos axiomáticos [*2]:

1) Requisito de aleatoriedad: para que una alternativa sea azarosa debe existir, al menos, una frecuencia media «absolutamente libre», esto es, ha de existir su probabilidad objetiva p.

2) Requisito de unicidad: para una y la misma propiedad de una sola alternativa azarosa tiene que existir *una y sólo una probabilidad p*.

Tenemos asegurada la compatibilidad del nuevo sistema axiomático por el ejemplo que hemos presentado ya. Es posible construir sucesiones que, aun teniendo una y sólo una probabilidad, carecen de frecuencia límite —cf. el apartado *b)* del apéndice IV—; lo cual hace ver que las nuevas condiciones impuestas axiomáticamente son, en realidad, más amplias— o sea, menos exigentes— que las antiguas. Este hecho se hace aún más obvio si (ya que es posible tal cosa) enunciamos nuestros antiguos axiomas de la forma siguiente:

1) Requisito de aleatoriedad: como se ha indicado.
2) Requisito de unicidad: como se ha indicado.
2′) Axioma de convergencia: para una y la misma propiedad de una sola alternativa azarosa no existe ninguna otra frecuencia media que su probabilidad p.

A partir del sistema de requisitos que hemos propuesto podemos deducir el teorema de Bernoulli, y con él todos los teoremas del cálculo de probabilidades clásico; lo cual resuelve nuestro problema, puesto que ya es posible deducir la ley de los grandes números dentro del marco de la teoría frecuencial sin emplear el axioma de convergencia. Además, no sólo permanecen inalteradas la fórmula (1) del apartado 61 y la formulación lingüística del teorema de Bernoulli [5], sino que la interpretación que hemos dado de él queda, asimismo, sin variación: en el caso de una sucesión azarosa *sin* límite frecuencial continuará siendo verdad que casi todas las sucesiones suficientemente largas ostentarán discrepancias de p muy pequeñas, si bien en ellas (como también en las sucesiones azarosas con límite frecuencial) aparecerán de cuando en cuando —como es natural— segmentos de una longitud cualquiera que se comporten casi-divergentemente (esto es, segmentos que discrepen de p en una cantidad cualquiera): pero se-

*2 Se puede combinar el método indicado en la nota *1 del apartado 57 y en los apéndices IV y *VI con estos dos requisitos: mantendríamos entonces el (1) y sustituiríamos el (2) por el siguiente,

(+ 2) Requisito de finitud: a partir de su comienzo, la sucesión ha de hacerse libre-n lo antes posible, y para el n más elevado *posible;* dicho de otro modo, ha de ser (aproximadamente) una sucesión aleatorizada *mínima.*

5 Las fórmulas casi bernoullianas (cuyo símbolo es F′) siguen siendo unívocas para sucesiones azarosas (conforme a la nueva definición), aunque ahora «F′» simboliza únicamente una frecuencia media.

rán relativamente raros, ya que los han de compensar partes de la sucesión enormemente largas en las que todos (o casi todos) los segmentos se comporten casi-convergentemente. Los cálculos indican que estas últimas partes tienen que ser algo así como varios órdenes de magnitud mayores que los segmentos de comportamiento casi-divergente que ellas compensan *3.

Este es también el momento de resolver el «*problema fundamental de la teoría del azar*» (como se le llamó en el apartado 49). La inferencia —al parecer, paradójica— que lleva de la imprevisibilidad e irregularidad de los acontecimientos singulares a la aplicabilidad de las reglas del cálculo de probabilidades es verdaderamente válida: si bien sólo en el supuesto de que podamos expresar la irregularidad, con un buen grado de aproximación, basándonos en asumir, de un modo hipotético, que sólo una de las frecuencias recurrentes —es decir, de las «frecuencias medias»— aparece de tal modo en cualquier selección realizada según predecesores, que no se encuentran secuelas (pues con tales supuestos es posible demostrar que la ley de los grandes números es tautológica). Se puede sostener la conclusión de que en una sucesión irregular, en la cual (como si dijéramos) todo puede suceder en uno u otro momento —aunque algunas cosas solamente muy raras veces—, ha de aparecer cierta regularidad o estabilidad en subsucesiones enormemente largas; pues es una conclusión admisible y no contradictoria (contra lo que se ha afirmado en ocasiones [6]); y tampoco se trata de algo trivial, ya que necesitamos para ella determinados recursos matemáticos (el teorema de Bolzano-Weierstrass, el concepto de libertad-*n* y el teorema de Bernoulli). La aparente paradoja de un razonamiento que pasa de la imprevisibilidad a la previsibilidad, o de la ignorancia al conocimiento, desaparece cuando nos damos cuenta de que es posible poner el supuesto de la irregularidad en la forma de una *hipótesis frecuencial* (la de libertad de secuelas), y de que es menester ponerlo en esta forma si queremos hacer patente la validez de dicho argumento.

Ahora se aclara por qué las antiguas teorías habían sido incapaces de hacer justicia a lo que yo llamo el «problema fundamental». Hemos admitido ya que la teoría subjetiva puede deducir el teorema de Bernoulli; pero es incapaz de interpretarlo a base de frecuencias, al modo de la ley de los grandes números (cf. el apartado 62), y de ahí que le sea imposible explicar el éxito estadístico de las predicciones probabilitarias. Por otra parte, la antigua teoría frecuencial postula ex-

*3 Estoy de pleno acuerdo con lo que sigue, aun cuando sobra toda referencia a las «frecuencias medias» si adoptamos el método descrito en el apartado 57, nota *1, y en el apéndice IV.

6 Cf., por ejemplo, Feigl, en *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 254: «En la ley de los grandes números se pretenden conciliar dos aseveraciones que un análisis más ceñido muestra ser contradictorias. Por una parte ... se supone que puede aparecer una vez cualquier ordenación y distribución. Por la otra, estas apariciones ... han de darse con una frecuencia correspondiente». (La construcción de modelos de sucesiones ha demostrado que, realmente, no nos encontramos con incompatibilidad alguna; cf. el apéndice IV.)

plícitamente —con su axioma de convergencia— la regularidad en lo grande: y, por tanto, dentro de ella no aparece el problema de la inferencia que parte de la irregularidad en lo pequeño y llega a estabilidad en lo grande: pues se infiere meramente desde la estabilidad en lo grande (axioma de convergencia) unida a irregularidad en lo pequeño (axioma de aleatoriedad) a una forma especial de estabilidad en lo grande (teorema de Bernoulli, ley de los grandes números) [*4].

El axioma de convergencia no es una parte necesaria de los fundamentos del cálculo de probabilidades. Y con este resultado termino mi análisis del cálculo matemático [7].

Volvemos ahora a considerar los problemas más específicamente metodológicos, en particular el de cómo decidir los enunciados probabilitarios.

65. El problema de la decidibilidad

Cualquiera que sea el modo como definamos el concepto de probabilidad, o independientemente de las formulaciones axiomáticas que elijamos, mientras la fórmula binomial sea deductible dentro del sistema los *enunciados probabilitarios no serán falsables*. Las hipótesis probabilitarias *no excluyen nada observable:* las estimaciones de probabilidad no pueden contradecir a ningún enunciado básico, ni ser contradichas por él; tampoco cabe que las contradiga la conyunción de un número finito de enunciados básicos, ni —por tanto— tampoco ningún número finito de observaciones.

Supongamos que hemos propuesto una hipótesis equiazarosa para cierta alternativa α: *por ejemplo, que hemos estimado que en las tiradas de cierta moneda saldrán con igual frecuencia* «1» y «0», de modo que sean ${}_{\alpha}F(1) = {}_{\alpha}F(0) = 1/2$; y admitamos que empíricamente nos sale una y otra vez «1», sin excepción; entonces, sin duda alguna, abandonaremos en la práctica la estimación que habíamos hecho, y la daremos por falsada. Pero en un sentido lógico no será cuestión de falsación alguna: pues es seguro que solamente podemos observar una sucesión finita de tiradas, y aunque —según la fórmula

---

[*4] Lo que se acaba de decir en este párrafo subraya implícitamente la importancia que tiene una teoría neoclásica interpretada *objetivamente* para la resolución del «problema fundamental»; en el capítulo *III de mi *Postscript* se describe una teoría de este tipo.

[7] Cf. la nota 3 del apartado 51. Me gustaría aclarar, retrospectivamente, que he adoptado una actitud conservadora con respecto a los cuatro puntos de Von Mises (cf. el final del apartado 50): yo también defino la probabilidad exclusivamente con referencia a *sucesiones aleatorias* (a las que Von Mises llama «colectivos»); también planteo un axioma de aleatoriedad (modificado), y en la determinación de la *tarea del cálculo de probabilidades* sigo sin reservas a aquel autor. Así pues, nuestras diferencias alcanzan solamente al teorema del límite, cuya superfluidad he puesto de manifiesto y que he remplazado por el requisito de unicidad, y al axioma de aleatoriedad, al cual he modificado de suerte que puedan construirse sucesiones modelo (apéndice IV). En consecuencia, la objeción de Kamke (cf. la nota 4 del apartado 58) deja de ser válida.

binomial— la probabilidad de dar con un segmento muy largo que presente una gran discrepancia de 1/2 es sumamente pequeña, siempre será mayor que cero. Por tanto, una aparición de un segmento finito que presente incluso la máxima desviación con respecto a lo estimado, si se da con la suficiente rareza, nunca contradirá a la estimación hecha; y, en realidad, hemos de esperar que ocurra, pues es una consecuencia de ésta. La esperanza de que la *rareza* —calculable— de semejante segmento sea un medio de falsar la estimación probabilitaria resulta ser ilusoria, ya que, incluso una aparición frecuente de un largo segmento que se desvíe en gran medida, puede considerarse siempre no más que una aparición de un segmento todavía mayor y más desviado; así pues, no existe ninguna sucesión de eventos que nos haya sido dada extensionalmente —y, por tanto, ningún acervo-*n* finito de enunciados básicos— que pueda falsar un enunciado probabilitario.

Solamente una sucesión infinita de eventos —definidos intensionalmente por una regla— podría contradecir a una estimación de probabilidad. Pero, a la vista de las consideraciones expuestas en el apartado 38 (cf. el 43), esto quiere decir que las hipótesis probabilitarias son infalsables, debido a tener dimensión infinita. Por tanto, podríamos decir de ellas que son empíricamente no informativas, como vacías que están de contenido empírico [1].

Con todo, esta tesis es claramente inaceptable cuando nos enfrentamos con los *éxitos* que la física ha alcanzado con las predicciones obtenidas a partir de estimaciones hipotéticas de probabilidades (y éste es el mismo argumento que hemos utilizado mucho antes contra la interpretación de los enunciados probabilitarios como tautologías. hecha por la teoría subjetiva). Muchas de estas estimaciones no son inferiores en lo que respecta a significación científica a ninguna otra hipótesis física (por ejemplo, a una de carácter determinista); y el físico suele ser capaz de decidir perfectamente si puede aceptar por el momento una hipótesis probabilitaria concreta en calidad de «confirmada empíricamente», o si es menester rechazarla en concepto de «prácticamente falsada» (esto es, de inútil para fines de predicción). está bastante claro que solamente puede llegarse a esta «falsación práctica» mediante una decisión metodológica de considerar excluidos —o prohibidos— los eventos sumamente improbables. Pero, ¿con qué derecho los condenamos de tal modo? ¿Dónde hemos de trazar la línea de separación? ¿Dónde empieza semejante «suma improbabilidad»?

Dado que desde un punto de vista lógico no cabe la menor duda sobre el hecho de que los enunciados probabilitarios no pueden ser falsados, el hecho igualmente indudable de que los empleemos empíricamente ha de aparecer como un golpe fatal para mis ideas metodológicas básicas, que penden decisivamente de mi criterio de demarcación. Sin embargo, trataré de contestar a las cuestiones que he planteado —y que constituyen el problema de la decidibilidad— mediante

[1] Pero no vacías de «contenido lógico» (cf. el apartado 35): pues es claro que para cualquier sucesión no tiene validez tautológica cualquier hipótesis frecuencial.

una resuelta aplicación de aquellas mismas ideas. Mas para hacerlo, tengo que analizar primero la forma lógica de los enunciados probabilitarios teniendo en cuenta, tanto las relaciones lógicas existentes entre ellos, como aquéllas en que están con respecto a los enunciados básicos [*1].

66. La forma lógica de los enunciados probabilitarios

Las estimaciones de probabilidad *no* son falsables. Ni, por supuesto, verificables, por la misma razón que se puede esgrimir contra las demás hipótesis: que no hay resultados experimentales —por numerosos y favorables que sean— que puedan establecer de un modo definitivo que la frecuencia relativa de las «caras» es 1/2 y será *siempre* 1/2.

Así pues, los enunciados probabilitarios y los básicos son incapaces de contradecirse ni de entrañarse mutuamente. No obstante tal cosa, sería un error concluir de este hecho que no existen relaciones lógicas de ningún tipo entre unos y otros enunciados; y estaríamos igualmente descaminados si creyésemos que, si bien se encuentran relaciones lógicas entre ellos (puesto que es evidente que las sucesiones de observaciones pueden estar de acuerdo más o menos perfecto con un enunciado probabilitario), el análisis de dichas relaciones nos obliga a introducir una lógica probabilística especial [1], que rompería los grilletes de la lógica clásica. Frente a semejantes opiniones, creo que las relaciones en cuestión pueden ser analizadas completamente a base de las «clásicas» relaciones lógicas de *deductibilidad* y *contradicción* [*2].

A partir de la infalsabilidad y de la inverificabilidad de los enunciados probabilitarios puede inferirse que no tienen consecuencias falsables, y que, a su vez, no pueden ser consecuencia de enunciados ve-

---

[*1] Creo que la acentuación dada a la irrefutabilidad de las hipótesis probabilísticas —y que culmina en el apartado 67— era saludable, pues sacaba al desnudo un problema que no se había estudiado anteriormente (debido a que, en general, se ponía el acento sobre la verificabilidad —en lugar de la falsabilidad— y al hecho de que los enunciados probabilitarios son, en cierto sentido, verificables o «confirmables», como se explica en el apartado siguiente). Pero la reforma que propongo en la nota *1 del apartado 57 (véase también la nota *2 del 64) cambia totalmente la situación: ya que —aparte de conseguir otras cosas— equivale a la adopción de una regla metodológica que, como la propuesta en el apartado 68, más adelante, hace falsables las hipótesis probabilitarias. Con lo cual el problema de la decidibilidad se transforma en el siguiente: dado que sólo cabe esperar que las sucesiones empíricas *se aproximen* a sucesiones aleatorizadas mínimas, ¿qué aproximación es aceptable y cuál inaceptable? No cabe duda de que la respuesta reside en que lo ceñido de una aproximación es una cuestión de grado, y en que la determinación de tal grado es uno de los principales problemas de la estadística matemática y de la teoría de la corroboración. Véase, asimismo, el apéndice *IX, especialmente mi «tercera nota».

[1] Cf. el apartado 80, en especial las notas 3 y 6.

[*2] Aun cuando no estoy en desacuerdo con esto, creo ahora que los conceptos probabilísticos de «casi deductible» y «casi contradictorio» son sumamente útiles con respecto a este problema; véanse el apéndice *IX y el capítulo *III del *Postscript*.

rificables. Pero no quedan excluidas con esto las posibilidades contrarias: pues puede ocurrir: *a)* que tengan consecuencias verificables unilateralmente (consecuencias puramente existenciales o consecuencias de «hay»), o *b)* que sean consecuencia de enunciados universales unilateralmente falsables (enunciados totales).

La posibilidad *b)* difícilmente podrá ayudar al esclarecimiento de la relación lógica existente entre enunciados probabilitarios y básicos: pues es enteramente obvio que un enunciado no falsable —o sea, uno que dice demasiado poco— puede pertenecer a la clase consecuencia de uno falsable, y que, por tanto, dice más que aquél.

Tiene más interés para nosotros la posibilidad *a)*, que en modo alguno es trivial, sino que, realmente, resulta ser fundamental para nuestro análisis de la relación existente entre los enunciados probabilitarios y los básicos. Pero nos encontramos con que de todo enunciado probabilitario cabe deducir una clase infinita de enunciados existenciales, pero no viceversa (así pues, aquél afirma más que ninguno de éstos). Por ejemplo: sea p una probabilidad estimada —hipotéticamente— para cierta alternativa (siendo $0 \neq p \neq 1$); de aquí podemos deducir, por ejemplo, la consecuencia existencial de que aparecerán ceros y unos en la sucesión (y, naturalmente, también pueden seguirse consecuencias mucho menos simples: así, que aparecerán segmentos cuya discrepancia con respecto a p será muy pequeña).

Pero podemos deducir mucho más a partir de semejante estimación: por ejemplo, que «una y otra vez» aparecerá un elemento con la propiedad «1» y lo mismo otro con la propiedad «0»; es decir, que *después* de un elemento cualquiera x de la sucesión se encontrarán también en ésta un elemento y que posea la propiedad «1» y un elemento z con la propiedad «0». Un enunciado de esta forma («para *todo* x existe un y con la propiedad observable —o contrastable extensionalmente— β») es infalsable —debido a no tener consecuencias falsables— e inverificable —ya que «todo» o «para cada» lo convierten en hipotético *2. A pesar de ello, puede estar mejor o peor

*2 Como es natural, no pretendí nunca sugerir que *todo* enunciado de la forma «para todo x existe un y con la propiedad observable β» sea infalsable, y, por tanto, no contrastable: es evidente que el enunciado «para toda tirada con una perra chica que da 1 existe un sucesor inmediato que da 0» es falsable y resulta falsado. Lo que da origen a la infalsabilidad no es precisamente la forma «para todo x existe un y tal que ...», sino el hecho de que el «existe» esté *ilimitado*, esto es, que la aparición de y pueda aplazarse más allá de todo límite; en el caso probabilístico, y *puede aparecer todo lo tarde que le plazca, como si dijéramos:* un elemento «0» puede aparecer inmediatamente, o al cabo de mil tiradas, o tras un número cualquiera de ellas; y éste es el hecho causante de la infalsabilidad. Por el contrario, si la distancia entre el lugar en que aparece y y el de aparición de x está *limitada* o acotada, entonces el enunciado «para todo x existe un y tal que ...», puede ser falsable.

Mi enunciación algo desprevenida en el texto (que presuponía tácitamente el apartado 15) ha llevado a algunos, con gran sorpresa mía, a la creencia de que *todos* los enunciados —o «la mayoría» de ellos, cualquiera que sea lo que esto quiera decir— de la forma «para todo x existe un y tal que ...» son infalsables; lo cual se ha empleado repetidamente para criticar el criterio de falsabilidad: véase, por ejemplo, *Mind* 54, 1945, págs. 119 y sig. En mi *Postscript*, especialmente en los apartados *24 y sig., discuto más extensamente todo el problema de estos «enunciados de todo y algún» [en ingl., *all-and-some statements*] (término debido a J. W. N. Watkins).

«confirmado», en el sentido de que podemos lograr verificar muchas, pocas o ninguna de sus consecuencias existenciales: de ahí que se encuentre, con respecto a los enunciados básicos, en una relación que, al parecer, es característica de los enunciados probabilitarios. Los enunciados de la forma indicada pueden ser llamados «enunciados existenciales universalizados» o «*hipótesis existenciales*» (universalizadas).

Lo que yo mantengo es que se puede entender la relación entre las estimaciones probabilitarias y los enunciados básicos —así como la posibilidad de que aquéllas estén más o menos bien «confirmadas» —parando mientes en el hecho de que de todas las estimaciones de probabilidad son *deductibles lógicamente* hipótesis existenciales. Lo cual hace pensar en la cuestión de si cabe que las estimaciones probabilitarias mismas tengan la forma de hipótesis existenciales.

Toda estimación probabilitaria (hipotética) entraña la conjetura de que la sucesión empírica en cuestión es, aproximadamente, azarosa (o aleatoria): es decir, entraña la aplicabilidad (aproximada) de los axiomas del cálculo de probabilidades. Nuestra cuestión es, pues, equivalente a la de si tales axiomas representan lo que he llamado «hipótesis existenciales».

Si observamos atentamente los dos requisitos propuestos en el apartado 64, veremos que el de aleatoriedad tiene realmente la forma de una hipótesis existencial [2]. El requisito de unicidad, por el contrario, no tiene tal forma: ni puede tenerla, ya que un enunciado de la forma «hay *sólo un*...» ha de poseer la de un enunciado universal (pues cabe traducirle por «no hay más que un...» o por «todos los... son idénticos»).

Ahora bien; mi tesis acerca de la cuestión es que lo único que establece una relación lógica entre las estimaciones probabilitarias y los enunciados básicos es lo que podría llamarse el «constituyente existencial» de aquéllas (y, por tanto, el requisito de aleatoriedad); de acuerdo con esto, el requisito de unicidad, como enunciado universal que es, no tendrá consecuencias extensionales de ninguna clase. Es cierto que puede «confirmarse» extensionalmente —aunque, desde luego, sólo de un modo provisional— que existe un valor p con las propiedades que se exigen para él, pero no que exista *sólo un* valor semejante. Este último enunciado, que es universal, solamente podría tener significación extensional si los enunciados básicos fueran capaces de establecer la existencia de más de uno de tales valores; pero como no lo son (pues recordamos que a la fórmula binomial está ligada la infalsabilidad), el requisito de unicidad ha de carecer de semejante significación *[3].

---

[2] Puede ponérsele en la forma siguiente: Para todo ϵ positivo, todo acervo-n predecesor y todo elemento con el número ordinal x, existe un elemento —seleccionado de acuerdo con una selección según predecesores— con el número ordinal $y > x$ y tal que la frecuencia hasta el término y discrepa de un valor fijado p en una cantidad menor que ϵ.

*[3] La situación es enteramente distinta si se adopta el requisito (+ 2) de la nota *2 del apartado 64, el cual tiene significación empírica y hace falsables las hipótesis probabilitarias (tal como se afirma en la nota *1 del apartado 65).

Esta es la razón por la que las relaciones lógicas existentes entre una estimación probabilitaria y los enunciados básicos permanecen inalterables si eliminamos del sistema el requisito de unicidad (y lo mismo le ocurre a la «confirmabilidad» —en mayor o menor grado— de la primera). Mediante esta operación podríamos dar al sistema la forma de una pura hipótesis existencial [3]; pero entonces tendríamos que abandonar la unicidad de las estimaciones probabilitarias *[4], y de ahí llegaríamos (en lo que se refiere a la unicidad) a algo distinto del cálculo de probabilidades usual.

Por tanto, el requisito de unicidad no es superfluo, evidentemente. ¿Cuál es, pues, su función lógica?

Mientras que el requisito de aleatoriedad contribuye a establecer una relación entre los enunciados probabilitarios y los enunciados básicos, el de unicidad regula las relaciones existentes entre los diversos enunciados de probabilidad mismos; sin este requisito, algunos de ellos podrían —como hipótesis existenciales— ser deductibles de otros, pero nunca podrían contradecirse mutuamente. Sólo la condición de unicidad asegura que los enunciados probabilitarios puedan contradecirse unos a otros: pues gracias a ella adquieren éstos la forma de una conyunción cuyos componentes son un enunciado universal y una hipótesis existencial; y los enunciados de esta forma pueden encontrarse entre sí exactamente en las mismas relaciones lógicas fundamentales (equivalencia, deductibilidad, compatibilidad o incompatibilidad) de que son capaces los enunciados universales «normales» de una teoría cualquiera —por ejemplo, de una teoría falsable.

Si nos volvemos ahora al axioma de convergencia, encontramos que se parece al requisito de unicidad en tener la forma de un enunciado universal infalsable, pero que pide más de lo que exige este requisito. Sin embargo, aquello que pide de modo suplementario no puede tener ninguna significación extensional; y, además, tampoco la tiene lógica o formal, sino *exclusivamente intensional:* se pide la exclusión de todas las sucesiones definidas intensionalmente (esto es, matemáticas) que carezcan de límite frecuencial. Pero, desde el punto de vista de las aplicaciones, semejante exclusión resulta que no tiene significación ni siquiera intensional, ya que en la teoría de la probabilidad aplicada, desde luego, no tratamos con las sucesiones matemáticas mismas, sino solamente con estimaciones hipotéticas acerca de sucesiones empíricas. Por tanto, la eliminación de las sucesiones carentes de límite frecuencial podría servir únicamente para ponernos en guardia y no considerar azarosas o aleatorias aquellas sucesiones empíricas con respecto a las cuales asumiéramos que no tenían

---

[3] Las fórmulas del cálculo de probabilidades son también deductibles de esta axiomatización, sólo que han de interpretarse como fórmulas existenciales. El teorema de Bernoulli, por ejemplo, no afirmaría ya que el valor probabilitario único de $\alpha_nF(\triangle p)$ para un n concreto se encuentra cercano a 1, sino solamente que entre los distintos valores probabilitarios de $\alpha_nF(\triangle p)$ para un n concreto, hay al menos uno que se encuentra cercano a 1.

*[4] Como he hecho ver en la nueva nota *2 del apartado 64, se puede eliminar cualquier *requisito* especial de unicidad sin sacrificar ésta.

límite frecuencial. Mas, ¿qué pasos habríamos de dar en respuesta a esta advertencia?[4]. ¿A qué clase de consideraciones o de conjeturas deberíamos entregarnos acerca de la posible convergencia o divergencia de sucesiones empíricas, o de cuáles deberíamos abstenernos, en vista de lo que se nos había advertido, si tenemos en cuenta que los criterios de convergencia ya no son aplicables a ellas, ni más ni menos que los de divergencia? Todas estas embarazosas cuestiones[5] desaparecen en cuanto nos libramos del axioma de convergencia.

Así pues, nuestro análisis lógico convierte en transparentes tanto la forma como la función de los diversos requisitos parciales del sistema, y hace ver qué razones militan contra el axioma de aleatoriedad y en favor del de unicidad. Pero, mientras tanto, el problema de la decidibilidad parece hacerse cada vez más amenazador; y aunque no nos vemos forzados a decir que nuestros requisitos (o axiomas) «carecen de sentido»[6], parece que nos encontramos obligados a describirlos como no empíricos. Pero semejante descripción de los enunciados probabilitarios —cualesquiera que sean las palabras que empleemos para expresarla— ¿no contradice la idea fundamental de nuestra posición?

67. Un sistema probabilístico de metafísica especulativa

La utilización más importante de los enunciados de probabilidad en la física es la siguiente: se interpretan ciertas regularidades físicas o ciertos efectos físicos observables como «macro-leyes»; esto es, se los interpreta o explica como efectos masivos, o como los resultados observables de «micro-eventos» hipotéticos y no directamente observables. Las macro-leyes se deducen de estimaciones probabilitarias por el método siguiente: hacemos ver que las observaciones que estén de acuerdo con la regularidad observada en cuestión deben esperarse con una probabilidad muy próxima a 1 (es decir, con una probabilidad que discrepe de 1 en una cantidad que se puede hacer tan pequeña como se quiera); y decimos entonces que mediante nuestra estima-

---

[4] Es posible considerar con justeza como advertencias (intensionales) de esta índole, tanto al axioma de aleatoriedad como al de unicidad. Por ejemplo, el primero nos previene de que no tratemos a las sucesiones como aleatorias si suponemos (por las razones que sean) que ciertos sistemas de jugar tendrán éxito con ellas. En cuanto al de unicidad, se cuida de precavernos para que no atribuyamos la probabilidad q (siendo $q \neq p$) a una sucesión que suponemos poderse describir aproximadamente por medio de la hipótesis de que su probabilidad es igual a p.

[5] Schlick ha objetado al axioma del límite basándose en escrúpulos parecidos *(Die Naturwissenschaften* **19**, 1931, pág. 158).

[6] El positivista tendría que reconocer en esta ocasión una jerarquía completa de «carencias de sentido». Para él, las leyes naturales inverificables son «carentes de sentido» (cf. el apartado 6 y las citas indicadas en las notas 1 y 2 del mismo), y, por tanto, aún más lo son las hipótesis probabilitarias, que no son ni verificables ni falsables. En cuanto a los axiomas, el de unicidad —que no tiene significación extensional— tendría menos sentido que el axioma (carente de sentido) de irregularidad, que, al menos, posee consecuencias extensionales; y todavía menos sentido cabría al axioma del límite, que ni siquiera tiene significación intensional.

ción probabilitaria hemos «explicado» el efecto observable a que nos referíamos como un macro-efecto.

Pero si empleamos de esta manera las estimaciones probabilitarias para «explicar» regularidades observables *sin tomar precauciones especiales*, podemos vernos inmediatamente complicados en especulaciones que —de acuerdo con el uso general— cabe perfectamente indicar que son típicas de la *metafísica especulativa.*

Pues, como los enunciados probabilitarios no son falsables, siempre será posible «explicar» de este modo, mediante estimaciones de probabilidad, *cualquier regularidad que nos venga en gana.* Sea, por ejemplo, la ley de la gravedad. Podemos arreglárnoslas para que ciertas estimaciones probabilitarias hipotéticas «expliquen» esta ley del modo siguiente. Elegimos unos eventos de cierto tipo para que hagan de eventos elementales o atómicos: por ejemplo, los del movimiento de una pequeña partícula. Elegimos también qué ha de ser una propiedad primaria de tales eventos: así, la dirección y velocidad del movimiento de la misma. Asumimos luego que tales eventos presentan una distribución azarosa, y, finalmente, calculamos la probabilidad de que todas las partículas dentro de cierta región espacial finita —y durante cierto período de tiempo finito, o «período cósmico»— se muevan accidentalmente (con una exactitud especificada) del modo que exige la ley de la gravedad. La probabilidad calculada, naturalmente, será muy pequeña: en realidad, será despreciable, pero no igual a cero. Podemos entonces plantear la cuestión acerca de la longitud que ha de tener un segmento-*n* de la sucesión —o, de otro modo, de la duración que es preciso asumir para la totalidad del proceso— de modo que podamos esperar con probabilidad próxima a 1 (o que discrepe de 1 en una cantidad no mayor que un valor ϵ arbitrariamente pequeño) la aparición de semejante período cósmico, en el que —como resultado de una acumulación de accidentes— nuestras observaciones estén de acuerdo con la ley de la gravedad: para cualquier valor próximo a 1 que elijamos obtenemos un número finito, aunque enormemente grande. Podemos decir, por tanto: si suponemos que el segmento de la sucesión tiene esa grandísima longitud —o, dicho de otro modo, que el «mundo» dura el tiempo suficiente—, entonces al asumir la aleatoriedad estamos autorizados a esperar que aparezca un período cósmico en el que la ley de la gravedad parezca tener validez, aunque, «en realidad», no haya sino dispersión aleatoria. Este tipo de «explicación» por medio de la asunción de aleatoriedad es aplicable a cualquier regularidad que escojamos; realmente, podemos «explicar» de este modo el conjunto de nuestro mundo, con todas las regularidades que en él se observan, como una fase de un caos aleatorio —o sea, *como una acumulación de coincidencias puramente accidentales.*

Para mí está claro que las especulaciones de esta índole son «metafísicas», y que carecen de importancia para la ciencia; e igualmente claro parece estar que este hecho va unido a su infalsabilidad, es decir, al hecho de que siempre y en todas las circunstancias podemos entregarnos a ellas. Por tanto, mi criterio de demarcación tiene aire de estar francamente de acuerdo con el uso general de la palabra «metafísico».

Por consiguiente, las teorías que incluyen la probabilidad no deben considerarse científicas si se aplican sin adoptar precauciones especiales. Hemos de eliminar su empleo metafísico para que puedan tener alguna utilidad en la práctica de la ciencia empírica *[1].

68. La probabilidad en la física

El problema de la decidibilidad solamente desasosiega al metodólogo, no al físico *[1]. Si se pide a éste que dé un concepto de probabilidad aplicable prácticamente, quizá proponga algo así como una *definición física de la probabilidad*, cuyo perfil será más o menos el siguiente. Existen ciertos experimentos que conducen a resultados variables, incluso si se llevan a cabo en condiciones perfectamente reguladas; en algunos de ellos —los que son «azarosos», como las tiradas de una moneda— la repetición frecuente lleva a resultados con frecuencias relativas que, según se van reiterando una y otra vez, se aproximan cada vez más a un valor fijo que podemos llamar la *probabilidad* del evento en cuestión: este valor es «... determinable empíricamente con un grado cualquiera de aproximación mediante largas series de experimentos» [1]; lo cual explica, incidentalmente,

*[1] Al escribir esto pensaba que se reconocería fácilmente que las especulaciones de la índole descrita son inútiles, debido justamente a su aplicabilidad ilimitada. Pero, al parecer, son más tentadoras de lo que yo imaginaba: pues se ha dicho —por ejemplo, por J. B. S. Haldane (en *Nature* **122**, 1928, pág. 808; cf. también su *Inequality of Man*, págs. 163 y sig.)— que si aceptamos la teoría probabilitaria de la entropía debemos considerar seguro, o casi seguro, que el mundo se repetirá de nuevo accidentalmente —con tal de que esperemos el tiempo suficiente—. Este razonamiento se ha repetido después frecuentemente por otros, desde luego; pero, a mi entender, constituye un ejemplo perfecto del tipo de razonamiento que aquí critico, y que podría llevarnos a esperar casi con seguridad cualquier cosa que queramos. Todo lo cual hace ver los peligros inherentes a la forma existencial, que los enunciados probabilitarios comparten con la mayoría de los de la metafísica (cf. el apartado 15).

*[1] El problema que estudio en este pasaje había sido tratado claramente y a fondo hace largo tiempo por los físicos P. y T. Ehrenfest, en la *Encycl. d. Math. Wiss.*, 4. Teilband, Heft 6 (12 de diciembre de 1911), apartado 30, donde le consideraban un problema *conceptual* y *epistemológico*. Estos autores introducían la idea de «hipótesis probabilitarias de órdenes primero, segundo, ..., k-ésimo»: por ejemplo, una hipótesis probabilitaria de segundo orden es una estimación de la frecuencia con que aparecen ciertas frecuencias en un agregado de agregados. Sin embargo, P. y T. Ehrenfest no manejan nada que corresponda a la idea de *efecto reproducible*, que empleamos aquí de modo crucial para solventar el problema que ellos habían expuesto tan perfectamente; véase, especialmente, la oposición entre Boltzmann y Planck a que se refieren en las notas 247 y sig., y que, según creo, puede resolverse acudiendo a la idea mencionada: pues —en condiciones experimentales apropiadas— las fluctuaciones pueden llevar a efectos reproducibles, como quedó patente de modo tan impresionante con la teoría de Einstein del movimiento browniano. Véanse, asimismo, la nota *1 del apartado 65 y los apéndices *VI y *IX.

[1] La cita es de Born-Jordan, *Elementare Quantenmechanik* (1930), pág. 306; cf. también el comienzo de la *Quantum Mechanics*, de Dirac, pág. 10 de la 1.ª ed. (1930); en la pág. 14 de la 3.ª ed., de 1947, se encuentra un pasaje paralelo (lige-

por qué es posible falsar una estimación hipotética de probabilidad.

Tanto los matemáticos como los lógicos plantearán ciertas objeciones contra toda definición de análogo perfil; y, en particular, las siguientes:

1) Tal definición no está de acuerdo con el cálculo de probabilidades, ya que, según el teorema de Bernoulli, sólo son estadísticamente estables —esto es, se comportan como convergentes— *casi* todos los segmentos muy largos. Por esta razón, la probabilidad no puede ser definida por dicha estabilidad (o sea, por el comportamiento casi-convergente), ya que la expresión «*casi* todos» —que debería aparecer en el *definiens*— es, a su vez, solamente un sinónimo de «muy probable»: la definición es, pues, circular —hecho que puede ocultarse (pero no eliminarse) omitiendo la palabra «casi», que es lo que ha hecho el físico en su definición (que, por tanto, es inaceptable).

2) ¿Cuándo ha de llamarse «*larga*» a una serie de experimentos? Si no se nos da un criterio de lo que hemos de considerar «largo», no podemos saber cuándo hemos llegado a una aproximación de la probabilidad, o si hemos llegado.

3) ¿Cómo podemos saber si hemos alcanzado realmente el grado de *aproximación* deseado?

Aunque opino que estas objeciones están justificadas, con todo ello sigo creyendo que podemos conservar la definición del físico, y voy a apoyar tal creencia por medio de los argumentos esbozados en el apartado anterior. Según éstos, las hipótesis probabilitarias pierden todo contenido informativo cuando se les concede una posibilidad de aplicación sin restricciones; pero el físico nunca las utilizaría de semejante forma. Y, siguiendo su ejemplo, no permitiré una aplicación sin límites de tales hipótesis: propongo que adoptemos *la decisión metodológica de no explicar nunca efectos físicos —esto es, regularidades reproducibles— como acumulaciones accidentales*. Esta decisión, como es natural, modifica el concepto de probabilidad: precisamente lo restringe *2. Así pues, la objeción 1) no afecta a mi posición, ya que yo no afirmo, en absoluto, la identidad de los conceptos físico y matemático de probabilidad, sino que —por el contrario— la niego; pero surge una nueva objeción en el lugar de aquélla.

1') ¿Cuándo podemos hablar de «acumulaciones accidentales»? Cabe presumir que en el caso de una probabilidad pequeña; pero, ¿cuándo es «*pequeña*» una probabilidad? Podemos aceptar que la propuesta que acabo de hacer elimina el empleo del método (de que hemos tratado en el apartado precedente) de fabricarnos una proba-

---

ramente abreviado). Véase también WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2.ª ed., 1931, pág. 66); vers. ingl. por H. P. ROBERTSON, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (1931), págs. 74 y sig.

*2 La decisión o regla metodológica que aquí formulo restringe el concepto de probabilidad, del mismo modo que lo restringe la decisión de adoptar sucesiones aleatorizadas *mínimas* como modelos matemáticos de las sucesiones empíricas; cf. la nota *1 del apartado 65.

bilidad tan grande como queramos a partir de una pequeña sin más que cambiar la formulación del problema matemático. Mas para ejecutar la decisión propuesta tenemos que saber lo que hemos de considerar *pequeño*.

Mostraremos en las páginas que siguen que la regla metodológica que he propuesto está de acuerdo con la definición del físico, y que, apoyándonos en ella, podemos contestar a las objeciones planteadas por las cuestiones 1′), 2) y 3). Me referiré, por de pronto, solamente a *un* caso típico de aplicación del cálculo de probabilidades: el de ciertos macro-efectos reproducibles que pueden describirse mediante (macro-) leyes precisas —como la de presión de un gas— y que interpretamos o explicamos diciendo que se deben a una enorme acumulación de micro-procesos, tales como colisiones moleculares. Otros casos típicos (así, las fluctuaciones estadísticas o la estadística de procesos individuales azarosos) pueden reducirse sin gran dificultad al anterior *[3].

Fijémonos en un macro-efecto del tipo indicado, que se describe por medio de una ley bien corroborada y que hemos de reducir a sucesiones aleatorias de micro-eventos. Supongamos que la ley afirma que bajo ciertas condiciones una magnitud física tiene el valor p; y admitamos, asimismo, que el efecto tiene «precisión», de suerte que no aparezcan fluctuaciones observables, esto es, discrepancias con respecto a p fuera del intervalo $\pm\varphi$ (el intervalo de imprecisión; cf. el apartado 37) dentro del cual han de fluctuar, en todo caso, nuestras medidas debido a las imprecisiones inherentes a la técnica de medición empleada. Proponemos ahora la hipótesis de que p es una probabilidad dentro de una sucesión de micro-eventos; y, además, que son n de éstos los que contribuyen a producir el efecto del caso. Entonces (cf. el apartado 61), podemos calcular —para cada valor de δ que elijamos— la probabilidad $_{\alpha_n}F(\triangle p)$, esto es, la probabilidad de que el valor medio caiga dentro del intervalo $\triangle p$. Denotemos con «ϵ» la probabilidad complementaria: tenemos que $_{\alpha_n}F(\triangle_p) = \epsilon$, y, según el teorema de Bernoulli, ϵ tiende a cero cuando n crece sin fin y sin límite.

Suponemos ahora que ϵ es tan «pequeña» que puede despreciarse (nos ocuparemos muy pronto de la cuestión 1′), que se refiere a qué quiere decir «pequeño» dentro de esta suposición); y es claro que $\triangle p$ ha de interpretarse como el intervalo dentro del cual las medidas se acercan al valor p. Vemos, pues, que las tres cantidades ϵ, n y $\triangle p$ corresponden, respectivamente, a las tres cuestiones 1′), 2) y 3). Podemos elegir $\triangle p$ —o δ— arbitrariamente, con lo cual se restringe la arbitrariedad de la elección de ϵ y de n. Como lo que nos proponemos es deducir el macro-efecto exacto p $(\pm\varphi)$, no supondremos que δ pueda ser mayor que φ; y en lo que respecta al efecto reproducible p, la

*[3] Actualmente siento ciertas dudas acerca de las palabras «sin gran dificultad»: en realidad, excepto en el caso de los macro-efectos extremos que discuto en este apartado, es menester emplear métodos estadísticos sumamente refinados. Véase también el apéndice *IX, especialmente la «Tercera nota».

deducción será satisfactoria si la llevamos a cabo para cierto valor $\delta < \varphi$ (aquí está dada φ, ya que está determinada por la técnica de medición): elijamos ahora δ de modo que sea (aproximadamente) igual a φ. Hemos reducido, por tanto, la cuestión 3) a las otras dos o sea, a la 1′) y la 2).

Al elegir δ (esto es, $\triangle p$) hemos establecido una relación entre n y ϵ, ya que a cada n corresponde ahora unívocamente un valor de ϵ. Así pues, la cuestión 2), es decir, la de si n es suficientemente grande, ha quedado reducida a la 1′), esto es, a la de cuándo es pequeña ϵ (y viceversa).

Pero esto quiere decir que podríamos responder a *las tres cuestiones* con sólo que fuésemos capaces de decidir *qué valor determinado* de ϵ podemos no tener en cuenta por ser ya «despreciable». Ahora bien, nuestra regla metodológica equivale a la decisión de despreciar *pequeños* valores de ϵ; pero no estamos dispuestos fácilmente a ligarnos para siempre a un valor determinado de ϵ.

Si le planteamos la cuestión a un físico, o sea, si le preguntamos qué valor de ϵ está dispuesto a despreciar —si será 0,001, o 0,00001, o ...—, contestará probablemente que ϵ no le interesa lo más mínimo: que lo que ha elegido no es ϵ, sino n, y que lo ha elegido de tal modo que la correlación entre n y $\triangle p$ se haga en gran medida *independiente de los cambios* en el valor de ϵ que podamos elegir.

La respuesta del físico está justificada, debido a las peculiaridades matemáticas de la distribución de Bernoulli, pues es posible determinar para cada n la dependencia funcional entre ϵ y $\triangle p$ [*4]: un examen de esta función hace ver que para *cada* n («grande») existe un valor característico de $\triangle p$ tal, que en su vecindad $\triangle p$ es sumamente insensible a los cambios de valor de ϵ; y esta insensibilidad aumenta al crecer n. Si adoptamos para n el orden de magnitud que es de esperar en el caso de fenómenos extremadamente masivos, entonces $\triangle p$ es tan insensible —en las proximidades de su valor característico— a las modificaciones que pueda experimentar ϵ, que apenas cambia en absoluto si varía el orden de magnitud de ϵ; y ahora el

---

[*4] Según creo ahora, las observaciones que siguen en el presente párrafo (así como algunos razonamientos posteriores de este apartado) han quedado aclaradas y superadas por las consideraciones que se hacen en el apéndice *IX: véanse, especialmente, los puntos 8 y sigs. de la «tercera nota». Con los métodos que allí se emplean puede hacerse ver que casi todas las muestras estadísticas posibles de gran tamaño n debilitarán notablemente una hipótesis probabilística dada; esto es, le darán un elevado grado *negativo* de corroboración, lo cual podemos decidirnos a interpretarlo como una refutación o una falsación; de las muestras restantes, la mayoría apoyarán la hipótesis, o sea, que le darán un grado *positivo* elevado de corroboración; y un número relativamente reducido de muestras de gran tamaño n darán a la hipótesis probabilística un grado no decisivo de corroboración (ya sea positiva o negativa). Así pues, esperaremos ser capaces de refutar una hipótesis probabilística, en el sentido aquí indicado, e incluso podemos esperar tal cosa con mayor confianza que en el caso en que la hipótesis no sea probabilística. Desde luego, la regla metodológica de considerar falsación (siendo n grande) a un grado negativo de corroboración es un caso específico de la regla o decisión metodológica de desechar ciertas improbabilidades extremas —que estudiamos en el presente apartado.

físico atribuirá poco valor a unos límites de $\triangle p$ más definidos que éstos. Pero en el caso de fenómenos masivos típicos —al cual se limita esta investigación—, recordamos que puede adoptarse para $\triangle p$ el intervalo de precisión $\pm\varphi$, que depende de nuestra técnica de medición y no posee límites o extremos netos, sino únicamente lo que en el apartado 37 he llamado «extremos de condensación». Por tanto, llamaremos grande a n cuando la insensibilidad de $\triangle p$ en las proximidades de su valor característico —que podemos determinar— sea, por lo menos, tan grande que incluso cambios en el orden de magnitud de ϵ hagan fluctuar a $\triangle p$ exclusivamente dentro de los extremos de condensación de $\pm\varphi$ (si $n \to \infty$, $\triangle p$ se hace completamente insensible). Pero si esto es así, entonces no necesitamos preocuparnos más de una determinación exacta de ϵ: *basta la decisión de despreciar un ϵ pequeño,* incluso si no hemos enunciado exactamente a qué se debe considerar «pequeño»: pues equivale a la decisión de trabajar con los valores característicos de $\triangle p$ mencionados, que son insensibles a los cambios que sufra ϵ.

La regla de que han de despreciarse las improbabilidades extremas (regla que únicamente se hace suficientemente explícita a la luz de lo que acabamos de decir) concuerda con la exigencia de *objetividad científica.* Pues la objeción obvia a nuestra regla es, sin duda, que incluso la mayor improbabilidad es siempre una probabilidad —por pequeña que sea— y que, en consecuencia, algún día ocurrirán incluso los procesos más improbables —esto es, los que proponemos que se desprecien—. Pero es posible acabar con esta objeción recordando *la idea de efecto físico reproducible,* que está ligada estrechamente a la de objetividad (cf. el apartado 8). No niego la posibilidad de que ocurran efectos improbables: no aseguro, por ejemplo, que las moléculas de un pequeño volumen de gas no puedan quizá retirarse espontáneamente durante un corto intervalo de tiempo a una parte de dicho volumen, ni que jamás ocurran fluctuaciones de la presión de un volumen mayor de gas. Lo que sí afirmo es que semejantes acontecimientos no serán efectos físicos, ya que —debido a su inmensa improbabilidad— *no son reproducibles a voluntad.* Incluso en caso de que un físico llegara a observar un proceso de este tipo sería completamente incapaz de reproducirlo, y, por tanto, no podría nunca decidir qué era lo que realmente había sucedido, o si no había cometido un error al hacer la observación. Pero si encontramos desviaciones *reproducibles* con respecto al macro-efecto estimado del modo que hemos indicado, entonces hemos de suponer que la estimación probabilitaria ha quedado *falsada.*

Estas consideraciones pueden ayudarnos a comprender afirmaciones como la siguiente de Eddington, en la que distingue dos tipos de leyes: «algunas cosas no ocurren nunca en el mundo físico porque son *imposibles,* otras por ser demasiado *improbables.* Las leyes que prohiben las primeras son leyes primarias, las que prohiben las segundas, leyes secundarias» [2]. Aunque este modo de expresar las

[2] EDDINGTON, *The Nature of the Physical World* (C. U. P., 1928, pág. 75);

cosas no esté, tal vez, a salvo de toda crítica (yo preferiría abstenerme de hacer aserciones no contrastables acerca de si ocurren o no cosas sumamente improbables), se encuentra en buen acuerdo con la aplicación que hace el físico de la teoría de la probabilidad.

Otros casos en que puede aplicarse esta teoría —tales como las fluctuaciones estadísticas, o la estadística de eventos individuales azarosos— son reducibles al que hemos tratado, es decir, al de los macroefectos medibles con precisión. Por fluctuaciones estadísticas entiendo fenómenos tales como el del movimiento browniano; aquí, el intervalo de precisión de la medida ($\pm\varphi$) es más pequeño que el intervalo $\triangle p$ que caracteriza al número n de micro-eventos que contribuyen a dar origen al efecto, y, por ello, son de esperar con gran probabilidad discrepancias de p medibles. El que ocurran tales discrepancias será un hecho contrastable, ya que la fluctuación misma se convierte en un efecto reproducible; y se pueden aplicar a este mismo mis argumentaciones anteriores: las fluctuaciones más allá de cierta magnitud (o sea, fuera del intervalo $\triangle p$) no serán reproducibles —según mis exigencias metodológicas—, ni largas sucesiones de fluctuaciones en una y la misma dirección, etc. En el caso de la estadística de eventos individuales azarosos serían válidas consideraciones análogas.

Resumiré ahora mi argumentación acerca del problema de la decidibilidad.

Nuestra pregunta era: ¿Cómo pueden desempeñar el papel de leyes naturales de la ciencia empírica las hipótesis probabilitarias, que —como hemos visto— son infalsables? Respondemos del modo siguiente: los enunciados probabilitarios son metafísicos y carecen de significación empírica, en cuanto que no son falsables; mas pueden utilizarse como enunciados falsables en la medida en que se emplean como enunciados empíricos.

Pero esta respuesta plantea otra pregunta: *¿Cómo es posible* que los enunciados probabilitarios —que no son falsables— puedan *emplearse* como enunciados falsables? (El hecho de que se empleen de esta manera está fuera de duda: el físico sabe muy bien cuándo ha de considerar falsada una suposición probabilitaria.) Vemos que la cuestión tiene dos aspectos: por un lado, tenemos que hacer comprensible la posibilidad de emplear los enunciados probabilitarios, basándonos en su forma lógica; por otro, hemos de analizar las reglas que gobiernan su empleo como enunciados falsables.

Según el apartado 66, los enunciados básicos aceptados pueden estar de mejor o peor acuerdo con determinada estimación probabilitaria propuesta: pueden representar mejor o peor un segmento típico de una sucesión probabilitaria. Lo cual nos da ocasión para aplicar cierto tipo de *regla metodológica:* por ejemplo, una que pida que la conformidad entre los enunciados básicos y la estimación probabilitaria alcance un nivel mínimo; con lo cual la regla trazaría una línea arbitraria y decretaría que solamente están «permitidos» seg-

---

[vers. cast. por C. M. Reyles, *La naturaleza del mundo físico* (1945), Buenos Aires, Ed. Sudamericana, pág. 102 *(T.)*].

mentos razonablemente representativos (o razonablemente «buenas muestras»), mientras que están «prohibidos» segmentos atípicos o no representativos.

Al analizar más de cerca esta sugerencia hemos visto que no es preciso trazar tan arbitrariamente como podría parecer en un principio la línea de separación entre lo permitido y lo prohibido; y, en particular, que no es menester trazarla «con tolerancia», ya que cabe estructurar la regla de tal modo que aquella línea quede determinada por la precisión alcanzable por nuestras mediciones, lo mismo que ocurre en el caso de otras leyes.

La regla metodológica que proponemos de acuerdo con el criterio de demarcación, no prohibe que aparezcan segmentos atípicos, ni la aparición repetida de desviaciones (que, naturalmente, son típicas de las sucesiones probabilitarias). Lo que prohibe es que tengamos desviaciones sistemáticas —tales como las que van en una dirección concreta, o la aparición de segmentos atípicos de un modo definido— en forma previsible y reproducible. Así pues, no se contenta con exigir una conformidad meramente grosera, sino la mejor posible *en todo cuanto es reproducible y contrastable;* dicho brevemente, en todos los *efectos reproducibles.*

69. Ley y azar

A veces oye uno decir que los movimientos de los planetas obedecen a leyes rigurosas, mientras que la tirada de un dado es fortuita —o sujeta al azar—. En mi opinión, la diferencia reside en el hecho de que hasta ahora hemos sido capaces de predecir con éxito aquellos movimientos, pero no los resultados individuales de las tiradas de un dado.

Para deducir predicciones se necesitan leyes y condiciones iniciales: si no se dispone de leyes apropiadas o si no cabe averiguar cuáles son las condiciones iniciales, el modo científico de predecir se desmorona. Al tirar el dado, lo que nos falta, sin duda alguna, es un conocimiento suficiente de las condiciones iniciales; si dispusiéramos de mediciones suficientemente precisas de éstas también sería posible hacer predicciones en este caso; pero las reglas para tirar el dado correctamente (agitar el cubilete) están elegidas de tal modo que nos impidan medir las condiciones iniciales. Llamaré «*marco de condiciones*» las reglas de juego y todas aquellas otras que determinen las condiciones en que han de ocurrir los diversos eventos de una sucesión azarosa: consisten en requisitos tales como que el dado tiene que ser «correcto» (hecho de un material homogéneo), que se le ha de menear bien, etc.

Hay otros casos en que las predicciones pueden no dar resultado: quizá porque hasta el momento no haya sido posible formular leyes adecuadas, o porque hayan fracasado todas las tentativas de encontrar una ley y hayan quedado falsadas todas las predicciones. En tales casos, tal vez desesperemos de encontrar nunca una ley satisfactoria (aunque no es probable que dejemos enteramente de hacer intentos, a menos que el problema no nos interese demasiado: como puede ocurrir, por ejemplo, cuando nos damos por satisfechos con las predicciones frecuenciales). Sin embargo, en ningún caso podemos decir definitivamente que no hay leyes en un campo determinado (y esto es una consecuencia de la imposibilidad de verificación): lo cual quiere decir que mi tesis convierte en *subjetivo* el concepto de azar *[1]. Hablo de «azar» cuando lo que sabemos no es suficiente para predecir: como ocurre al tirar el dado, situación en que hablamos de «azar» debido a que no sabemos cuáles son las condiciones iniciales (y cabe concebir que un físico equipado con buenos instrumentos pueda predecir una tirada que otras personas no puedan).

A veces se ha defendido una tesis objetiva, opuesta a la subjetiva; pero no la estudiaré aquí (cf. los apartados 71 y 78), en cuanto que se apoya en la idea metafísica de que los eventos están —o no están— determinados en sí mismos. Si nuestra predicción tiene éxito podemos hablar de «leyes», y por lo demás no podemos saber *nada* acerca de la existencia o inexistencia de leyes o de irregularidades *[2].

Quizá la tesis siguiente es más digna de atención que aquella idea metafísica. Encontramos el «azar» en sentido objetivo, puede decirse, cuando nuestras estimaciones probabilitarias resultan confirmadas, del mismo modo que encontramos regularidades causales cuando las predicciones que deducimos de leyes vienen a corroborarse.

Tal vez no sea enteramente inutilizable la definición de azar implícita en esta tesis, pero debería hacerse resaltar enérgicamente que el concepto que *así* se ha definido *no* se opone al de ley; y *ésta* es la razón por que he llamado azar*osas* [en inglés: «chance-*like*», lit. «*parecidas* al azar» o «*como* el azar»] a las sucesiones probabilitarias. En general, será azarosa una sucesión de resultados experimentales cuando el marco de condiciones que la define difiera de las condiciones iniciales; o sea, cuando los experimentos individuales llevados a cabo en idéntico marco de condiciones partan de condiciones iniciales diversas, y den lugar, pues, a resultados diversos. En cuanto a si existen sucesiones azarosas cuyos elementos no sean previsibles de *ninguna* forma, es algo que ignoro. Del hecho de que una sucesión sea azarosa no podemos siquiera inferir que sus elementos no puedan predecirse, ni que sean «debidos al azar» en el sentido subjetivo de conocimiento insuficiente; y menos que nada cabe inferir de tal hecho el hecho «objetivo» de que no existan leyes *[3].

---

*[1] Esto no quiere decir que haga aquí ninguna concesión a una interpretación subjetiva de la *probabilidad*, del *desorden* ni de la *aleatoriedad*.

*[2] En este párrafo ha desestimado (debido a su carácter metafísico) una teoría metafísica que ahora —en mi *Postscript*— recomiendo encarecidamente, pues me parece que abre nuevas perspectivas, sugiere soluciones a ciertas serias dificultades, y tal vez sea verdadera. Aun cuando mientras escribía este libro me daba cuenta de tener creencias metafísicas, y aunque señalé incluso el valor sugerente de las ideas metafísicas para la ciencia, no había despertado al hecho de que cabe argumentar racionalmente contra ciertas doctrinas metafísicas, y criticarlas —pese a no poderse refutar—. Véase, especialmente, el último apartado de mi *Postscript*.

*[3] Hubiera ganado en claridad, según pienso, razonando del modo siguiente: No

No solamente no es posible inferir, a partir del carácter azaroso de una sucesión, nada acerca de la conformidad o disconformidad a leyes de los *eventos individuales;* ni siquiera podemos inferir —partiendo de la corroboración de estimaciones probabilitarias— que la sucesión misma sea completamente irregular, ya que sabemos que existen sucesiones azarosas construidas de acuerdo con una regla matemática (cf. el apéndice IV). El hecho de que una sucesión tenga una distribución bernoulliana no es síntoma de la ausencia de leyes, y mucho menos idéntico con la ausencia de leyes «por definición» [1]. No hemos de ver en el éxito de las predicciones de probabilidad otra cosa que un síntoma de la ausencia de leyes *sencillas* en la estructura de la *sucesión* (cf. los apartados 43 y 58) —frente a los eventos que la constituyen—; ha quedado corroborada la suposición de libertad de secuelas, que equivale a la hipótesis de que no es posible descubrir tales leyes *sencillas*, pero esto es todo.

70. La deductibilidad de macro-leyes a partir de micro-leyes

Hay una doctrina que casi ha llegado a convertirse en un prejuicio, si bien últimamente ha sufrido severas críticas: la de que *todos* los eventos observables deben explicarse como macro-eventos, es decir, como valores medios, o sea, acumulaciones de ciertos micro-eventos (doctrina algo parecida a ciertas formas de materialismo). Como ocurre con otras de la misma índole, parece ser el resultado de una hipóstasis metafísica de una regla metodológica a la que por sí misma no cabe hacer objeciones: me refiero a la regla de que deberíamos tratar de simplificar, o generalizar, o unificar nuestras teorías empleando hipótesis explicativas del tipo mencionado (esto es, hipótesis que expliquen los efectos observables como sumas o integraciones de micro-eventos). Al valorar el éxito de semejantes intentos sería un error pensar que bastarán alguna vez hipótesis *no estadísticas* acerca de los micro-eventos y de sus interacciones para explicar los macro-eventos; pues necesitaremos, además, *estimaciones frecuenciales* hipotéticas, ya que sólo cabe deducir conclusiones estadísticas de premisas estadísticas. Dichas estimaciones son siempre hipótesis independientes, que, ciertamente, pueden ocurrírsenos a veces cuando estamos ocupados con el estudio de las leyes referentes a micro-eventos, pero que

---

podemos repetir jamás con precisión un experimento: lo más que podemos hacer es mantener constantes *ciertas* condiciones y dentro de ciertos límites. Por tanto, el que determinados aspectos de nuestros resultados se repitan mientras que otros varíen irregularmente no constituye un argumento a favor de que lo objetivo sea fortuito, del azar o de la ausencia de leyes; especialmente, si el experimento está ideado (como en el caso de tirar una perra chica dando vueltas) para que las condiciones varíen. En cuanto a esto, sigo estando de acuerdo con lo que entonces decía; pero puede haber *otros* argumentos en favor de lo objetivamente fortuito: y uno de ellos, debido a Alfred Landé (la «cuchilla de Landé») tiene gran trascendencia a este respecto (trato de él extensamente en mi *Postscript*, apartados *90 y sig.).

[1] Como Schlick dice en *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Naturwissenschaften* 19, 1931, pág. 157.

nunca pueden ser deducidas de éstas. Las estimaciones frecuenciales forman una clase especial de hipótesis: son prohibiciones que hacen algo así como referirse a regularidades de lo grande [1]; Von Mises lo ha enunciado muy claramente: «ni el teorema más minúsculo de la teoría cinética de los gases se sigue de la física clásica sola, sin supuestos adicionales de índole estadística» [2].

Las estimaciones estadísticas —o los enunciados frecuenciales— no pueden nunca deducirse simplemente de leyes de tipo «determinístico», por la sencilla razón de que para deducir predicción alguna de tales leyes se necesitan condiciones iniciales. En lugar de éstas, en toda deducción en que se obtienen leyes estadísticas a partir de micro-suposiciones de carácter determinístico o «preciso», entran suposiciones acerca de la *distribución* estadística de las condiciones iniciales: esto es, asunciones estadísticas específicas [*1].

Es sorprendente el hecho de que las suposiciones frecuenciales de la física teórica son en gran medida *hipótesis equiazarosas*, pero esto no implica en absoluto que sean «evidentes» ni válidas *a priori;* y las amplias diferencias existentes entre la estadística clásica, la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac hacen ver hasta qué punto están lejos de ser así: estas estadísticas ponen de manifiesto cómo pueden combinarse asunciones especiales con hipótesis equiazarosas, con lo cual se llega en cada caso a definiciones distintas de las sucesiones de referencia y de las propiedades primarias para las que se asume una equidistribución.

Con el ejemplo siguiente podremos tal vez dar una imagen del hecho de que las suposiciones frecuenciales son indispensables incluso aunque nos sintamos inclinados a pasarnos sin ellas.

Imaginemos una cascada. En ella podremos discernir una extraña clase de regularidad, pues el tamaño de las corrientes que componen la chorrera varía, y de cuando en cuando algo de agua salpica y se separa de la vena principal; pero a través de todas estas variaciones

[1] A. March dice muy bien *(Die Grundlagen der Quantenmechanik,* 1931, página 250) *que las partículas de un gas no pueden comportarse «... como les parece;* cada una tiene que comportarse de acuerdo con el comportamiento de las demás. Puede considerarse que uno de los principios más fundamentales de la teoría cuántica es el de que el todo es más que la suma de las partes».

[2] VON MISES, *Über kausale und statistische Gesetzmässigkeiten in der Physik, Erkenntnis* 1, 1930, pág. 207 (cf. *Naturwissenschaften* 18, 1930).

[*1] La teoría propuesta por Von Mises y que recojo aquí ha sido controvertida por varios físicos, entre ellos por P. Jordan (véase *Anschauliche Quantentheorie,* 1936, página 282, en donde Jordan emplea el hecho de que se han demostrado recientemente algunas hipótesis ergódicas como argumento contra mi tesis). Pero expresada en la forma de que *las conclusiones probabilísticas necesitan premisas probabilísticas* —por ejemplo, premisas de la teoría de la medida, en las que entran ciertas asunciones equiprobabilísticas—, me parece que mi tesis queda más apoyada que invalidada por los ejemplos que aduce Jordan. Otro crítico de esta tesis ha sido Albert Einstein, quien la ha atacado en el último párrafo de una interesante carta que reproduzco en el apéndice *XII; creo que Einstein pensaba entonces en una interpretación subjetiva de la probabilidad y en un principio de indiferencia (que en la teoría subjetiva parece como si no fuese un supuesto de equiprobabilidad); mucho más tarde adoptó —al menos provisionalmente— una interpretación frecuencial (de la teoría cuántica).

aparece cierta regularidad que sugiere irresistiblemente un efecto estadístico. Descontando ciertos problemas de hidrodinámica aún no resueltos (referentes a la formación de torbellinos, etc.), podemos, en principio, predecir la ruta de un volumen cualquiera de agua —digamos, de un grupo de moléculas— con el grado de precisión que queramos, si se nos dan unas condiciones inciales suficientemente precisas. Podemos suponer, por tanto, que sería posible predecir de una molécula cualquiera situada muy por encima de la caída de agua, en qué punto pasará sobre el borde, dónde llegará al socaz, etc. De este modo sería posible, *en principio*, calcular la trayectoria de un número cualquiera de partículas; y —dadas que estén las condiciones iniciales suficientes— seríamos capaces, en principio, de deducir cada una de las fluctuaciones estadísticas individuales de la cascada. Pero sólo cabría obtenerse de este modo ésta o aquélla fluctuación *individual*, no las regularidades estadísticas recurrentes que hemos descrito, y menos la distribución estadística general como tal. Para explicar estas últimas necesitamos estimaciones estadísticas, por lo menos la suposición de que ciertas condiciones iniciales recurrirán una y otra vez para muchos grupos diferentes de partículas (lo cual viene a equivaler a un enunciado universal): llegamos a un resultado estadístico si y sólo si hacemos tales asunciones estadísticas específicas —por ejemplo, que conciernan la distribución frecuencial de las condiciones iniciales recurrentes.

71. Enunciados probabilitarios formalmente singulares

Llamo «formalmente singular» a un enunciado probabilitario cuando adscribe una probabilidad a un acontecimiento aislado, o a un elemento aislado de cierta clase de acontecimientos *[1]: por ejemplo, «la probabilidad de sacar cinco en la próxima tirada con este dado es 1/6», o «la probabilidad de sacar cinco en una tirada aislada cualquiera (con este dado) es 1/6». Por lo general, estos enunciados no se consideran enteramente correctos en su formulación, desde el punto de vista de la teoría frecuencial, ya que no es posible adscribir probabilidades a acontecimientos aislados, sino solamente a sucesiones infinitas de acontecimientos o de eventos. Sin embargo, es fácil interpretarlos como correctos, sin más que definir las probabilidades formalmente singulares valiéndonos del concepto de probabilidad objetiva o frecuencia relativa; empleo «$_{\alpha}P_k(\beta)$» para denotar la probabilidad formalmente singular de que cierto acontecimiento k tenga la propiedad β, por la capacidad que le proviene de ser un elemento de la sucesión α —en símbolos [1]: $k \varepsilon \alpha$— y defino ahora la probabilidad formalmente singular del modo siguiente:

$$_{\alpha}P_k(\beta) = {}_{\alpha}F(\beta) \qquad (k \varepsilon \alpha) \quad \text{(Definición)}$$

*[1] En el texto alemán se pretendía con el término «*formalistisch*» comunicar la idea de un enunciado singular en su forma (o «formalmente singular») aunque su sentido pueda estar definido, de hecho, por enunciados estadísticos.

[1] El signo «... ε ...», llamado cópula, significa «... es un elemento de la clase (o de la sucesión) ...».

Lo cual puede expresarse lingüísticamente como sigue: la probabilidad formalmente singular de que el evento k tenga la propiedad β —dado que k sea un elemento de la sucesión α— es, por definición, igual a la probabilidad de la propiedad β en la sucesión de referencia α.

Esta sencilla definición, casi obvia, resulta ser sorprendentemente útil; y puede, incluso, ayudarnos a aclarar algunos intrincados problemas de la teoría cuántica moderna (cf. los apartados 75 y 76).

Como hace ver la definición, un enunciado probabilitario formalmente singular sería incompleto si no enunciase explícitamente una clase de referencia. Pero aunque a menudo no se menciona explícitamente α, solemos saber en tales casos de qué α se trata: así, el primer ejemplo citado no especifica ninguna sucesión de referencia α, pero está perfectamente claro que se refiere a todas las sucesiones de tiradas con dados correctos.

En muchos casos pueden existir diversas sucesiones de referencia para un evento k, y entonces resultará tal vez palmario que pueden expresarse diversos enunciados probabilitarios formalmente singulares acerca del mismo evento. Así, la probabilidad de que muera una persona concreta en un plazo dado puede tomar valores muy diferentes según la consideremos como miembro de su grupo de edad, de su grupo profesional, etc. Y no es posible dar una regla general con arreglo a la cual fuera posible escoger una clase de referencia entre varias posibles (la clase de referencia más restringida es a menudo la más apropiada, dado que sea suficientemente numerosa para permitir que la estimación probabilitaria se base en una extrapolación estadística razonable y esté apoyada por una cantidad suficiente de datos corroboradores).

No pocas de las llamadas paradojas de la probabilidad desaparecen en cuanto caemos en la cuenta de que pueden adscribirse probabilidades diferentes a uno y el mismo acontecimiento o evento, en cuanto elemento de diversas clases de referencia. Por ejemplo, se dice a veces que la probabilidad ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ de un evento *antes de que suceda* es distinta a la del mismo después de haber ocurrido: antes puede ser igual a 1/6, mientras que después sólo podrá valer 1 ó 0. Desde luego, esta opinión es enteramente errónea: ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ vale siempre lo mismo, tanto antes como después del suceso. Lo único que ha cambiado es que, basándonos en la información $k \in \beta$ (o la $k \in \bar{\beta}$) —que se nos puede proporcionar tras de observar el suceso—, podemos elegir una nueva clase de referencia, a saber β (o $\bar{\beta}$), y preguntar cuál es el valor de ${}_{\beta}P_k(\beta)$: y esta probabilidad vale, naturalmente, 1, lo mismo que ${}_{\bar{\beta}}P_k(\beta) = 0$. Los enunciados que nos informan sobre el resultado real de acontecimientos aislados —los cuales no se refieren a frecuencias, sino que tienen la forma «$k \in \varphi$»— no pueden cambiar la probabilidad de éstos; pueden sugerirnos, sin embargo, que elijamos otra clase de referencia.

El concepto de enunciado probabilitario formalmente singular nos proporciona una especie de puente con la teoría *subjetiva*, y, por tanto, también con la teoría del ámbito, como podrá verse en el apartado siguiente. Pues podemos acordar que interpretaremos la probabilidad formalmente singular como el «grado de creencia racional» (siguiendo a Keynes), con tal de que permitamos que nuestras «creencias racionales» se guíen por un *enunciado frecuencial* objetivo; y este último constituirá la información de que dependen nuestras creencias. Dicho de otro modo: puede ocurrir que no sepamos nada acerca de un evento, excepto que pertenece a cierta clase de referencia en la que se ha contrastado con éxito cierta estimación de probabilidad; esta información no nos capacita para predecir cuál será la propiedad del evento en cuestión, pero sí para expresar todo lo que sabemos acerca de él por medio de un enunciado probabilitario formalmente singular que tiene el aspecto de *una predicción indefinida acerca del evento concreto del caso* *2.

Así pues, no planteo ninguna objeción a la interpretación subjetiva de los enunciados probabilitarios acerca de eventos aislados, es decir, a su interpretación como predicciones indefinidas: como si dijéramos, como confesiones de nuestro deficiente conocimiento acerca del evento concreto en cuestión (sobre el cual, es cierto, nada se sigue de un enunciado frecuencial). Esto quiere decir que no objeto nada mientras reconozcamos claramente que los *enunciados frecuenciales objetivos son fundamentales, ya que son los únicos empíricamente contrastables*. Rechazo, sin embargo, toda interpretación de los enunciados probabilitarios formalmente singulares —o predicciones indefinidas— que los convierta en enunciados acerca de una *situación objetiva* distinta de la situación estadística objetiva: me refiero a la opinión según la cual un enunciado sobre la probabilidad 1/6 al echar un dado no es una mera confesión de que no sabemos nada definido (teoría subjetiva), sino más bien una aserción acerca de la próxima tirada: una aserción de que su resultado está, a la vez, determinado e indeterminado, de que es algo todavía en suspenso *3. Considero equivocadas todas las tentativas de hacer una interpretación objetiva de este tipo (que Jeans ha debatido largamente, entre otros): cualesquiera que sean los aires indeterminísticos que puedan

---

*2 Opino actualmente que es posible abordar de un modo mucho más sencillo la cuestión de las relaciones entre las distintas interpretaciones de la teoría de la probabilidad: dando un sistema formal de axiomas o postulados y demostrando que se satisface por las diversas interpretaciones. Considero, por tanto, que la mayoría de las consideraciones que se hacen en el resto del capítulo (apartados 71 y 72) han quedado superadas: véanse el apéndice *IV, y —de mi *Postscript*— los capítulos *II *III y *V. Pero sigo estando conforme con la mayor parte de lo escrito, con tal de que las «*clases de referencia*» estén determinadas por las condiciones que definen un experimento, de suerte que puedan considerarse las «frecuencias» como resultado de propensiones.

*3 Ahora no planteo objeciones a la opinión de que un evento pueda estar en suspenso, e incluso creo que el mejor modo de interpretar la teoría de la probabilidad es como *una teoría de las propensiones de los eventos* a resultar de un modo u otro (véase mi *Postscript)*. Pero continúo objetando a la tesis de que la teoría de la probabilidad *deba* interpretarse de este modo: es decir, considero la interpretación de propensiones como una conjetura acerca de la estructura del mundo.

adoptar estas interpretaciones, todas implican la idea metafísica de que no solamente podemos deducir y contrastar predicciones, sino que —además— la Naturaleza está más o menos «determinada» (o «indeterminada»): de modo que el éxito (o el fracaso) de las predicciones no habría de explicarse por las leyes de que aquéllas se deducen, sino —sobre ello y por encima de ello— por el hecho de que la Naturaleza estaría realmente constituida (o no constituida) conforme a tales leyes *4.

72. La teoría del ámbito

He dicho en el apartado 34 que un enunciado falsable en mayor grado que otro puede describirse como lógicamente más *improbable* que éste, y que el enunciado menos falsable sería el más *probable* lógicamente (por otra parte, aquél entraña[1] a este último). Entre el concepto de *probabilidad lógica* y el de *probabilidad numérica* objetiva o formalmente singular existen ciertas afinidades. Algunos filósofos de la probabilidad (Bolzano, Von Kries, Waismann) han intentado basar el cálculo de probabilidades sobre el concepto de ámbito lógico, y, por ello, sobre un concepto que coincide (cf. el apartado 37) con el de probabilidad lógica; y, al mismo tiempo, han intentado sacar a luz las afinidades entre la probabilidad lógica y la numérica.

Waismann[2] ha propuesto medir el grado de relación mutua entre los ámbitos lógicos de diversos enunciados (algo así como sus razones) por medio de las frecuencias relativas correspondientes; y, por tanto, considerar que las frecuencias determinan un *sistema de medida de ámbitos.* Creo factible erigir una teoría de la probabilidad sobre estos cimientos; y podemos decir, en realidad, que este plan viene a ser como coordinar las frecuencias relativas con ciertas «predicciones indefinidas» —tal como hemos hecho en el apartado anterior al definir los enunciados probabilitarios formalmente singulares.

Debe decirse, sin embargo, que este método de definir la probabilidad es practicable sólo si se ha construido previamente una teoría frecuencial: pues de otro modo habría que preguntar cómo se definen a su vez las frecuencias empleadas para definir el sistema de medida. Mas si tenemos ya a nuestra disposición una teoría frecuencial, la introducción de la teoría del ámbito resulta verdaderamente superflua. No obstante esta objeción, considero significativa la practicabilidad de la propuesta de Waismann: es satisfactorio encontrar que una teoría más comprehensiva puede salvar el vacío —que al principio parecía insalvable— entre los diferentes intentos de abordar el

*4 Esta caracterización algo despectiva cuadra perfectamente a mis propias opiniones, que propongo para su discusión en el «Epílogo metafísico» de mi *Postscript*, denominándolas «la interpretación de propensiones de la probabilidad».

1 Ordinariamente (cf. el apartado 35).

2 Waismann, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes* (*Erkenntnis* I, 1930, págs. 128 y sig.).

problema, especialmente entre las interpretaciones subjetiva y objetiva. Con todo, la teoría de Waismann pide ciertas ligeras modificaciones. Su concepto de razón de ámbitos (cf. la nota 2 del apartado 48) no sólo presupone haber unos ámbitos que pueden compararse por medio de sus relaciones de subclasificación (o de sus relaciones de entrañamiento), sino, además —y de un modo más general—, que pueden llegar a compararse incluso ámbitos que se solapan sólo parcialmente (es decir, ámbitos de enunciados no comparables); este último supuesto, sin embargo, que entraña considerables dificultades, es superfluo. Puede mostrarse que, en los casos que interesan (tales como los de aleatoriedad), la comparación de las subclases y de las frecuencias han de llevar a resultados análogos, lo cual justifica el procedimiento de coordinar frecuencias y ámbitos con objeto de medir estos últimos: al hacer esto convertimos en comparables los enunciados en cuestión (que no lo eran por el método de las subclases). Indicaré ahora sumariamente cómo podría justificarse este procedimiento.

Si entre dos clases de propiedades, γ y β, es válida la relación de subclasificación,

$$\gamma \subset \beta$$

entonces tenemos:

$$(k)[Fsb(k \,\varepsilon\, \gamma) \geqslant Fsb(k \,\varepsilon\, \beta] \qquad \text{(cf. el apartado 33)}$$

de suerte que la probabilidad lógica o ámbito del enunciado ($k \,\epsilon\, \gamma$) ha de ser menor o igual a la de ($k \,\epsilon\, \beta$). Será igual únicamente si existe una clase de referencia α (que puede ser la clase universal) con respecto a la cual se cumpla la siguiente ley (que, puede decirse, tiene la forma de una «ley natural»):

$$(x) \ \{ [x \,\varepsilon\, (\alpha.\beta)] \rightarrow (x \,\varepsilon\, \gamma) \} \, .$$

Si no se cumple esta «ley natural» —con lo cual podemos asumir que hay aleatoriedad desde este punto de vista— se toma la desigualdad; pero, en este caso, si α es numerable y puede aceptarse como sucesión de referencia, tenemos:

$${}_{\alpha}F(\gamma) < {}_{\alpha}F(\beta).$$

Esto significa que una comparación entre ámbitos ha de llevar —en el caso de aleatoriedad— a la misma desigualdad que una comparación entre frecuencias relativas. Por tanto, si existe aleatoriedad podemos coordinar las frecuencias relativas con los ámbitos con objeto de hacer medibles estos últimos. Pero esto es precisamente lo que hemos hecho en el apartado 71 —si bien indirectamente— al definir los enunciados probabilitarios formalmente singulares; y, en realidad, de los supuestos que admitimos podríamos haber inferido inmediatamente que

$${}_{\alpha}P_k(\gamma) < {}_{\alpha}P_k(\beta).$$

Así, pues, hemos vuelto al punto de partida, al problema de la interpretación de la probabilidad. Y ahora nos encontramos con que cabe eliminar completamente el conflicto entre las teorías objetiva y subjetiva, que a primera vista parecía tan empedernido, mediante la definición —en cierta manera, trivial— de probabilidad formalmente singular.

Algunas observaciones sobre la teoría cuántica

El análisis del problema de la probabilidad que hemos realizado ha puesto a nuestra disposición unos instrumentos que podemos ahora someter a contraste, aplicándolos a uno de los problemas más frecuentados de la ciencia moderna: valiéndome de ellos intentaré analizar y aclarar algunos de los puntos más obscuros de la moderna teoría cuántica.

Es seguro que mi tentativa, algo audaz, de abordar uno de los problemas centrales de la física por medios filosóficos o lógicos ha de despertar la desconfianza del físico. Admito que su escepticismo es saludable y que su desconfianza tiene fundamento; y con todo, tengo cierta esperanza de llegar a vencer uno y otra. Pero, mientras tanto, merece la pena de recordar que en cualquier rama de la ciencia pueden muy bien brotar multitud de cuestiones principalmente de carácter lógico. Es un hecho innegable que en las discusiones epistemológicas vienen participando ardientemente físicos cuánticos, lo cual hace sospechar que ellos mismos tienen la sensación de que es menester buscar en la tierra de nadie que se encuentra entre la lógica y la física la solución de muchos de los problemas de la teoría cuántica aún por resolver.

Empezaré sentando anticipadamente las principales conclusiones que surgirán en el análisis que voy a realizar.

1) En la teoría cuántica existen ciertas fórmulas matemáticas que Heisenberg ha interpretado a base de su principio de incertidumbre: esto es, como enunciados sobre los márgenes de incertidumbre debidos a los límites de precisión que podemos alcanzar en nuestras mediciones. Intentaré mostrar que dichas fórmulas han de interpretarse como enunciados probabilitarios formalmente singulares (cf. el apartado 71), es decir, que debe dárseles una interpretación estadística: e interpretadas de esta suerte, tales fórmulas afirman que *existen ciertas relaciones entre ciertos márgenes de «dispersión» o «variancia» o «diseminación»* (a las que llamaremos «relaciones estadísticas de dispersión»).

2) Trataré de hacer patente que ni el sistema de fórmulas de la teoría cuántica ni su interpretación estadística son incompatibles con medidas de mayor grado de precisión que el permitido por el principio de incertidumbre. Así pues, dicha teoría no quedaría refutada necesariamente si algún día fuesen posibles mediciones con el grado de precisión indicado.

3) Por tanto, la existencia de un límite para la precisión que se puede alcanzar, que Heisenberg ha afirmado, no será una consecuencia lógica que quepa deducir de las fórmulas de la teoría: se trataría más bien de un supuesto separado o suplementario.

4) Aún más: este supuesto adicional de Heisenberg, en realidad *contradice* —como trataré de poner de manifiesto— a las fórmulas de la teoría cuántica si se las interpreta estadísticamente: pues no sólo son compatibles con ella mediciones más precisas, sino que cabe describir experimentos imaginarios que muestren la posibilidad de las mismas. En mi opinión, esta contradicción es la que origina todas aquellas dificultades por que se encuentra cercada la admirable estructura de la física cuántica moderna, hasta tal punto que Thirring ha podido decir que la teoría cuántica «continúa siendo un misterio impenetrable para sus propios creadores, según ellos mismos admiten» [1].

Quizá podrían caracterizarse las páginas que siguen como una investigación acerca de los fundamentos de la teoría cuántica [2]. En su desarrollo evitaré todos los razonamientos matemáticos y —con una sola excepción— todas las fórmulas matemáticas; será posible hacer tal cosa porque no voy a poner en cuestión si es correcto el sistema de las fórmulas matemáticas de dicha teoría, sino que me ocuparé exclusivamente de las consecuencias lógicas de su interpretación física debida a Born.

En cuanto a la controversia sobre la «causalidad», propongo que disintamos de la metafísica indeterminista que es tan popular actualmente. Lo que la distingue de la metafísica determinista que estaba en boga hasta hace poco entre los físicos no es tanto su mayor lucidez cuanto su mayor esterilidad.

En beneficio de la claridad, mis críticas son a menudo severas. Puede ser justo, por tanto, decir también que considero que la hazaña de los creadores de la teoría cuántica moderna es una de las mayores de toda la historia de la ciencia *[1].

---

[1] H. Thirring, *Die Wandlung des Begriffssystems der Physik* (ensayo de *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, Fünf Wiener Vorträge*, por Mark, Thirring, Hahn, Nobeling y Menger; Verlag Deuticke, Viena y Leipzig, 1933, página 30).

[2] En todo lo que sigue me limitaré a discutir la interpretación de la física cuántica, pero omitiré los problemas concernientes a los campos ondulatorios (teoría de Dirac de la emisión y la absorción, «segunda cuantización» de las ecuaciones de campo de Maxwell-Dirac). Menciono esta restricción porque se encuentran allí problemas —tales como la interpretación de la equivalencia entre un campo ondulatorio cuantizado y un gas corpuscular— a los que sólo podrían aplicarse mis argumentos (en el caso de que pudiera hacerse en absoluto) si se los adaptara a ellos con sumo cuidado.

*[1] No he cambiado de opinión en este asunto, ni acerca de los puntos principales de mi crítica. Pero mi interpretación de la teoría cuántica ha variado juntamente con la de la teoría de la probabilidad. En mi *Postscript* se encontrarán mis concepciones actuales, y allí argumento en favor del *indeterminismo* —si bien de un modo independiente de la teoría cuántica—. Con todo, y con la sola excepción del apartado 77 (que está basado en un error), sigo considerando de importancia el presente capítulo; especialmente, el apartado 76.

73. El programa de Heisenberg y las relaciones de incertidumbre

Heisenberg empezó, en su intento por asentar la teoría atómica sobre una nueva base, con un programa epistemológico [1]: el de librar a la teoría de «inobservables», esto es, de magnitudes inaccesibles a la observación experimental; podríamos decir, el de librarla de elementos metafísicos. En la teoría de Bohr, que había precedido a la propia de Heisenberg, aparecían tales magnitudes inobservables: no hay nada observable por medio de experimentos que corresponda a las órbitas de los electrones, ni siquiera a la frecuencia de sus revoluciones (ya que las frecuencias emitidas que pueden observarse en forma de líneas espectrales no podían identificarse con las frecuencias de las revoluciones electrónicas). Heisenberg esperaba que al eliminar tales magnitudes inobservables lograría curar a la teoría de Bohr de sus limitaciones.

Hay cierto parecido entre esta situación y aquella con la que se encontró Einstein cuando trató de reinterpretar la hipótesis de la contracción, de Lorentz-Fitzgerald. Esta hipótesis trataba de explicar el resultado negativo de los experimentos de Michelson y Morley haciendo uso de magnitudes inobservables, como eran los movimientos relativos al éter inmóvil de Lorentz: o sea, de magnitudes inaccesibles a la contrastación experimental. Tanto en este caso como en el de las concepciones de Bohr, las teorías que necesitaban ser reformadas explicaban ciertos procesos naturales observables; y ambas echaban mano del insatisfactorio supuesto de que existan eventos físicos y magnitudes definidas físicamente que la Naturaleza consigue esconder de nosotros haciéndolos inaccesibles para siempre al contraste de las observaciones.

Einstein hizo ver cómo podían eliminarse los eventos inobservables inherentes a la teoría de Lorentz. Tal vez podría uno sentirse inclinado a decir lo mismo de la teoría de Heisenberg, o al menos de su contenido matemático; sin embargo, parece que aún caben muchos perfeccionamientos. Incluso desde el punto de vista de la propia interpretación que hace Heisenberg de su teoría, no parece que su programa se haya llevado a cabo del todo: la Naturaleza logra todavía escondernos hábilmente diversas magnitudes incluidas en aquélla.

Esta situación está ligada al llamado *principio de incertidumbre*, enunciado por Heisenberg, que quizá pueda explicarse del modo siguiente. Toda medición física requiere un cambio de energía entre el objeto medido y el aparato de medida (que puede ser el mismo observador): puede dirigirse sobre el objeto un rayo de luz, por ejemplo, y absorberse parte de la luz dispersada por aquél en el instru-

---

[1] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik* 33, 1925, pág. 879: en lo sucesivo me refiero principalmente a la obra de Heisenberg *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (1930), trad. ingl. por C. Eckart y F. C. Hoyt, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago, 1930.

mento de medición. Pero tal cambio de energía alterará el estado del objeto, que se encontrará, después de haber sido medido, en un estado diferente al que tenía antes; así pues, la medición hace algo así como darnos a conocer un estado que acaba de ser destruido por el proceso mismo de medición. En el caso de objetos macroscópicos puede despreciarse esta interferencia entre el proceso de medir y el objeto medido, pero no en el de objetos atómicos, ya que éstos pueden quedar profundamente afectados —por ejemplo— al sufrir una irradiación luminosa. Por tanto, a partir del resultado de una medición es imposible inferir el estado preciso de un objeto atómico inmediatamente *después* de haber sido medido; y, *en consecuencia, la medida no puede servir de base para hacer predicciones.* Se admite que siempre es posible averiguar, por medio de una nueva medición, el estado del objeto tras la medición anterior, pero al hacer tal cosa se interfiere de nuevo con el sistema de un modo no calculable. También se admite que es siempre posible preparar nuestras mediciones de modo que no se perturben algunas de las características del estado que se va a medir (por ejemplo, el momento de la partícula); pero sólo cabe lograr esto a costa de interferir de modo aún más violento con otras magnitudes características de tal estado (en este caso, con la posición de la partícula): y si dos magnitudes tienen esta correlación mutua, se cumple para ellas el teorema de que no pueden ser medidas con precisión simultáneamente, aun cuando cada una de ellas sí puede serlo separadamente. De ahí que si aumentamos la precisión de una de la medidas —digamos, del momento p_x, *al* reducir el margen o intervalo de error $\triangle p_x$— nos vemos obligados a disminuir la precisión en la medida de la coordenada de posición x, esto es, a dilatar el intervalo $\triangle x$. De forma que la máxima precisión que se puede conseguir está limitada, según Heisenberg, por la relación de incertidumbre[2]

$$\Delta x . \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

En lo que se refiere a otras coordenadas se tienen relaciones análogas. La fórmula que hemos escrito nos dice que el producto de los dos márgenes de error tiene, al menos, el orden de magnitud de h —siendo h el cuanto de acción de Planck—. Se sigue de ella que una medición completamente precisa de una de las dos magnitudes tendría como precio una indeterminación total de la otra.

Según las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, toda medición de la posición interfiere con la de la componente correspondiente del momento. Así pues, en principio es imposible predecir *la trayectoria de una partícula:* «en la nueva mecánica, el concepto de 'trayectoria' no tiene ningún significado definido...»[3].

Pero aquí surge la primera dificultad. Las relaciones de incerti-

---

[2] Para la deducción de esta fórmula, cf. la nota 2 del apartado 75.
[3] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* (1931), pág. 55

dumbre se aplican sólo a las magnitudes (características de estados físicos) que pertenecen a la partícula después de que se han realizado las mediciones. En principio, es posible averiguar con una precisión ilimitada la posición y el momento de un electrón *hasta el instante de la medición:* lo cual se sigue del hecho mismo de que es posible llevar a cabo varias operaciones de medida sucesivas. Por tanto, combinando los resultados de: *a)* dos mediciones de posición, *b)* una medición de posición precedida de una de momento o *c)* una medición de posición seguida por una de momento, sería posible calcular, con los datos obtenidos, las coordenadas exactas de posición y de momento durante todo el período de tiempo comprendido *entre* las dos mediciones (empezaremos limitando nuestras consideraciones exclusivamente a este intervalo [4]). Pero —según Heisenberg— estos cálculos precisos no pueden utilizarse para hacer predicciones, y, por tanto, es imposible contrastarlos: lo cual ocurriría porque dichos cálculos son válidos para la trayectoria entre los dos experimentos solamente si el segundo es sucesor inmediato del primero —en el sentido de que no ha ocurrido ninguna otra interferencia en el lapso de tiempo entre uno y otro—. Toda contrastación que pudiera disponerse con el propósito de comprobar la trayectoria entre ambos experimentos habrá de perturbarla de suerte que nuestros cálculos acerca de la trayectoria exacta pierdan su validez. Heisenberg dice acerca de dichos cálculos exactos: «... el que atribuyamos realidad física a la historia anterior del electrón, que hemos calculado, es una pura cuestión de gusto» [5]: con lo cual quiere decir, sin duda, que semejantes cálculos de trayectorias que no son contrastables, carecen de significación desde el punto de vista del físico. Schlick comenta este pasaje de Heisenberg del modo siguiente: «Yo me hubiera expresado aún más enérgicamente, de completo acuerdo con las tesis fundamentales de Bohr y de Heisenberg mismos, que creo incontestables. Si un enunciado referente a la posición de un electrón en el campo de las dimensiones atómicas no es verificable, entonces no podemos atribuirle ningún sentido: resulta imposible hablar de la 'trayectoria' de una partícula entre dos puntos en que ha sido observado» [6]. (En March [7], Weyl [8] y otros pueden encontrarse análogos comentarios.)

Mas, como acabamos de oir, *es posible calcular* semejante trayec-

---

[4] Haré ver detalladamente en el apartado 77 y en el apéndice VI que, en ciertas circunstancias, el caso *b)* nos permite calcular también el pasado del electrón *antes* de realizarse la primera medición (y la cita siguiente de Heisenberg parece aludir a este hecho). * Ahora considero que esta nota es errónea, lo mismo que el apartado 77.

[5] HEISENBERG, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (1930), pág. 15. (La versión inglesa —pág. 20— lo expresa perfectamente: «Es una cuestión de creencia personal».)

[6] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwartigen Physik, Die Naturwissenschaften* **19**, 1931, pág. 159.

[7] MARCH, *op. cit., passim* (por ejemplo, en las págs. 1 y sig. y 57).

[8] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2.ª ed., 1931), pág. 68 (cf. la última cita del apartado 75, más abajo: «... el sentido de estos conceptos...»). * Al parecer, el párrafo a que nos referimos aquí se ha omitido en la traducción inglesa, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics,* 1931.

toria «sin sentido» o metafísica por medio del nuevo formalismo. Lo cual hace patente que Heisenberg no ha conseguido llevar a cabo por completo su programa, ya que esta situación tolera solamente dos interpretaciones. La primera sería que la partícula tiene una posición y un momento exactos (y, por consiguiente, una trayectoria exacta), pero que es imposible para nosotros medir ambos simultáneamente; en tal caso, la Naturaleza seguiría estando dispuesta a esconder a nuestra mirada ciertas magnitudes físicas: no la posición, ni el momento de la partícula, sino la combinación de estas dos magnitudes, la «*positio cum momento*» o la «trayectoria». Esta interpretación considera que el principio de incertidumbre es una limitación de nuestro conocimiento, y, por tanto, es *subjetiva*. La otra interpretación posible, que es *objetiva*, afirma que es inadmisible —o incorrecto, o metafísico— atribuir a la partícula nada que sea una «positio cum momento» o una «trayectoria» netamente definidas: simplemente, no *tiene* «trayectoria», sino sólo una posición exacta combinada con un momento inexacto, o un momento exacto combinado con una posición inexacta. Pero si aceptamos esta interpretación, entonces el formalismo de la teoría vuelve a contener elementos metafísicos, ya que —según hemos visto— cabe calcular exactamente una «trayectoria» o una «positio cum momento» de la partícula para aquellos períodos de tiempo en los que es imposible, en principio, contrastarlas por medio de la observación.

Es revelador ver cómo los campeones de la relación de incertidumbre vacilan entre el tratamiento subjetivo y el objetivo. Schlick, por ejemplo, inmediatamente después de haber sustentado la tesis objetiva —como hemos leído— dice: «Es imposible afirmar con sentido de los eventos naturales cosas tales como 'esfumamiento' o 'inexactitud'. Todas las cosas de esta índole pueden aplicarse solamente a nuestros propios pensamientos (especialmente, si no sabemos cuáles enunciados... son verdaderos)»: observación que es obvio está dirigida precisamente *contra* la interpretación que supone que no es nuestro conocimiento, sino el momento de la partícula lo que se vuelve algo así como «difuso» o «borroso» a consecuencia de haberse medido de forma precisa su posición *[1]. Y otros autores muestran vacilaciones parecidas. Pero, ya se decida uno en favor de la tesis objetiva o de la subjetiva, subsiste el hecho de que el programa de Heisenberg no se ha llevado a cabo y de que no ha tenido éxito en la tarea que se había impuesto de expulsar todos los elementos metafísicos de la teoría atómica. Por tanto, no se gana nada en absoluto cuando se intenta, con Heisenberg, fundir las dos interpretaciones opuestas con observaciones tales como la de que «... realmente ha dejado de ser posible una física 'objetiva' en este sentido, esto es, en el de una

*[1] La expresión «borroso» [en ingl., *smeared*] se debe a Schrödinger. Según creo, el problema de la existencia o de la inexistencia objetiva de una «trayectoria» —si es «borrosa» o si simplemente no la conocemos del todo— es fundamental; y el experimento de Einstein, Podolski y Rosen —que se estudia en los apéndices *XI y *XII— ha hecho resaltar su importancia.

división neta del mundo en sujeto y objeto»[9]. Hasta ahora, Heisenberg no ha realizado la tarea que se había propuesto: no ha purgado aún la teoría cuántica de sus elementos metafísicos.

74. Breve bosquejo de la interpretación estadística de la teoría cuántica

Al deducir las relaciones de incertidumbre, Heisenberg sigue a Bohr en cuanto que hace uso de la idea de que los procesos atómicos pueden ser representados igualmente por la «imagen teórico-cuántica de partícula» que por la «imagen teórico-cuántica de onda».

Esta idea está en conexión con el hecho de que la teoría cuántica moderna ha avanzado por dos rutas diferentes. Heisenberg partió de la clásica teoría del electrón como corpúsculo, que reinterpretó de acuerdo con la teoría cuántica; mientras que Schrödinger tomó como origen la teoría ondulatoria de De Broglie (igualmente «clásica»): coordinó a cada electrón un «paquete de ondas», esto es, un grupo de oscilaciones que se refuerzan por interferencia en el interior de una pequeña región y se anulan mutuamente fuera de ella. Schrödinger ha hecho ver más tarde que su mecánica ondulatoria conduce a resultados matemáticamente equivalentes a los de la mecánica corpuscular de Heisenberg.

La interpretación estadística dada por Born de ambas teorías resolvió la paradoja de que fuesen equivalentes dos imágenes tan radicalmente diferentes como las de partícula y onda: puso de manifiesto que también la teoría ondulatoria puede tomarse como teoría corpuscular, ya que cabe interpretar la ecuación de onda de Schrödinger de modo que nos dé la *probabilidad de encontrar* el corpúsculo en una región cualquiera dada del espacio (la probabilidad está determinada por el cuadrado de la amplitud de onda: es grande en el interior del paquete de ondas, en que éstas se refuerzan mutuamente, y tiende a cero fuera de él).

Varias facetas de la situación del problema sugerían que la teoría cuántica debía interpretarse estadísticamente. Su tarea más importante —la deducción de los espectros atómicos— tenía que considerarse *estadística* desde que apareció la hipótesis einsteiniana de los *fotones* (o cuantos de luz), ya que ésta interpretaba los efectos luminosos observados como fenómenos masivos, debidos a la incidencia de muchos fotones. «Los métodos experimentales de la física atómica..., guiados por la experiencia, llegan a ocuparse exclusivamente de cuestiones estadísticas. La mecánica cuántica, que nos proporciona la teoría sistemática de las regularidades observadas, corresponde, en todos los respectos, al estado actual de la física experimental: pues se limita, desde el comienzo, a preguntas estadísticas y a respuestas estadísticas»[1].

---

[9] Heisenberg, *Physikalische Prinzipien*, pág. 49.

[1] Born-Jordan, *Elementare Quantenmechanik* (1930), págs. 322 y sig.

La teoría cuántica llega a resultados que divergen de los de la mecánica clásica solamente al aplicarse a los problemas de la física atómica: en lo que se refiere a las aplicaciones a los procesos macroscópicos, sus fórmulas conducen, dentro de una estrecha aproximación, a las de aquella disciplina. «Según la teoría cuántica, las leyes de la mecánica clásica son válidas si se las considera como enunciados acerca de las relaciones entre medias estadísticas», dice March[2]: dicho de otro modo, cabe deducir las fórmulas clásicas como macroleyes.

En algunas exposiciones se pretende *explicar* la interpretación estadística de la teoría cuántica por el hecho de que la precisión que se puede alcanzar en la medida de las magnitudes físicas está limitada por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg. Se argumenta diciendo que, *debido a esta incertidumbre* de las medidas correspondientes a los experimentos atómicos, «... en general, el resultado no estará determinado: esto es, si el experimento se repite varias veces bajo idénticas condiciones se obtendrán varios resultados diferentes. Si se repite un gran número de veces se encontrará que cada resultado concreto se obtiene una fracción determinada del número total de veces, de suerte que puede decirse que hay una probabilidad determinada de que aparezca tal resultado cada vez que se realiza el experimento» (Dirac)[3]. March escribe también refiriéndose a la relación de incertidumbre: «Entre el presente y el futuro existen ... solamente relaciones probabilitarias; por lo cual, resulta claro que el carácter de la nueva mecánica ha de ser el de una teoría estadística»[4].

No creo que este análisis de las relaciones entre las fórmulas de incertidumbre y la interpretación estadística de la teoría cuántica sea aceptable. Me parece que la relación lógica existente es justamente la contraria: pues podemos deducir las fórmulas de incertidumbre de la ecuación de ondas de Schrödinger (que ha de interpretarse estadísticamente), pero no esta última de aquéllas.

Para tener en cuenta como es debido estas relaciones de deductibilidad, será menester que sometamos a una revisión la interpretación de las fórmulas de incertidumbre.

75. Una reinterpretación estadística de las fórmulas de incertidumbre

A partir de Heisenberg se acepta como un hecho firmemente establecido que cualesquiera mediciones que se hicieran simultánea-

---

[2] March, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* (1931), pág. 170.

[3] Dirac, *Quantum Mechanics* (1930), pág. 10 *(de la 1.ª ed.). En la pág. 14 de la 3.ª ed. aparece un pasaje paralelo algo más acentuado: «... el resultado, en general, no estará determinado: esto es, si el experimento se repite varias veces bajo idénticas condiciones, se obtendrán varios resultados diferentes. Es una ley de la Naturaleza, sin embargo, que si se repite un gran número de veces, cada resultado concreto se obtiene una fracción determinada del número total de veces, de suerte que hay una *probabilidad* determinada de que aparezca tal resultado».

[4] March, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, pág. 3.

mente de la posición y el momento, con precisión superior a la permitida por las relaciones de incertidumbre de aquel autor, contradirían a la teoría cuántica: pues se cree que es posible deducir lógicamente de ésta —o de la mecánica ondulatoria— la «prohibición» de mediciones exactas. Según esta opinión, debería considerarse falsada la teoría si se llevaran a cabo, realmente, experimentos que condujesen a medidas de una «exactitud prohibida» [1].

Creo que esta opinión es falsa. Desde luego, es cierto que las fórmulas de Heisenberg ($\triangle x \triangle p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}$, etc.) se obtienen como conclusiones lógicas de aquella teoría [2], pero la *interpretación* de estas fórmulas como reglas que limitan la precisión alcanzable en las medidas, en el sentido de Heisenberg, no se sigue de la teoría; por tanto, cualesquiera mediciones más exactas que las permitidas según Heisenberg no pueden contradecir lógicamente a la teoría cuántica, ni a la mecánica ondulatoria. En vista de lo cual, trazaré una distinción neta entre las *fórmulas* —que llamaré, por razones de brevedad, las «fórmulas de Heisenberg»— y su *interpretación* (también debida a Heisenberg) como relaciones de incertidumbre: esto es, como enunciados que imponen *limitaciones a la precisión de medida alcanzable.*

Cuando se procede a deducir matemáticamente las fórmulas de Heisenberg, se tiene que emplear la ecuación de onda u otra asunción equivalente: esto es, una asunción que pueda *interpretarse estadísticamente* (como hemos visto en el apartado anterior). Ahora bien; al adoptar semejante interpretación, la descripción de una partícula aislada como un paquete de ondas no es, sin duda alguna, sino *un enunciado probabilitario formalmente singular* (cf. el apartado 71): como vimos más arriba, la amplitud de onda determina la probabilidad de detectar la partícula en un lugar determinado, y justamente a este tipo de enunciado probabilitario —al tipo que se refiere a un corpúsculo (o evento) aislado— es al que he llamado «formalmente singular». Si se acepta la interpretación estadística de la teoría cuántica, entonces se ve uno obligado a interpretar a su vez como enunciados probabilitarios (y de nuevo como formalmente singulares si se aplican a una partícula aislada) aquellos enunciados que —como las fórmulas

---

[1] Me abstengo de criticar aquí la opinión muy difundida y bastante ingenua de que los argumentos de Heisenberg nos proporcionan pruebas concluyentes de la imposibilidad de toda medición de esta índole; cf., por ejemplo, JEANS, *The New Background of Science*, 1933, pág. 233; 2.ª ed., 1934, pág. 237 [vers. cast. por G. SANS HUELIN, *Nuevos fundamentos de la ciencia*, 1936, Madrid, Espasa-Calpe, pág. 185 *(T.)*]: «La ciencia no ha encontrado modo de escapar a este dilema; por el contrario, ha demostrado que no hay manera de salir de él». Naturalmente, es claro que nunca podrá presentarse tal demostración, y que, en el mejor de los casos, el principio de incertidumbre sería deductible de las hipótesis de las mecánicas cuántica y ondulatoria, y podría ser refutado empíricamente junto con ellas. En una cuestión como ésta, ciertas aserciones plausibles —como las que hace Jeans— pueden fácilmente extraviarnos.

[2] WEYL da una deducción lógica rigurosa: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2.ª ed., 1931, págs. 68 y 345; ed. ingl., págs. 77 y 393 y sig.

de Heisenberg— pueden deducirse de enunciados probabilitarios formalmente singulares de la teoría; por tanto, también aquéllos han de interpretarse, en última instancia, como *aserciones estadísticas.*

Frente a la interpretación subjetiva de, «cuanto mayor sea la precisión con que medimos la posición de un corpúsculo menos sabremos acerca de su momento», propongo que se acepte una interpretación objetiva y estadística de las relaciones de incertidumbre, que habría de ser la fundamental, y que podría expresarse del modo siguiente. Dado un agregado de partículas y una selección —en el sentido de una separación física— de aquéllas que en un cierto instante y con cierto grado de precisión dado tengan una posición x, encontraremos que sus momentos p_x muestran una dispersión aleatoria; y que la dispersión $\triangle p_x$ será tanto mayor cuanto menor hayamos hecho $\triangle x$, es decir, la dispersión o imprecisión tolerada para la posición. Y viceversa: si seleccionamos —o separamos— las partículas cuyos momentos p_x se encuentren dentro de un margen prescrito $\triangle p_x$, encontraremos que sus posiciones se dispersan en forma aleatoria dentro de un margen $\triangle x$, que será tanto mayor cuanto menor hayamos hecho $\triangle p_x$, esto es, el margen de dispersión o de imprecisión tolerada para los momentos. Y, finalmente: si tratamos de seleccionar las partículas que poseen las dos propiedades $\triangle x$ y $\triangle p_x$, sólo podremos realizar físicamente tal selección —o sea, separar físicamente las partículas— si los dos márgenes se hacen suficientemente grandes como para satisfacer la inecuación $\triangle x \,.\, \triangle p_x \geqslant \frac{4\pi}{h}$. Según esta interpretación objetiva de las fórmulas de Heisenberg, éstas afirmarían que se cumplen ciertas relaciones entre ciertos márgenes de dispersión; y me referiré a aquéllas, interpretadas de este modo, con el nombre de «*relaciones estadísticas de dispersión*» *1.

Hasta ahora, en mi interpretación estadística no he mencionado *medición* alguna: únicamente he aludido a *selección física* [3]. Es necesario que aclaremos ahora las relaciones existentes entre ambos conceptos.

Hablo de selección o de separación físicas cuando, por ejemplo, de un chorro de corpúsculos eliminamos con una pantalla todos excepto los que pasan a través de una estrecha abertura $\triangle x$, es decir, a través de un margen $\triangle x$ tolerado para su posición; y diré que las partículas pertenecientes al rayo que hemos aislado de este modo han sido se-

*1 Sigo manteniendo la interpretación objetiva que aquí explico, si bien con una modificación importante. Donde hablo en este párrafo de «un agregado de partículas», diría ahora «un agregado —o una sucesión— de repeticiones de un experimento llevado a cabo con *una* partícula (o con *un* sistema de partículas)»; y análogamente en los párrafos siguientes: por ejemplo, habría que reinterpretar el «rayo» corpuscular en el sentido de que consistiera en experimentos reiterados con (uno o unos pocos) corpúsculos (seleccionados eliminando con una pantalla —o cerrando el paso— a los demás).

3 También Weyl, entre otros, habla de «selecciones»: véase *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, págs. 67 y sigs.; vers. ingl., págs. 76 y sigs.; pero no contrapone medición a selección, como yo hago.

leccionadas físicamente —o técnicamente— de acuerdo con su propiedad $\triangle x$. A este solo proceso —o a su resultado, esto es, el rayo corpuscular aislado física o técnicamente— es a lo que designaré con «selección física»: contraponiéndolo a una selección puramente «mental» o «imaginada», como la que hacemos al hablar de la clase de todos los corpúsculos que han pasado o han de pasar a través del margen $\triangle x$, es decir, de una clase dentro de una clase más amplia de corpúsculos de la cual no ha sido extraída físicamente.

Ahora bien; toda selección física puede considerarse, desde luego, como una *medición*, y cabe emplearla realmente como tal [4]. Si un rayo de partículas, digamos, se selecciona interceptando con una pantalla o cerrando el paso a todas las que no se deslizan a través de cierto margen de posiciones («selección de lugar»), y si después se mide el momento de una de ellas, podemos considerar la selección de lugar como una medida, ya que gracias a ella sabemos que la partícula ha pasado por cierta posición (aunque a veces no sabemos *cuándo* sucedió tal cosa, o podemos saberlo únicamente mediante otra medición). Por otro lado, no hemos de considerar toda medición como una selección física. Imaginemos, por ejemplo, un rayo monocromático de electrones moviéndose en la dirección x; empleando un contador de Geiger podemos registrar los electrones que llegan a una posición determinada; y por medio de los intervalos temporales entre los impactos sobre el contador podemos medir, asimismo, intervalos espaciales, es decir, medimos sus posiciones en la dirección x hasta el momento del impacto; pero al realizar estas mediciones no llevamos a cabo una selección física de las partículas de acuerdo con sus posiciones en la dirección x (y, en realidad, tales mediciones nos darán, en general, una distribución completamente aleatoria de las posiciones en la dirección x).

Así pues, nuestras relaciones estadísticas de dispersión se reducen en su aplicación física a lo siguiente: si por los medios físicos que sean se intenta conseguir *un agregado de partículas lo más homogéneo posible*, nos encontraremos con las relaciones de dispersión, que forman una barrera específica frente a tal intento. Por ejemplo, es posible obtener por una selección física un rayo monocromático plano (digamos, un rayo de electrones de igual momento); pero si pretendemos hacer aún más homogéneo este agregado de electrones —quizá eliminando con una pantalla parte de él—, con objeto de tener electrones que no sólo tengan el mismo momento, sino que hayan pasado a través de una estrecha hendidura que determine un margen de posiciones $\triangle x$, entonces hemos de fracasar: porque toda selección de acuerdo con la posición de las partículas equivale a una interferencia con el sistema, que dará como resultado un aumento de la dispersión de las componentes p_x de los momentos; de suerte que

[4] Con «medición» quiero decir, de conformidad con el uso lingüístico aceptado por los físicos, no sólo las operaciones directas de medición, sino las medidas obtenidas indirectamente por medio del cálculo (en física, estas últimas son prácticamente las únicas que se encuentran).

ésta crecerá (de conformidad con la ley expresada por la fórmula de Heisenberg) al estrecharse la hendidura. Y a la inversa: si se nos da un rayo seleccionado de acuerdo con la posición gracias a haber pasado por una ranura, y si tratamos de hacerlo «paralelo» (o «plano») y monocromático, hemos de destruir la selección ejecutada según la posición, ya que no podemos evitar que aumente el ancho del rayo. (En el caso ideal —por ejemplo, si todas las componentes p_x de las partículas se han hecho igual a 0— la anchura tendría que hacerse infinita.) Si la homogeneidad de una selección se ha hecho lo más grande posible (esto es, todo lo que permiten las fórmulas de Heisenberg, de forma que sea aplicable el signo de igualdad en las mismas), diremos que se trata de un *caso puro* [5].

Al emplear esta terminología, podemos formular las relaciones estadísticas de dispersión así: no existe agregado de partículas más homogéneo que el de un caso puro *[2].

No se ha tenido hasta ahora suficientemente en cuenta que a la deducción matemática de las fórmulas de Heisenberg a partir de las ecuaciones fundamentales de la teoría cuántica ha de corresponder justamente una deducción de la *interpretación* de aquellas fórmulas partiendo de la *interpretación* de dichas ecuaciones. March, por ejemplo, ha descrito la situación exactamente del modo inverso (como hemos indicado en el apartado anterior): la interpretación estadística de la teoría cuántica aparece —según él la presenta— como una consecuencia de las limitaciones de Heisenberg acerca de la precisión alcanzable. Por otra parte, Weyl da una deducción estricta de las fórmulas de Heisenberg a partir de la ecuación de ondas (que interpreta en sentido estadístico); pero su interpretación de tales fórmulas —que acaba de deducir de una premisa interpretada estadísticamente— las convierte en limitaciones impuestas a la precisión alcanzable. Y obra de tal modo pese al hecho de darse cuenta de que su interpretación de las fórmulas es contraria en ciertos aspectos a la interpretación estadística de Born; pues, según Weyl, esta última ha de someterse a «una corrección» a la luz de las relaciones de incertidumbre: «No se trata meramente de que la posición y la velocidad de una partícula estén sujetas justamente a leyes estadísticas, estando, por lo demás, determinadas con precisión en cada caso aislado, sino que el mismo sentido de estos conceptos depende de las mediciones

---

[5] Este término se debe a Weyl *(Zeitschrift für Physik* 46, 1927, pág. 1) y J. von Neumann *(Göttinger Nachrichten,* 1927, pág. 245). Si, siguiendo a Weyl *(Gruppentheorie und Quantenmechanik,* pág. 70; trad. ingl., pág. 79; cf. también Born-Jordan, *Elementare Quantenmechanik,* pág. 315), caracterizamos el caso puro como aquél «... que es imposible de producir por combinación de dos colecciones estadísticas de índole diferente a él mismo», entonces los casos puros que satisfacen esta descripción no necesitan ser selecciones puramente de momento o de lugar: podrían producirse, por ejemplo, si se efectuase una selección de lugar con un grado de precisión elegido y de momento con la máxima precisión alcanzable entonces.

*[2] Desde luego, sería preciso formular esto de nuevo en el sentido indicado en la nota *1: «no existe dispositivo experimental capaz de producir un agregado o una sucesión de experimentos que dé resultados más homogéneos que los de un caso puro».

que necesitamos para averiguar su valor: y la medida exacta de la posición nos hurta la posibilidad de averiguar la velocidad»[6].

El conflicto —de que se percató Weyl— entre la interpretación estadística de Born de la teoría cuántica y las limitaciones de Heisenberg que se imponen a la precisión alcanzable existe verdaderamente; pero es más agudo de lo que Weyl pensaba. No sólo es imposible deducir las limitaciones citadas de la ecuación de onda estadísticamente interpretada, sino que el hecho (que todavía no he demostrado) de que ni los experimentos posibles ni los resultados experimentales reales concuerden con la interpretación de Heisenberg puede considerarse como un argumento decisivo —una especie de *experimentum crucis*— a favor de la interpretación estadística de la teoría cuántica.

76. Un intento de eliminar los elementos metafísicos por inversión del programa de Heisenberg; con aplicaciones

Si partimos del supuesto de que las fórmulas peculiares de la teoría cuántica sean hipótesis probabilitarias —y, por tanto, enunciados estadísticos— es difícil ver cómo podrán deducirse prohibiciones de eventos aislados de una teoría estadística del carácter indicado (excepto, tal vez, en los casos en que la probabilidad sea igual a 1 o a 0). La creencia de que unas medidas aisladas puedan contradecir a las fórmulas de la física cuántica parece insostenible lógicamente: tan insostenible como la creencia de que puede descubrirse algún día una contradicción entre un enunciado probabilitario formalmente singular, ${}_{\alpha}P_k(\beta) = p$ (digamos, «la probabilidad de que en la tirada k salga un cinco, es igual a 1/6»), y uno de los dos enunciados siguientes: $k \epsilon \beta$ («de hecho sale un cinco») y $k \epsilon \overline{\beta}$ («de hecho no sale un cinco»).

Estas sencillas consideraciones ponen a nuestra disposición la manera de refutar cualquiera de las supuestas demostraciones destinadas a hacer ver que una medición exacta de la posición y del momento estaría en contradicción con la teoría cuántica —o, quizá, a hacer ver que la mera suposición de que semejantes medidas sean posibles tiene que conducir a contradicciones en el seno de esta teoría—. Pues toda demostración de tal índole ha de emplear consideraciones teórico-cuánticas aplicadas a partículas *aisladas:* lo cual quiere decir que ha de utilizar enunciados probabilitarios formalmente singulares, y, además, que tiene que ser posible traducir la demostración —poco menos que palabra por palabra— al lenguaje estadístico. Si hacemos tal cosa nos encontramos con que no hay contradicción entre las medidas que hemos supuesto muy precisas y la teoría cuántica en su interpretación estadística; existe solamente una contradicción aparente entre estas medidas precisas y ciertos enunciados probabilitarios

[6] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, pág. 68. * El párrafo que aquí se cita se ha omitido, al parecer, en la versión inglesa.

formalmente singulares de la teoría. (Examinaremos en el apéndice V un ejemplo de este tipo de demostración.)

Pero, si bien es erróneo decir que la teoría cuántica *excluye* medidas exactas, será correcto afirmar que *no se pueden deducir predicciones singulares precisas* de fórmulas peculiares a la teoría cuántiva —si es que se las interpreta estadísticamente— (y no cuento la ley de conservación de la energía ni la de conservación del momento entre las fórmulas que acabo de mencionar).

Esto es así porque, teniendo en cuenta las relaciones de dispersión, hemos de fracasar muy especialmente en nuestro intento de conseguir condiciones iniciales precisas por manipulación física del sistema (esto es, por lo que he llamado selección física). Ahora bien; es completamente cierto que la técnica normal del experimentador reside en *producir* o *construir* condiciones iniciales: lo cual nos permite deducir de nuestras relaciones estadísticas de dispersión el teorema —que, sin embargo, sólo es válido para la técnica experimental «*constructiva*»—de que a partir de la teoría cuántica no podemos llegar a predicción singular alguna, sino solamente a predicciones frecuenciales [1].

Este teorema resume mi actitud con respecto a todos aquellos experimentos imaginarios que Heisenberg discute (siguiendo en gran medida a Bohr) con objeto de demostrar que es imposible realizar mediciones de una precisión prohibida por su principio de incertidumbre. En todos los casos, lo esencial es lo mismo: la dispersión estadística hace imposible *predecir* cuál será la trayectoria de la partícula después de la *operación* de medida.

Muy bien puede parecer que no hemos ganado mucho al reinterpretar el principio de incertidumbre: pues incluso Heisenberg no afirma fundamentalmente (como he tratado de hacer ver), sino que nuestras *predicciones* están sujetas a dicho principio; y como en esta materia estoy de acuerdo con él, hasta cierto punto, podría pensarse que estoy alborotando sólo por unas palabras, en lugar de debatir ninguna cuestión esencial. Pero esta opinión apenas haría justicia a mi razonamiento: pienso, en realidad, que la tesis de Heisenberg y la mía son diametralmente opuestas, como pondré de manifiesto extensamente en el próximo apartado; mientras tanto, trataré de resolver las dificultades típicas de la interpretación de Heisenberg, e intentaré poner en claro cómo y por qué surgen.

Debemos examinar primeramente la dificultad con la que se malogra, como hemos visto, el programa de Heisenberg: es la aparición en el formalismo de enunciados precisos de posición más momento; o, dicho de otro modo, de cálculos exactos de una trayectoria (cf. el apartado 73) cuya realidad física Heisenberg se ve obligado a poner en duda, mientras que otros —como Schlick— la niegan rotundamente. Pero todos los experimentos en cuestión, *a*), *b*) y *c*) —véase el apartado 73—, pueden interpretarse estadísticamente. Por

[1] El término «técnica experimental constructiva» lo usa WEYL en *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, pág. 67; trad. ingl., pág. 76.

ejemplo, la combinación *c)* —esto es, una medición de posición seguida de una de momento— puede realizarse por medio de un experimento tal como el siguiente. Seleccionamos un rayo según la posición, por medio de un diafragma con una estrecha ranura (medida de posición); medimos luego el momento de las partículas que, procedentes de la ranura, se movían en una dirección determinada (medición que, naturalmente, producirá una nueva dispersión de las posiciones); los dos experimentos juntos determinarán con precisión la trayectoria de todas las partículas que pertenecen a la segunda selección (en lo que se refiere a la trayectoria entre las dos mediciones): pues cabe calcular con precisión tanto la posición como el momento entre las dos operaciones de medir.

Ahora bien; estas mediciones y estos cálculos, que corresponden precisamente a los elementos considerados superfluos en la interpretación de Heisenberg de la teoría, en la que yo hago son todo menos *superfluos*. Reconozco que no sirven como condiciones iniciales o como base para deducir predicciones, pero, sin embargo, son indispensables: *se necesitan para contrastar nuestras predicciones*, que son *predicciones estadísticas*. Pues lo que afirman nuestras relaciones estadísticas de dispersión es que los momentos deben dispersarse cuando las posiciones están determinadas más exactamente, y viceversa. Lo cual es una predicción que no sería contrastable —o falsable— si no estuviésemos en situación de medir y calcular, mediante los experimentos del tipo descrito, los diferentes momentos dispersos que aparecen inmediatamente después de haberse realizado una selección de acuerdo con la posición *[1].

La teoría estadísticamente interpretada, por tanto, no sólo no excluye la posibilidad de mediciones aisladas exactas, sino que sería no contrastable —y, por tanto, «metafísica»— si fueran imposibles. Con

---

*1 Considero que este párrafo (y con él la primera frase del siguiente) es uno de los más importantes de este debate, y el único con el que todavía estoy enteramente de acuerdo. Como continúa habiendo malas inteligencias, me explicaré más a fondo. Las *relaciones de dispersión* afirman que si disponemos las cosas para lograr una selección tajante de la posición (digamos, mediante una ranura en una pantalla), los momentos se dispersarán, en consecuencia (más bien que hacerse «indeterminados», los momentos aislados se convierten en «imprevisibles» —en un sentido que nos permite prever que habrá dispersión—). Hemos de contrastar esta predicción o previsión *midiendo los momentos aislados* de modo que lleguemos a determinar su distribución estadística; estas mediciones de momentos aislados (que llevan a nuevas dispersiones, pero de lo cual no nos ocuparemos ahora) darán cada una un resultado tan preciso como queramos, y, en todo caso, de mucha mayor precisión que $\triangle p$, esto es, que la anchura media de la región de dispersión. Ahora bien; estas medidas *últimas nos permiten calcular retrospectivamente* los valores de los momentos en el lugar en que la posición quedó seleccionada —y medida— por la ranura: «cálculo de lo ocurrido en el pasado» de la partícula (cf. la nota 4 del apartado 73) que es esencial, ya que sin él no podríamos afirmar que estábamos midiendo los momentos inmediatamente después de haber seleccionado la posición, y, por tanto, tampoco podríamos decir que contrastábamos las relaciones de dispersión (que es lo que hacemos, realmente, en cualquier experimento que muestre un aumento de dispersión como consecuencia de una disminución del ancho de ranura). Así pues, lo único que queda «difuso» o «borroso» a consecuencia de las relaciones de dispersión es la precisión de la *predicción*, pero nunca la precisión de la *medida*.

lo cual hemos logrado cumplir el programa de Heisenberg (la eliminación de los elementos metafísicos), pero por un método exactamente opuesto al suyo: ya que, mientras él trataba de excluir ciertas magnitudes que consideraba inadmisibles (sin llegar a conseguirlo enteramente), yo he invertido su tentativa, por así decirlo, haciendo ver que el formalismo que contiene dichas magnitudes es correcto precisamente porque *éstas no son metafísicas*. Una vez que hemos abandonado el dogma incluido en la limitación impuesta por Heisenberg sobre la precisión alcanzable, ya no hay razón por la que hayamos de dudar de la significación física de tales magnitudes. Las relaciones de dispersión son predicciones frecuenciales acerca de trayectorias: y, por tanto, éstas han de ser medibles —justamente del mismo modo en que han de poderse averiguar empíricamente, digamos, las tiradas en que sale cinco— para que seamos capaces de contrastar nuestras predicciones frecuenciales acerca de ellas— o acerca de dichas tiradas.

La repulsa de Heisenberg al concepto de trayectoria, y su hablar de «magnitudes no observables», hacen ver claramente la influencia de ideas filosóficas, especialmente positivistas. Bajo la misma influencia escribe March: «Tal vez pueda decirse, sin miedo de ser mal entendido ... que para el físico un cuerpo sólo tiene realidad en el instante en que lo observa. Como es natural, nadie está tan enajenado como para afirmar que un cuerpo cesa de existir en el momento en que nos volvemos de espaldas a él; pero en ese momento cesa de ser objeto de investigación para el físico, pues no existe posibilidad de decir nada acerca de él que esté basado en experimentos» [2] Dicho de otro modo: la hipótesis de que un cuerpo se mueve siguiendo esta o aquella trayectoria mientras no se le observa es *inverificable:* lo cual es obvio, desde luego, pero carece de interés. Lo que sí tiene importancia, sin embargo, es que esta hipótesis y otras parecidas a ella son *falsables:* basándonos en la hipótesis de que se mueve a lo largo de cierta trayectoria somos capaces de predecir que será observable en tal o cual posición, lo cual constituye una predicción que puede refutarse. En el próximo apartado veremos que la teoría cuántica *no* excluye este modo de proceder; pero, en realidad, lo que hemos dicho ahora es muy suficiente [*2], ya que acaba con todas las dificultades en relación con la «carencia de sentido» del concepto de trayectoria. Nos daremos cuenta de hasta qué punto aclara esto la atmósfera si recordamos las drásticas conclusiones que se habían extraído del supuesto fallo del concepto de trayectoria, y que Schlick

---

[2] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, pág. 1. * La posición de Reichenbach —que someto a crítica en mi *Postscript*, apartado *13— es parecida.

[*2] El comienzo de esta cláusula (desde «pero, en realidad» hasta «suficiente») no estaba en el texto original. Lo he insertado aquí porque ya no creo en el razonamiento del «próximo apartado» (el 77), al que me he referido en la frase anterior, y porque lo que sigue es, en realidad, enteramente independiente del apartado que viene a continuación: pues se basa en el argumento que acabo de dar según el cual se necesitan cálculos sobre la trayectoria pasada del electrón para contrastar las predicciones estadísticas de la teoría, de modo que tales cálculos distan mucho de «carecer de sentido».

formula de este modo: «Quizá el modo más conciso de describir la situación que estamos examinando sea decir (como hacen los investigadores más eminentes de los problemas cuánticos) que la validez de los conceptos ordinarios espacio-temporales está confinada a la esfera de lo observable macroscópicamente, y que éstos no son aplicables a las dimensiones atómicas»[3]. Schlick alude aquí probablemente a Bohr, que escribe: «Por tanto, puede asumirse que, en lo que se refiere al problema general de la teoría cuántica, no es una mera cuestión de un cambio en las teorías mecánicas y electrodinámicas, y que podría describirse con los conceptos físicos ordinarios, sino el fracaso profundo de nuestras imágenes espacio-temporales, que hasta ahora se habían utilizado para la descripción de los fenómenos naturales»[4]. Heisenberg adoptó esta idea de Bohr —a saber, la renuncia a las descripciones espacio-temporales— como base de su programa de investigación; su éxito pareció hacer patente que se trataba de una renuncia fructuosa, pero, realmente, el programa no llegó nunca a realizarse hasta el final. A la luz de nuestro análisis parece ahora justificable el empleo frecuente e inevitable —si bien se haga subrepticiamente— de conceptos espacio-temporales; pues aquél ha puesto de *manifiesto* que las relaciones estadísticas de dispersión son enunciados acerca de la dispersión de la posición más momento, y, por ello, enunciados sobre trayectorias.

Una vez que hemos mostrado que las relaciones de incertidumbre son enunciados probabilitarios formalmente singulares, podemos desenmarañar también la intrincada madeja de sus interpretaciones objetiva y subjetiva. En el apartado 71 nos dimos cuenta de que todo enunciado de este tipo puede interpretarse asimismo subjetivamente, como una predicción indefinida, es decir, como un enunciado referente a la incertidumbre de nuestro conocimiento. Hemos visto también bajo qué supuestos tiene que fracasar el intento justificado y necesario de interpretar objetivamente un enunciado de esta índole: cuando se pretende sustituir una interpretación objetiva estadística por una interpretación objetiva singular, atribuyendo la incertidumbre directamente al evento aislado [*3]. Con todo, si se interpretan (directamente) las fórmulas de Heisenberg en un sentido subjetivo, se pone en peligro la posición de la física como ciencia objetiva, ya que para ser coherente habría que interpretar asimismo subjetivamente las ondas de probabilidad de Schrödinger; ésta es la conclusión que saca Jeans[5], que escribe: «En resumen, la imagen corpuscular nos

---

[3] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik*, *Die Naturwissenschaften* 19 (1931), pág. 159.

[4] BOHR, *Die Naturwissenschaften* 14 (1926), pág. 1.

[*3] Este es uno de los puntos en que he cambiado de opinión desde entonces (cf. mi *Postscript*, capítulo *V); pero el argumento principal en favor de la interpretación objetiva permanece inalterado. Según lo que pienso actualmente, la teoría de Schrödinger puede y debe ser interpretada no sólo como objetiva y singular, sino simultáneamente como probabilística.

[5] JEANS, *The New Background of Science* (1933, pág. 236; 2.ª ed., 1934, página 240) [ed. cast., 1936, pág. 188 *(T.)*]. En el texto de Jeans, la segunda

dice que nuestro conocimiento de un electrón es indeterminado; la imagen ondulatoria, que el electrón mismo es indeterminado, ya realicemos experimentos con él o no. Pero el contenido del principio de incertidumbre tiene que ser el mismo en ambos casos; y sólo hay una manera de lograr tal cosa: hemos de suponer que la imagen ondulatoria no nos da una representación de la Naturaleza objetiva, sino de nuestro conocimiento de la Naturaleza...». Por tanto, para Jeans las ondas de Schrödinger son *ondas de probabilidad subjetiva*, ondas de nuestro conocimiento: con lo cual, toda la teoría subjetiva de la probabilidad invade el dominio de la física, y los razonamientos que he rechazado —el empleo del teorema de Bernoulli como «puente» de la ignorancia al conocimiento estadístico, y otros parecidos (cf. el apartado 62)— resultan inevitables. Jeans formula del modo siguiente la actitud subjetivista de la física moderna: «Heisenberg ha abordado el enigma del universo físico abandonando el enigma principal —el de la naturaleza del universo objetivo— por insoluble, y dedicándose al rompecabezas más reducido de coordinar nuestras observaciones del universo. Por ello, no sorprende que la imagen ondulatoria que ha surgido finalmente demuestre referirse con exclusividad a nuestro conocimiento del universo tal y como se consigue a través de nuestras observaciones».

Sin duda alguna, estas observaciones parecerán sumamente aceptables a los positivistas. Pero mis propias opiniones acerca de la objetividad no han quedado afectadas. Los enunciados estadísticos de la teoría cuántica tienen que ser contrastables intersubjetivamente, del mismo modo que cualesquiera otros enunciados de la física; y mi sencillo análisis no sólo pone a salvo la posibilidad de descripciones espacio-temporales, sino también el carácter objetivo de la física.

Es interesante saber que existe una contrapropuesta simétrica de la interpretación subjetiva mencionada de las ondas de Schrödinger, a saber, una interpretación no estadística, y, por tanto, objetiva directa (esto es, singular). El mismo Schrödinger, en sus famosos *Collected Papers on Wave-Mechanics*, ha propuesto cierta interpretación de este tipo para su ecuación de onda (que, como hemos visto, es un enunciado probabilitario formalmente singular): ha tratado de identificar inmediatamente la partícula con el paquete de onda mismo. Pero esta tentativa lleva directamente a las dificultades características de este género de interpretaciones, quiero decir, a adscribir la incertidumbre a los objetos físicos mismos (incertidumbres objetivizadas): Schrödinger se ha visto forzado a admitir que la carga del electrón estaba «difusa» o «borrosa» en el espacio (con una densidad de carga determinada por la amplitud de onda) —asunción que ha resultado ser incompatible con la estructura atómica de la electricidad [6]—.

---

frase inicia un nuevo párrafo (que comienza, pues, con las palabras «con todo, si se interpretan»). Para la cita que insertamos al final de este párrafo, véase *op. cit.*, página 237 (2.ª ed., pág. 241) [vers. cast., pág. 188 *(T.)*].

[6] Cf., por ejemplo, WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, pág. 193; versión ingl., págs. 216 y sig.

La interpretación estadística de Born ha resuelto el problema, pero la conexión lógica existente entre las interpretaciones estadística y no estadística ha permanecido obscura; y así ha ocurrido que se ha continuado sin caer en la cuenta del carácter peculiar de otros enunciados probabilitarios formalmente singulares —tales como las relaciones de incertidumbre—, que han podido seguir socavando las bases físicas de la teoría.

Quizá pueda concluir con una aplicación de lo dicho en este apartado a un experimento imaginario propuesto por Einstein [7], y que Jeans llama [8] «una de las partes más difíciles de la teoría cuántica nueva»; si bien me parece que nuestra interpretación lo hace completamente claro, si no trivial *[4].

Imagínese un espejo semitransparente, esto es, que refleja parte de la luz y deja pasar a su través otra parte. La probabilidad formalmente singular de que un fotón (o cuanto luminoso) dado atraviese el espejo, $_{\alpha}P_{k}(\beta)$, puede admitirse que sea igual a la de ser reflejado; tenemos, por tanto,

$$_{\alpha}P_{k}(\beta) = {_{\alpha}P_{k}(\bar{\beta})} = \tfrac{1}{2}.$$

Esta estimación probabilitaria, como sabemos, está definida dentro de las probabilidades estadísticas objetivas: es decir, es equivalente a la hipótesis de que la mitad de una clase dada de cuantos de luz, α, pasará a través del espejo, mientras que la otra mitad será reflejada. Sea ahora k un fotón que incide sobre el espejo, y sea el caso que se averigüe experimentalmente que este fotón ha sido reflejado; entonces, parece que las probabilidades cambian como si fuese repentinamente, de modo discontinuo: todo ocurre como si antes del experimento hubieran sido ambas iguales a 1/2, pero que una vez sabido el hecho de la reflexión se hubiesen vuelto de repente 0 y 1, respectivamente. Es evidente que este ejemplo es, en realidad, el mismo que hemos propuesto en el apartado 71 *[5]. Y difícilmente aclara la situación el describir este experimento —tal como lo hace Heisenberg [9]— en los siguientes términos: «Mediante el experimento [esto

---

[7] Cf. HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien*, pág. 29 (trad. ingl. por C. ECKART y F. C. HOYT, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago, 1930, página 39).

[8] JEANS, *The New Background of Science* (1933, pág. 242; 2.ª ed., pág. 246) [versión cast., pág. 192 *(T.)*].

*[4] El problema que se expone a continuación se ha hecho luego famoso con el nombre de «problema de la *reducción* (discontinua) *del paquete de ondas*». Algunos destacados físicos me dijeron en 1934 que estaban de acuerdo con mi solución trivial, pero ha pasado más de veinte años y este problema sigue causando la máxima estupefacción en los estudios acerca de la teoría cuántica; en los apartados *100 y *115 de mi *Postscript* lo discuto de nuevo largo y tendido.

*[5] Es decir, las probabilidades «cambian» solamente en cuanto que se reemplaza α por $\bar{\beta}$; con lo cual, $_{\alpha}P(\beta)$ continúa valiendo 1/2, pero $_{\beta}P(\beta)$, naturalmente, es 0, del mismo modo que $_{\bar{\beta}}P(\bar{\beta})$ es 1.

[9] HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien*, pág. 29 (trad. ingl.: *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago, 1930, pág. 39). VON LAUE, por el con-

es, la medición por la cual encontramos el fotón reflejado] se ejerce cierto tipo de acción física (una reducción de los paquetes de ondas) desde el lugar en que se ha encontrado la mitad reflejada del paquete de ondas a otro lugar —todo lo distante que queramos— en que acontece estar la otra mitad del paquete»; descripción a la cual añade: «esta acción física se propaga con velocidad superior a la de la luz». Todo esto no sirve para nada, ya que nuestras probabilidades originarias, ${}_{\alpha}P_k(\beta)$ y ${}_{\alpha}P_k(\bar{\beta})$, continúan siendo iguales a 1/2: lo único que ha ocurrido es que hemos elegido una nueva clase de referencia —β, o $\bar{\beta}'$, en lugar de α— bajo la enérgica influencia del resultado del experimento (o sea, de la información $k \in \beta$ o $k \in \bar{\beta}$, respectivamente). Decir que las consecuencias lógicas de esta elección (o, tal vez, que las consecuencias lógicas de esta información) se propagan con velocidad superior a la de la luz», ayuda a comprender las cosas poco más o menos lo mismo que decir que dos por dos se convierten en cuatro con velocidad superior a la de la luz; y una observación ulterior de Heisenberg acerca de que este tipo de propagación de una acción física no puede emplearse para transmitir señales, aunque es verdadera, apenas mejora la situación.

El destino de este experimento imaginario es el de recordarnos la urgente necesidad de distinguir y definir los conceptos probabilitarios estadísticos y formalmente singulares. También hace ver que el problema de interpretación a que ha dado origen la teoría cuántica sólo puede abordarse por medio de un análisis lógico de la interpretación de los enunciados probabilitarios.

77. Los experimentos decisivos

(*He retirado el experimento imaginario que describo en el presente apartado, ya que se basa en un error, acerca de cuyo origen véanse la nota *1 del apéndice VI, página 278 y el punto 10 del apéndice *XI; este error fue sometido a crítica por primera vez por Von Weizsäcker en *Naturwiss.* 22, 1934, página 807, y por Einstein —en su carta reproducida en el apéndice *XII—. Ya no creo en dicho experimento, ni creo tampoco, por otra parte, que sea «decisivo» en el sentido mencionado en el texto ni siquiera necesario, pues dentro de mi argumentación puede reemplazarle el famoso experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (cf. la nota *4 del presente apartado y los apéndices *XI y *XII). Todavía más: los argumentos de los apartados precedente y siguiente no quedan alterados por ello. Como se me ha criticado por reimprimir el presente apartado, he de decir que tal reimpresión no me ha producido gozo alguno; pero que algunos lectores preferirían quizá ver exactamente qué errores había cometido, y

---

trario, dice con toda justeza en *Korpuskular- und Wellentheorie, Handbuch d. Radiologie* 6 (2.ª ed., pág. 79 de la separata): «Pero quizá es algo completamente equivocado coordinar una onda con un corpúsculo aislado. Si suponemos que por principio la onda se refiere a un agregado de cuerpos iguales, pero mutuamente independientes, desaparece la conclusión paradójica». * Einstein ha adoptado una interpretación parecida: cf. la nota *1 del apartado siguiente y el apéndice *XII.

que podría habérseme criticado fácilmente si hubiese suprimido o tapado mi error.)

He llevado a cabo hasta ahora las dos primeras partes del programa que había bosquejado en la introducción que precedía al apartado 73. He puesto de manifiesto, 1) que las fórmulas de Heisenberg pueden interprestarse estadísticamente, y de ahí, 2) que su interpretación como limitaciones impuestas a la precisión alcanzable no se sigue lógicamente de la teoría cuántica: la cual, por tanto, no puede quedar contradicha simplemente porque consigamos en nuestras mediciones un grado de precisión más elevado *[1].

«Por ahora vamos bien», podría decir alguien; «no niego que sea posible considerar la teoría cuántica de ese modo; pero no me parece que sus argumentos hayan rozado siquiera el verdadero núcleo físico de la teoría de Heisenberg, es decir, la imposibilidad de hacer *predicciones* singulares exactas».

Si se pidiera a mi contradictor que diese forma a su tesis por medio de un ejemplo físico, podría continuar del modo siguiente: «Imagínese un haz de electrones, tal como uno en un tubo catódico, y asumamos que la dirección que sigue es la dirección x. Podemos efectuar diversas selecciones físicas de tal haz: por ejemplo, cabe separar o seleccionar un grupo de electrones teniendo en cuenta su posición en la dirección x (esto es, de acuerdo con su coordenada x en un instante determinado) —quizá por medio de un diafragma que abriríamos durante un tiempo cortísimo—. De este modo, obtendríamos un grupo de electrones cuya extensión en la dirección x sería muy pequeña; de acuerdo con las relaciones de dispersión, los momentos en la dirección x de los distintos electrones del grupo discreparían entre sí ampliamente (y, por tanto, también sus energías). Como usted ha afirmado con razón, podemos contrastar estos enunciados acerca de la dispersión: y ello midiendo las energías o los momentos de electrones aislados, pues como conocemos la posición llegaremos a saber la posición y el momento. Podría ejecutarse una medición de esta índole, por ejemplo, haciendo que los electrones chocasen sobre una placa, cuyos átomos quedarían excitados: encontraríamos —entre otras cosas— algunos átomos para cuya excitación se habría requerido una energía superior a la energía media de los electrones. Admito, pues, que tenía usted razón de sobra en hacer resaltar que tales mediciones son, no sólo posibles, sino significativas; pero —y aquí llega mi objeción— al ejecutar semejante medición hemos de perturbar el sistema que estamos examinando, es decir, o bien los electrones aislados, o bien —si medimos varios (como en nuestro ejemplo)— la totalidad del haz de electrones. Reconozco que la teoría no sufriría contradicción lógica si pudiéramos conocer los momentos de los distintos electrones del grupo antes de que éste se vea perturbado (con tal de que, naturalmente, esto no nos permitiese emplear dicho conocimiento para llevar a cabo una selección prohibida); pero no hay modo de conocer tal cosa acerca de los electrones aislados sin perturbarlos. En

*[1] En realidad, he completado también el punto 3) de mi programa.

conclusión: sigue siendo cierto que las predicciones aisladas precisas son imposibles».

A esta objeción yo contestaría diciendo, en primer lugar, que no sería extraño que fuese correcta. Después de todo, es evidente que a partir de una teoría estadística no pueden deducirse nunca predicciones singulares exactas, sino exclusivamente predicciones aisladas «indefinidas» (esto es, formalmente singulares). Pero lo que yo afirmo en este momento es que, si bien la teoría no nos proporciona semejantes predicciones, *no las excluye* tampoco: podría hablarse de la imposibilidad de predicciones singulares únicamente si pudiera afirmarse que al perturbar el sistema o interferir con él tiene que impedirse todo tipo de medición predictiva.

«Pero eso es precisamente lo que yo afirmo —diría mi impugnador—; afirmo justamente la imposibilidad de semejante medición. Usted supone que es posible medir la energía de uno de esos electrones en movimiento sin sacarle de su trayectoria y del grupo de electrones: y *ésa* es la asunción que yo considero insostenible; pues admitiendo que dispusiera de un aparato con el que pudiese llevar a cabo tales mediciones, entonces con él o con otro aparato semejante sería capaz de *producir* agregados de electrones en los que todos éstos, *a)* estarían limitados en cuanto a posición, y *b)* tendrían el mismo momento. Y, desde luego, también usted opina que la existencia de semejantes agregados estaría en contradicción con la teoría cuántica, ya que está excluida por sus propias 'relaciones de dispersión', como usted las llama. Así pues, lo único que podría usted contestar es que es posible concebir un aparato que nos permitiese hacer mediciones, pero no efectuar selecciones. Admito que la idea es tolerable lógicamente; pero como físico lo único que puedo decir es que mis intuiciones se rebelan contra la idea de que podamos medir los momentos de unos electrones sin ser capaces de eliminar, por ejemplo, todos aquellos cuyo momento supera (o no llega) a una cantidad dada».

Mi primera respuesta sería que todo ello parece sumamente convincente. Pero que todavía no se ha dado (ni se puede dar, según veremos pronto) una *demostración* rigurosa de la aserción según la cual, si es posible una medición predictiva también ha de serlo la separación física correspondiente. Ninguno de los argumentos aducidos prueba que las predicciones precisas contradirían a la teoría cuántica, ya que todos introducen una *hipótesis suplementaria:* pues el enunciado (que corresponde a la tesis de Heisenberg) de que las predicciones aisladas exactas son imposibles resulta ser equivalente a la hipótesis de que *las mediciones predictivas* y *las selecciones físicas estén ligadas inseparablemente.* Y mi concepción tiene verdaderamente que chocar con este nuevo sistema teórico —la conyunción de la teoría cuántica con esta hipótesis auxiliar, la «*hipótesis de ligadura*» [1].

[1] La hipótesis auxiliar que debato aquí puede presentarse, desde luego, de un modo diferente. La razón que tengo para elegir en concreto esta forma para su análisis y discusión críticos es que la objeción que afirma la existencia de una ligadura entre medición y selección física ha sido realmente planteada (en conversaciones y en cartas) contra la tesis aquí propuesta.

Al llegar a esta situación he llevado a cabo el punto 3) de mi programa. Pero todavía tiene que asentarse el 4): esto es, hemos de hacer ver todavía que el sistema que combina la teoría cuántica estadísticamente interpretada (incluyendo, según asumimos, las leyes de conservación del momento y de la energía) con la «hipótesis de ligadura» es internamente contradictorio. Existe, supongo, una convicción profundamente arraigada de que las mediciones predictivas y las selecciones físicas están siempre ligadas entre sí; y la extensión general de semejante convicción presuntiva podrá tal vez explicar por qué no se han elaborado los sencillos argumentos que asentarían la presunción opuesta.

Querría destacar que las principales consideraciones físicas que voy a presentar ahora no forman parte de las asunciones o premisas de mi análisis lógico de las relaciones de incertidumbre, aunque podría decirse que son fruto de ellas. En realidad, el análisis que hemos efectuado hasta ahora es *enteramente independiente* de lo que se va a decir, y especialmente del experimento físico imaginario que describiré más abajo *[2], con el cual se pretende establecer la posibilidad de predicciones arbitrariamente precisas de la trayectoria de partículas aisladas.

Como introducción a este experimento imaginario estudiaré primero algunos otros más sencillos, con los que intento hacer patente que podemos hacer sin dificultad predicciones de trayectoria de precisión arbitraria, así como contrastarlas. A este nivel de la cuestión, me ocupo únicamente de predicciones que no se refieran a corpúsculos aislados determinados, sino a todas las partículas que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas a la dirección x con un momento conocido igual para todas; también se conocerán las componentes del momento en las otras direcciones —esto es, se sabrá que son iguales a cero—. Ahora bien; en lugar de determinar la posición en la dirección x de un grupo de corpúsculos por medio de una selección *física* —o sea, en vez de aislar dicho grupo del resto del haz por medios técnicos (como hicimos antes)—, nos contentaremos con diferenciar este grupo de los demás dirigiendo meramente nuestra atención a él: por ejemplo, podemos prestar atención a todas las partículas que tienen (con una precisión dada) la coordenada de lugar x en un instante dado, y que, por tanto, no están esparcidas por fuera de un margen arbitrariamente pequeño $\triangle x$. Conocemos con precisión el momento de cada una de tales partículas, y conocemos, por ello, con precisión, dónde se va a encontrar tal grupo en cada instante futuro (es claro que la mera existencia de semejante grupo de corpúsculos no contradice a la teoría cuántica: sólo lo haría su existencia separada, o sea, la posibilidad de seleccionarlo físicamente). Podemos llevar a cabo el mismo tipo de selección imaginaria en lo que se refiere a las demás coordenadas espaciales; el haz monocromático seleccionado fí-

*[2] Aquellos críticos que han rechazado —con toda razón— la idea de mi experimento imaginario parecen haber creído que habían refutado a la vez, con ello, el análisis precedente, pese a la advertencia que hago.

sicamente tendría que tener un gran ancho en las direcciones *y* y *z* (sería infinitamente ancho en el caso de un haz monocromático ideal), ya que suponemos que en estas direcciones el momento se ha seleccionado con precisión (es decir, es igual a cero): de suerte que las posiciones en estas direcciones estarán muy separadas; mas podemos fijar nuestra atención de nuevo en un rayo parcial muy estrecho. Una vez más, no sólo conoceremos la posición, sino también el momento de todo corpúsculo de este rayo: y seremos capaces —por tanto— de predecir, con respecto a cualquier partícula de este estrecho rayo (que, por decirlo así, hemos seleccionado imaginativamente), en qué punto y con qué momento incidirá sobre una placa fotográfica colocada en su trayectoria; y, desde luego, podremos contrastar empíricamente esta predicción (como ocurría con el experimento anterior).

Pueden efectuarse selecciones imaginarias análogas a la que acabamos de hacer a partir de un «caso puro» de un tipo concreto, partiendo de otros tipos de agregados. Por ejemplo, podemos tomar un haz monocromático en el cual se haya ejecutado una selección física por medio de una estrecha ranura $\triangle y$ (con lo cual tendremos como punto de partida físico una selección física que corresponderá a la selección meramente imaginada del ejemplo precedente). No sabemos, de ninguna de las partículas, en qué dirección saldrá después de atravesar la ranura; pero si tenemos en cuenta una dirección determinada podemos calcular con precisión la componente del momento de todas las que se dirigen en esta dirección concreta. Así pues, los corpúsculos que después de haber pasado por la ranura se mueven en una dirección determinada forman de nuevo una selección imaginada; podemos predecir su posición y su momento, o, dicho brevemente, sus trayectorias; y, una vez más, si colocamos una placa fotográfica en su camino, podemos someter a contraste nuestras predicciones.

En principio, la situación es la misma (aun cuando las contrastaciones empíricas son algo más difíciles) que en el caso del primer ejemplo considerado; a saber, una selección de partículas de acuerdo con su posición en la dirección de movimiento. Si realizamos una selección física correspondiente a este caso, entonces corpúsculos diferentes se moverán con velocidades diferentes, debido a la dispersión de los momentos: el grupo corpuscular se esparcirá sobre un margen o zona que será cada vez más grande en la dirección *x* según avanza (el paquete se hará más ancho); y ahora podemos establecer el momento de un grupo parcial de tales corpúsculos (seleccionado imaginativamente) que se encuentre en un instante dado en una posición dada a lo largo de la dirección *x*: el momento será mayor cuanto más adelante se encuentre el grupo parcial seleccionado (y viceversa). Sustituyendo la placa fotográfica por una tira móvil de película fotográfica podríamos llevar a cabo la contrastación empírica de la predicción que hubiéramos hecho de este modo. Como sabríamos para cada punto de la cinta el instante en que estaría expuesto al impacto de los electrones, podríamos *predecir* también con respecto a cada uno de tales puntos con qué momento se producirían los impactos; predicciones que podríamos *someter a contraste,* por ejemplo, insertando un filtro delante de la banda móvil o quizás ante el contador de Geiger (un filtro en el caso de rayos luminosos, y un campo eléctrico en ángulo recto con la dirección del rayo cuando se tratase de electrones), al cual seguiría una selección según la dirección que permitiese pasar solamente a las partículas que poseyeran un momento mínimo dado. Podríamos averiguar de este modo si estas partículas llegaban realmente en el instante predicho o no.

La precisión de las medidas que se obtienen con estas contrastaciones no está limitada por las relaciones de incertidumbre: pues éstas han de aplicarse —según hemos visto— principalmente a las mediciones que se emplean para la deducción de predicciones, pero no a las encaminadas a contrastarlas; es decir, se entiende que se aplican a «*mediciones predictivas*» y no a «*mediciones no predictivas*». En los apartados 73 y 76 he estudiado tres casos de tales mediciones «no predictivas», a saber, *a)* la medición de dos posiciones, *b)* la medición de una posición precedida —o *c)* sucedida— por un momento. La medición arriba expuesta, por medio de un filtro delante de una tira de película o de un contador de Geiger, constituye un ejemplo de *b)*, esto es, de una selección de acuerdo con el momento seguida por una de posición; y es de suponer que éste es el caso que, según Heisenberg (cf. el apartado 73), permite «un cálculo del pasado del electrón»; pues mientras en los casos *a)* y *c)* sólo eran posibles cálculos referentes al tiempo comprendido *entre* las dos mediciones, en el *b)* cabe calcular la trayectoria *previa* a la primera medición, con tal de que ésta sea una selección de acuerdo con un momento dado: ya que tal selección no perturba la posición del corpúsculo *3. Como ya sabemos, Heisenberg cuestiona la «realidad física» de la medida, porque nos permite calcular el momento de la partícula sólo a su llegada a una posición y en un instante medidos ambos exactamente: la medición parece carecer de contenido predictivo, ya que no es posible deducir de ella conclusión alguna contrastable. Con todo, apoyaré mi experimento imaginario —que pretende asentar firmemente la posibilidad de predecir con precisión la posición y el momento de una partícula determinada— en este dispositivo especial de medición, a primera vista no predictivo.

Como me dispongo a deducir unas consecuencias de tanto alcance del supuesto de que son posibles mediciones precisas «no predictivas» de este tipo, considero apropiado discutir la admisibilidad de semejante supuesto: lo cual se hace en el apéndice VI.

Con el experimento imaginario que viene a continuación desafío

*3 Este enunciado (que traté de apoyar en mi estudio del apéndice VI) ha sufrido una eficaz crítica de Einstein (cf. el apéndice *XII), y con él se desploma mi experimento imaginario. La cuestión principal es que las mediciones no predictivas determinan la trayectoria de la partícula solamente *entre* dos mediciones, por ejemplo, una de momento seguida por una de posición (o viceversa): según la teoría cuántica, no es posible prolongar aún más la trayectoria hacia atrás, esto es, a la zona temporal anterior a la primera de tales mediciones. De ahí que el último párrafo del apéndice VI sea erróneo; y no podemos saber, cuando llega una partícula a X (véase más abajo), si procedía de P o de otro sitio cualquiera.

directamente el método argumentativo de Bohr y Heisenberg, que han utilizado para justificar la interpretación de las fórmulas de este último como limitaciones impuestas a la precisión alcanzable. Pues estos autores han tratado de justificar tal interpretación mostrando que no puede idearse un experimento imaginario que dé origen a medidas predictivas más exactas; pero es claro que este método de argumentar no excluye la posibilidad de que un día pueda idearse un experimento imaginario que (empleando efectos y leyes físicos conocidos) haga ver cómo después de todo serían posibles tales mediciones. Se ha dado por seguro que cualquier experimento de esta índole estaría en contradicción con el formalismo de la teoría cuántica, y parece que esta idea ha determinado la dirección de la búsqueda de semejantes experimentos; pero mi análisis —en el que he llevado a cabo los puntos 1) y 2) de mi programa— ha despejado el camino para idear un experimento imaginario que hace ver, de *pleno acuerdo* con la teoría cuántica, que son posibles las mediciones precisas en cuestión.

Para realizarlo emplearé, como antes, una «selección imaginaria»; pero escogeré un dispositivo tal, que si existe realmente una partícula caracterizada por la selección seamos capaces de averiguar tal hecho.

En cierto modo, mi experimento consiste en una especie de idealización de los de Compton-Simon y Bothe-Geiger [2]. Como queremos llegar a predicciones singulares, no podemos trabajar únicamente con supuestos estadísticos: hemos de emplear también las leyes no estadísticas de la conservación de la energía y del momento, y podemos sacar partido del hecho de que tales leyes nos permiten calcular lo que ocurre cuando las partículas chocan —supuesto que se nos den dos de las cuatro magnitudes con que se describe la colisión (esto es, los momentos $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$, previos, y los $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_2$, posteriores a ella) y una componente [3] de una tercera—. (El método de cálculo es una parte perfectamente conocida de la teoría del efecto Compton [4].)

Imaginemos ahora el dispositivo experimental siguiente (véase la figura 2). Hacemos que se corten dos haces corpusculares (de los cuales, como máximo uno podrá ser un rayo de luz y como máximo uno tendrá carga eléctrica [5]), ambos «*casos puros*», en el sentido concreto de que el haz A será monocromático (o sea, se tratará de una selección de acuerdo con el momento $\mathbf{a}_1$) y el B pasará a través de

---

[2] Compton y Simon, *Physical Review* **25**, 1924, pág. 439; Bothe y Geiger, *Zeitschrift für Physik* **32**, 1925, pág. 639; cf. también Compton, *X-Rays and Electrons* (Nueva York, 1927); *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaft* **5**, 1926, págs. 267 y sigs.; Haas, *Athomtheorie* (1929), págs. 229 y sigs.

[3] Ha de entenderse aquí «componente» en el sentido más amplio (ya en cuanto a dirección como en cuanto a magnitud absoluta).

[4] Cf. Haas, *op. cit.*

[5] Estoy pensando ahora en un rayo de luz y un tipo cualquiera de rayo corpuscular (de megatones, positones o neutrones); en principio, sin embargo, podrían utilizarse dos rayos corpusculares de los cuales al menos *uno* fuese neutrónico. (Diré incidentalmente que las palabras «negatrón» o «positrón», que se están convirtiendo actualmente en las de uso normal, me parecen monstruosidades lingüísticas: después de todo, no decimos ni «positrivo» ni «protrón».)

una estrecha ranura *Rn* (y estará sujeto, por tanto, a una selección física que tiene en cuenta la posición); supongamos también que las partículas de B tienen el momento (absoluto) $\mathbf{b}_1$. Se producirán algunas colisiones entre corpúsculos de uno y otro haz. Ahora *imaginamos* dos finos rayos parciales, [A] y [B], que se intersecan en el punto «lugar» *P;* conocemos el momento de [A], que es $\mathbf{a}_1$, y lo mismo ocurre con el del rayo parcial [B] en cuando nos hemos decidido por una dirección concreta para él: sea, pues, $\mathbf{b}_1$. Elegimos ahora una dirección *PX*; si nos fijamos en las partículas del rayo parcial [A] que después del choque se mueven en dicha dirección, podemos calcular su momento, $\mathbf{a}_2$, y, asimismo, $\mathbf{b}_2$ (esto es, el momento que tienen después de la colisión los corpúsculos con los que aquéllas habían chocado): a cada partícula de [A] que quedó lanzada en el punto *P* en dirección de *X* y con el momento $\mathbf{a}_2$, ha de corresponder

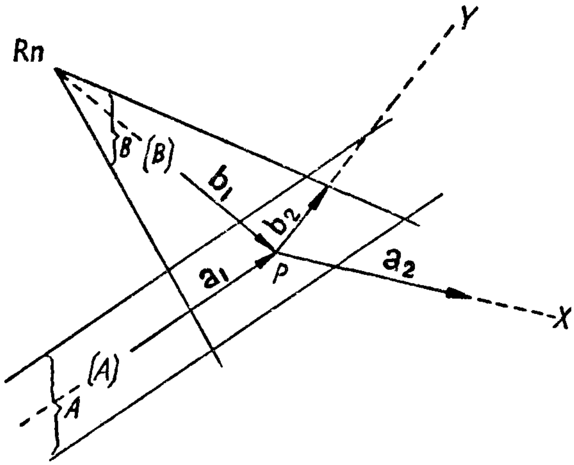


Figura 2.

una segunda partícula —de [B]— que ha sufrido una deflexión en *P* en la dirección calculable *PY* y tiene el momento $\mathbf{b}_2$. Colocamos un aparato en *X* —por ejemplo, un contador de Geiger o una tira móvil de película— que registra los impactos de los corpúsculos que llegan desde *P* a la región *X* (cuya extensión cabe reducir a nuestro arbitrio). Podemos decir ahora: en cuanto advertimos que se ha registrado una de tales llegadas, sabemos que, al mismo tiempo, una segunda partícula ha de estar moviéndose desde *P* hacia *Y* con el momento $\mathbf{b}_2$, y sabemos, asimismo, dónde se encontraba esta segunda partícula en todo instante, pues teniendo en cuenta cuándo se produjo el impacto de la primera en *X* y su velocidad —que conocemos—, podemos calcular el instante en que se produjo la colisión en *P*. Y colocando otro contador de Geiger (o la tira móvil de película) en Y, podemos contrastar nuestras predicciones con respecto al segundo corpúsculo *4.

La precisión de estas predicciones —lo mismo que la de las mediciones realizadas para contrastarlas— *no está, en principio, sujeta a ninguna de las limitaciones debidas al principio de incertidumbre* en lo que se refiere a la coordenada de posición y a la componente del momento en la dirección PY: pues mi experimento imaginario reduce la cuestión de la precisión con que se pueden hacer predicciones acerca de una partícula de B que sufre una deflexión en P, a la de la precisión alcanzable en las mediciones que se efectúan en X. Y éstas parecen ser, a primera vista, mediciones no predictivas de tiempo, posición y momento de la primera partícula correspondiente de [A]: cuyo momento en la dirección PX, así como el instante de su impacto en X (esto es, de su posición en la dirección PRn), pueden medirse con el grado de precisión que queramos (cf. el apéndice VI) si realizamos una selección de momentos —por ejemplo, interponiendo un campo eléctrico o un filtro delante del contador de Geiger— antes de medir la posición. Pero, como consecuencia de todo esto (según se verá más a fondo en el apéndice VII), podemos hacer predicciones con un grado de precisión cualquiera acerca del corpúsculo de B que se mueve en la dirección PY.

Este experimento imaginario nos permite advertir, no sólo que pueden ejecutarse predicciones aisladas precisas, sino bajo qué condiciones pueden realizarse —o, mejor, bajo qué condiciones son compatibles con la teoría cuántica—: solamente si podemos llegar a conocer el estado de la partícula sin ser capaces de dar origen a dicho estado a voluntad. Así pues, llegamos a un conocimiento que es posterior al evento, como si dijéramos, ya que cuando lo alcanzamos el corpúsculo habrá asumido ya su estado de movimiento; y, sin embargo, podemos utilizar tal conocimiento para deducir de él predicciones contrastables (si la partícula de B es un fotón, por ejemplo, podríamos ser capaces de calcular el instante de su llegada a Sirio). Los impactos de las partículas que alcanzan X se sucederán unos a otros en intervalos de tiempo irregulares, lo cual significa que los corpúsculos del rayo parcial [B] sobre el que estamos haciendo predicciones se

---

*4 Einstein, Podolski y Rosen emplean un razonamiento *más modesto*, pero *válido:* supongamos que la interpretación de Heisenberg sea correcta, de suerte que podamos medir únicamente *o* la posición *o* el momento de la primera partícula en X; entonces, si *medimos* la posición podemos *calcular* la de la segunda partícula, y si *medimos* el momento podemos *calcular* el de esta última; pero, puesto que podemos elegir en cualquier instante —si medir la posición o el momento—, incluso después de que la colisión entre las dos partículas ha tenido lugar, no es razonable suponer que el segundo corpúsculo haya quedado afectado en modo alguno por el cambio de dispositivo experimental procedente de tal elección, ni que haya sufrido ningún tipo de interferencia debida a dicho cambio; y, en consecuencia, nos es dable calcular —con la precisión que queramos— *bien* la posición, *bien* el momento de la segunda partícula, *sin interferir con ella:* hecho que cabe expresar diciendo que esta última «*tiene*» posición y momento precisos (Einstein lo expresó así: la posición y el momento son «reales»; y fue atacado inmediatamente como «reaccionario»). Véanse también los apéndices *XI a *XII.

sucederán también uno a otro a intervalos irregulares de tiempo. Estaría en contradicción con la teoría cuántica que pudiésemos alterar el estado de cosas haciendo, por ejemplo, iguales los intervalos mencionados. Así pues, es como si fuésemos capaces de apuntar y predeterminar la fuerza de la bala, como si pudiéramos, asimismo (y ello *antes* de que la bala dé en el blanco *Y*), calcular el instante exacto en que se hizo el disparo en *P*; pero no podemos elegir libremente el momento en que se dispara, sino que hemos de esperar hasta que el arma de fuego entre en acción; ni tampoco podemos evitar que se hagan disparos al blanco que escapan a nuestra previsión (desde las cercanías de *P*).

Es evidente que nuestro experimento y la interpretación de Heisenberg son incompatibles. Mas, puesto que es posible deducir la posibilidad de llevarlo a cabo a partir de la interpretación estadística de la teoría cuántica (más las leyes de la energía y del momento), resulta que la interpretación de Heisenberg, que le contradice, ha de estar también en contradicción con la interpretación estadística de aquella teoría. A la vista de los experimentos de Compton-Simon y Bothe-Geiger parece posible realizar el experimento arriba expuesto, que puede considerarse como una especie de *experimentum crucis* que sirve para decidir entre la concepción heisenberguiana y una interpretación estadística coherente de la teoría cuántica.

78. La metafísica indeterminista

La tarea del científico de la Naturaleza es buscar leyes que le permitan deducir predicciones; y es posible dividir esta tarea en dos partes: por un lado, tendrá que intentar descubrir leyes que le permitan deducir predicciones aisladas (leyes «causales» o «deterministas», o «enunciados precisos»); por el otro, ha de tratar de proponer hipótesis acerca de frecuencias —esto es, leyes que afirmen probabilidades— con objeto de deducir predicciones frecuenciales. No existe nada en estas dos tareas que las haga mutuamente incompatibles en ningún respecto: sin duda alguna, no ocurre que siempre que presentemos enunciados precisos no debamos hacer hipótesis frecuenciales, pues —como hemos visto— a algunos de aquéllos corresponden macro-leyes deductibles de asunciones frecuenciales; ni tampoco ocurre que siempre que haya enunciados frecuenciales perfectamente confirmados en un campo particular, estemos autorizados a concluir que en dicho campo *no se puedan proponer enunciados precisos*. Esta situación parece perfectamente clara, y, sin embargo, la segunda de las conclusiones que acabamos de rechazar se ha propugnado repetidamente: una y otra vez nos encontramos con la creencia de que donde rige lo fortuito la regularidad está excluida (en el apartado 69 he estudiado esta creencia desde un punto de vista crítico).

A juzgar por el estado actual del desarrollo científico, no será fácil superar el dualismo de las macro-leyes y las micro-leyes —quiero decir, el hecho de que operemos con ambas—. Lo que, sin embargo, *podría ser lógicamente posible es una reducción de todos los enunciados precisos conocidos a enunciados frecuenciales* (interpretándolos como macro-leyes). Pero la reducción contraria no es posible: los enunciados frecuenciales no pueden deducirse jamás de los otros, como hemos visto en el apartado 70; necesitan partir de asunciones propias que tienen que ser específicamente estadísticas; sólo es posible calcular probabilidades a partir de estimaciones probabilitarias *[1].

Esta es la situación lógica; no favorece ni una tesis determinista ni una indeterminista. Y si llegara el momento en que fuese posible trabajar en la física con enunciados frecuenciales exclusivamente, entonces seguiríamos sin estar autorizados a sacar conclusiones indeterministas: es decir, que no lo estaríamos para afirmar que «no existen leyes precisas en la Naturaleza, ninguna ley de la que puedan deducirse predicciones sobre el curso de procesos aislados o elementales». El científico no dejará nunca que nada le impida continuar buscando leyes, ni siquiera las leyes de esta índole; y por mucho éxito que tengamos al operar con estimaciones probabilitarias, no debemos concluir que sea vana la búsqueda de leyes precisas.

Estas reflexiones no constituyen, en modo alguno, aquello a que va a parar el *experimento imaginario descrito en el apartado 77*; todo lo contrario: supongamos que las relaciones de incertidumbre no queden refutadas por dicho experimento (por las razones que sean: porque el *experimentum crucis* detallado en el apéndice VI se decidiera contra la teoría cuántica, digamos); pues incluso en tal caso se las podría contrastar y solamente cabría corroborarlas como enunciados frecuenciales. Así pues, en ningún caso tendríamos derecho a extraer conclusiones indeterministas del hecho de que dichas relaciones estuviesen perfectamente corroboradas *[2].

¿Está gobernado el mundo por leyes estrictas, sí o no? Considero esta pregunta como metafísica. Las leyes que encontramos son siempre hipótesis, lo cual quiere decir que pueden quedar siempre superadas, y que posiblemente puedan deducirse de estimaciones probabilitarias; pero negar la causalidad sería lo mismo que intentar persuadir al teórico de que abandone su búsqueda, y acabamos de hacer ver que semejante intento no puede estar respaldado por demostración de ninguna clase. El llamado «principio de causalidad» o «ley de causalidad», aunque es susceptible de formulación, posee un carácter enteramente diferente de una ley natural; y no puedo estar de acuerdo con Schlick cuando dice que «... la ley de causalidad

---

*[1] Al final de la carta que incluimos en esta obra como apéndice *XII, Einstein se opone a esta tesis; pero sigo considerándola verdadera.

*[2] Continúo creyendo que este análisis es esencialmente correcto: pues no podemos concluir, del éxito de las predicciones frecuenciales acerca de tiradas con una perra chica, que tales tiradas estén indeterminadas. Pero podemos argumentar en favor, digamos, de una tesis metafísica indeterminista, señalando las dificultades y contradicciones que podrían desvanecerse con ella.

puede ser contrastada en cuanto a su verdad *exactamente en el mismo sentido* en que puede serlo cualquier otra ley natural» [1].

La creencia en la causalidad es metafísica *[3]. No es sino una típica hipóstasis metafísica de una regla metodológica perfectamente justificada, a saber, la decisión del científico de no abandonar jamás su búsqueda de leyes. La creencia metafísica en la causalidad, en sus varias manifestaciones, parece ser más fértil que ninguna metafísica indeterminista de la índole defendida por Heisenberg; y —en realidad— podemos percatarnos de que los comentarios de este autor han tenido un efecto paralizador en la investigación: es fácil no caer en la cuenta de relaciones que no habría que buscar muy lejos si se repite incesantemente que la indagación de las mismas «carece de sentido».

Las fórmulas de Heisenberg —como otros enunciados análogos que sólo pueden quedar corroborados por sus consecuencias estadísticas— no conducen necesariamente a conclusiones indeterministas; pero esto no prueba por sí mismo que no pueda existir otro enunciado empírico que justifique esta conclusión u otras parecidas: por ejemplo, la de que la regla metodológica mencionada —la decisión de no abandonar nunca la búsqueda de leyes— no puede cumplir su propósito, por ser fútil, o carente de sentido, o «imposible» (cf. la nota 2 del apartado 12) buscar leyes o predicciones singulares. Pero no puede haber enunciado empírico con consecuencias metodológicas que nos obligue a abandonar la búsqueda de leyes: pues la única forma en que un enunciado que suponemos libre de elementos metafísicos pueda tener conclusiones indeterministas es que éstas sean falsables *[4]; pero, a su vez, sólo es posible mostrar que son falsas si logramos formular leyes, y deducir de éstas predicciones que se corroboren; y, de acuerdo con ello, si suponemos que estas conclusiones indeterministas son *hipótesis empíricas*, deberíamos hacer lo posible por contrastarlas (esto es, por falsarlas), lo cual quiere decir que tendríamos que *buscar* leyes y predicciones. Así pues, no podemos obedecer una ex-

---

[1] SCHLICK, en *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Die Naturwissenschaften* 19, 1931, pág. 155, escribe lo siguiente (cito el pasaje completo; cf. también mis notas 7 y 8 del apartado 4): «Nuestras tentativas de encontrar un enunciado equivalente al principio de causalidad han fracasado: al querer formularlo hemos ido a parar a pseudoenunciados. Este resultado, sin embargo, no nos sorprende en realidad, pues hemos observado antes que es posible contrastar la verdad de la ley de causalidad *en el mismo sentido* que puede serlo la de cualquier otra ley natural; pero ya hemos indicado que cuando se analizan estrictamente estas leyes naturales, no parecen tener, a su vez, el carácter de enunciados que sean verdaderos o falsos, sino que resultan ser nada más que reglas para la (trans-)formación de tales enunciados». Schlick había mantenido ya anteriormente que el principio de causalidad debería colocarse a la par de las leyes naturales; pero como por entonces consideraba que éstas son auténticos enunciados, tenía también al «principio de causalidad ... por una hipótesis contrastable empíricamente». Cf. *Allgemeine Erkenntnislehre* (2.ª ed., 1925), pág. 374.

*[3] Compárense las opiniones expresadas aquí y en el resto de este apartado con el capítulo *IV del *Postscript.*

*[4] Esto, aunque válido *como réplica a un positivista*, tiende a inducir a error: pues un enunciado falsable puede tener todo tipo de consecuencias lógicamente débiles, incluyendo algunas no falsables (cf. el cuarto párrafo del apartado 66).

hortación de abandonar la búsqueda sin repudiar el carácter empírico de estas hipótesis; lo cual hace patente que sería contradictorio pensar que pueda existir ninguna hipótesis empírica que nos obligue a abandonar la búsqueda de leyes.

No pretendo mostrar ahora en detalle cómo tan repetidos intentos de estatuir el indeterminismo revelan un modo de pensar que sólo cabe describir como determinista —en sentido metafísico— (Heisenberg, por ejemplo, pretende dar una explicación causal de por qué son imposibles las explicaciones causales *5); únicamente recordaré al lector los intentos que se han hecho para demostrar que las relaciones de incertidumbre cierran ciertas vías de posible investigación, análogamente a como lo hace el principio de constancia de la velocidad de la luz: se ha interpretado la analogía entre las constantes c y h —la velocidad de la luz y la constante de Planck— diciendo que ambas ponen, en principio, un límite a las posibilidades de investigación; y se han rechazado las cuestiones planteadas al tratar de saltar al otro lado de tales barreras por el conocido método de dejar de lado los problemas indigeribles titulándolos «pseudo»-problemas. En mi opinión, existe realmente una analogía entre las constantes c y h: analogía que —incidentalmente— asegura que la constante h no constituye barrera más firme que la constante c. El principio de la constancia de la velocidad de la luz (y de la imposibilidad de exceder esta velocidad) no nos prohibe buscar velocidades que sean más elevadas que la de la luz, ya que sólo afirma que no encontraremos ninguna con esta característica, es decir, que seremos incapaces de producir señales que se muevan más de prisa que la luz. Y, análogamente, las fórmulas de Heisenberg no deberían interpretarse como si prohibiesen la búsqueda de casos «super puros», ya que afirman solamente que no encontraremos ninguno de ellos, y, en particular, que no podremos producir ninguno. Las leyes que prohiben velocidades mayores que la de la luz y casos «super puros» desafían al investigador —del mismo modo que otros enunciados empíricos— a iniciar la búsqueda de lo prohibido: pues sólo puede contrastar los enunciados empíricos tratando de falsarlos.

Desde un punto de vista histórico, la aparición de la metafísica indeterminista es perfectamente comprensible: durante largo tiempo, los físicos habían tenido fe en una metafísica determinista, y el fracaso de los repetidos intentos de deducir los espectros luminosos —que son efectos estadísticos— de un modelo mecánico del átomo tenía forzosamente que producir una crisis del determinismo (dado que no se comprendía con integridad cuál era la situación desde el punto de vista lógico). Hoy vemos claramente que el fracaso era inevitable, puesto que es imposible deducir leyes estadísticas de un modelo atómico no estadístico (mecánico); pero en aquel entonces (alrededor de 1924, en la época de la teoría de Bohr, Kramers y Slater) no podía sino parecer que las probabilidades reemplazaban a las leyes

*5 Su argumentación, expresada brevemente, es que la causalidad falla debido a nuestra interferencia con el objeto observado: esto es, a cierta interacción causal.

estrictas en el mecanismo de cada uno de los átomos. El edificio determinista se venía abajo, especialmente porque los enunciados probabilitarios se expresaban como enunciados formalmente singulares; de las ruinas del determinismo brotó el indeterminismo, estribado en el principio de incertidumbre de Heisenberg —pero, como hemos visto, a partir de la misma falta de comprensión de los enunciados probabilitarios formalmente singulares.

La lección a sacar de todo esto es que deberíamos esforzarnos por encontrar leyes estrictas —prohibiciones— que puedan fundarse en la experiencia; pero que hemos de abstenernos de promulgar prohibiciones que pongan límites a las posibilidades de investigación.

La corroboración, o de qué forma sale indemne de la contrastación una teoría

Las teorías no son verificables, pero pueden ser «corroboradas».

Se ha hecho a menudo el intento de describir las teorías como algo que no puede ser *verdadero* ni *falso*, sino solamente más o menos *probable*. En especial, la lógica inductiva ha sido elaborada en el sentido de que puede adscribir a los enunciados, no sólo los dos valores de «verdadero» y «falso», sino, asimismo, grados de probabilidad: tipo de lógica que cabe llamar «*lógica probabilitaria*». Según aquéllos que creen en esta lógica, la inducción debería determinar la probabilidad de un enunciado; y habría un principio de inducción que, bien nos *daría la seguridad* de que el enunciado inducido es «probablemente válido», bien nos *daría la probabilidad* que fuese acerca de ello (ya que el principio de inducción podría, a su vez, ser nada más que «probablemente válido»). Pero, en mi opinión, todo el enfoque del problema de la probabilidad de hipótesis es erróneo: en lugar de discutir la «probabilidad» de una hipótesis deberíamos tratar de averiguar qué contrastaciones, qué pruebas ha soportado; esto es, tendríamos que intentar la averiguación de hasta qué punto ha sido capaz de demostrar que es apta para sobrevivir —y ello por haber salido indemne de las contrastaciones —.En resumen, deberíamos disponernos a averiguar en qué medida está «corroborada» *[1].

---

*[1] He introducido en este libro los términos «*corroboración*» («*Bewährung*») y —especialmente— «*grado de corroboración*» («*Grad der Bewährung*», «*Bewährungsgrad*») porque quería tener un término *neutral* con el cual designar el grado en que una hipótesis ha salido indemne de contrastaciones rigurosas, y, por tanto, ha «demostrado su temple». Al calificarlo de «neutral» me refiero a un término que no prejuzgue si al salir indemne la hipótesis se ha hecho «más probable», en el sentido del cálculo de probabilidades. Dicho de otro modo: he introducido el término «grado de corroboración», principalmente con objeto de poder discutir el problema de si dicho «grado» podría identificarse o no con la «probabilidad» (ya sea en el sentido frecuencial o en el de Keynes, por ejemplo).

Carnap tradujo mi término «grado de corroboración» («*Grad der Bewährung*») —que había sido aducido primeramente por mí en las discusiones del Círculo de Viena— por «grado de confirmación» [en ingl., *confirmation*] (véase su «Testability and Meaning», en *Philosophy of Science* 3, 1936, especialmente la pág. 427), con lo cual este término se aceptó prontamente por muchos. A mí no me gustaba, debido a algunas de sus asociaciones («hacer firme», «establecer firmemente», «asentar sin lugar a dudas», «demostrar», «verificar»; y «confirmar» corresponde más de cerca a «*erhärten*» o «*bestätigen*» que a «*bewähren*»); propuse, por tanto, a Carnap (en una carta escrita, creo, hacia 1939) que se empleara el término «corroboración» [en inglés, *corroboration*], que me había sido sugerido por el profesor H. N. Parton. Pero como Carnap declinó mi propuesta, me acomodé al uso, pensando que las palabras no

79. Sobre la llamada verificación de hipótesis

Con frecuencia no se ha parado mientes en el hecho de que las teorías no son verificables. Se dice a menudo que una teoría está verificada cuando se han verificado algunas de las predicciones deducidas de ella; quizá se admita que la verificación no es impecable desde un punto de vista lógico, o que no es posible asentar de un modo definitivo un enunciado asentando unas consecuencias suyas; pero se está dispuesto a ver en tales objeciones el resultado de escrúpulos algo exagerados. Es completamente cierto, se dice, e incluso trivial, que no podemos saber con certeza si el sol saldrá mañana; pero esta incertidumbre puede no tomarse en cuenta: el hecho de que las teorías puedan no solamente mejorarse, sino también *falsarse por nuevos experimentos*, presenta al científico una seria posibilidad que puede actualizarse en cualquier momento, mas hasta ahora nunca ha tenido que considerarse falsada una teoría debido a un fallo súbito de una ley perfectamente confirmada; jamás ocurre que los antiguos experimentos den un día resultados nuevos; lo único que pasa es que unos experimentos nuevos se colocan enfrente de la antigua teoría. Esta, incluso cuando queda superada, suele conservar su validez como una especie de caso límite de la nueva: aún es aplicable, al menos con bastante aproximación, en los casos en que antes tenía éxito. Brevemente dicho: las regularidades contrastables directamente por medio de experimentos no cambian. Admitimos, sin duda, que es concebible —o lógicamente posible— que cambien, pero esta posibilidad no se tiene en cuenta en la ciencia empírica y no afecta a sus métodos: por el contrario, el método científico presupone *la inmutabilidad de los procesos naturales*, o el «principio de la uniformidad de la Naturaleza».

Pueden decirse varias cosas en favor de los argumentos anteriores, pero hay que hacer constar que éstos no afectan a mi tesis: expresan la fe metafísica en la existencia de regularidades en nuestro mundo (fe que comparto, y sin la cual es difícil de concebir la actuación práctica) *[1]; pero la cuestión que se nos presenta —la que hace significativa en el contexto actual la inverificabilidad de las teorías— se encuentra en un plano totalmente distinto. Conforme a mi actitud con respecto a otras cuestiones metafísicas, me abstendré de argumentar a favor o en contra de la fe en la existencia de regularidades en nuestro mundo; pero trataré de hacer patente que *la inverificabilidad*

---

tenían importancia: y de este modo llegué a emplear el término «confirmación» durante cierto tiempo en diversas publicaciones.

Pero resultó que me había equivocado: desgraciadamente, las asociaciones de la palabra «confirmación» tenían importancia y se habían hecho sentir; de suerte que pronto se utilizó el término «grado de confirmación» —por Carnap mismo— como sinónimo (o «explicans») de «probabilidad». Por ello lo he abandonado en favor de «grado de corroboración». (Véanse también el apéndice *IX y el apartado *29 de mi *Postscript.)*

*[1] Cf. el apéndice *X y, asimismo, el apartado *15 de mi *Postscript.*

de las teorías tiene importancia metodológica; y éste es el plano en que me opongo al razonamiento propuesto.

Por consiguiente, consideraré pertinente sólo uno de los puntos expresados: la referencia al llamado «principio de la uniformidad de la Naturaleza». Según me parece, este principio expresa de un modo muy superficial una importante regla metodológica —y justamente una que podría deducirse muy ventajosamente de un estudio sobre la inverificabilidad de las teorías *2.

Supongamos que el sol no salga mañana (y que, pese a ello, continuemos viviendo, y, asimismo, tratando de dar alcance a las cuestiones científicas que nos interesan). Si tal cosa ocurriera, la ciencia tendría que *explicarla*, esto es, que deducirla de leyes; posiblemente habría que revisar de un modo drástico las teorías actuales; pero las teorías revisadas no tendrían que dar razón meramente de la nueva situación: *también habrían de ser deducibles de ellas nuestras experiencias anteriores.* Desde el punto de vista metodológico se ve que el principio de la uniformidad de la Naturaleza está remplazado por el postulado de la *invariancia de las leyes naturales*, tanto con respecto al espacio como al tiempo. A mi entender, pues, sería un error afirmar que las regularidades naturales no cambian (y éste sería un tipo de enunciado tal, que no cabe argumentar ni a su favor ni en contra suya); diríamos más bien que es parte de nuestra *definición* de las leyes naturales, si postulamos que éstas han de ser invariantes en el espacio y el tiempo, y si postulamos, además, que no han de tener excepciones. Así pues, la posibilidad de falsar una ley corroborada no carece, en modo alguno, de importancia desde un punto de vista metodológico: nos ayuda a encontrar lo que exigimos a las leyes naturales y esperamos de ellas. Y, a su vez, el «principio de la uniformidad de la Naturaleza» puede considerarse como una interpretación metafísica de una regla metodológica (como su pariente cercana, la «ley de causalidad»).

Si se intenta reemplazar los enunciados metafísicos de esta índole por principios del método, se llega al «principio de inducción», que, según se supone, gobierna el método inductivo —y, por ello, el de verificación de las teorías—. Pero esta tentativa fracasa, ya que el principio de inducción es en sí mismo de carácter metafísico: como he señalado en el apartado 1, el supuesto de que este principio sea empírico conduce a una regresión infinita. Por consiguiente, podría introducírsele solamente como proposición primitiva (o postulado, o axioma); lo cual tal vez no tendría demasiada importancia si no fuese porque en todo caso habría de considerársele un *enunciado infalsable.* Pues si este principio —que se supone da validez a la inferencia de teorías— fuera falsable a su vez, quedaría falsado al mismo tiempo que la primera teoría falsada, ya que ésta sería una conclusión deducida valiéndose del principio de inducción: y éste, como premisa,

---

*2 Me refiero a la regla de que todo sistema nuevo de hipótesis ha de dar lugar a las regularidades ya conocidas y corroboradas (o sea, ha de explicarlas). Véase también el apartado *3 (párrafo tercero) de mi *Postscript.*

quedaría, desde luego, falsado, en virtud del *modus tollens*, siempre que una teoría derivada de él resultase falsada *3. Pero esto quiere decir que un principio de inducción falsable quedaría falsado de nuevo con cada progreso de la ciencia. Sería necesario, pues, introducir un principio de inducción que no fuese falsable: lo cual equivaldría a la equivocada noción de un enunciado sintético válido *a priori*, esto es, de un enunciado irrefutable acerca de la realidad.

Así pues, si tratamos de convertir nuestra fe metafísica en la uniformidad de la Naturaleza y en la verificabilidad de las teorías en una teoría del conocimiento basada en la lógica inductiva, abocamos en el dilema de elegir entre una regresión infinita y el *apriorismo*.

80. Probabilidad de una hipótesis y probabilidad de eventos: crítica de la lógica probabilitaria

Incluso si se admite que las teorías nunca quedan verificadas de un modo definitivo, ¿no podemos conseguir que sean seguras en mayor o menor grado, es decir, más o menos probables? Después de todo, quizá sería posible reducir la cuestión de la *probabilidad de una hipótesis* a la de la *probabilidad de eventos*, digamos, y de esta forma podría hacérsela susceptible de tratamiento matemático y lógico *1.

Del mismo modo que la lógica inductiva en general, la teoría de la probabilidad de hipótesis parece haber surgido gracias a una confusión de cuestiones psicológicas y lógicas. Reconozco, desde luego, que nuestros sentimientos subjetivos de convicción tienen diferentes intensidades, y que el grado de confianza con que esperamos que se cumpla una predicción y que luego se corrobore una hipótesis dependerá, probablemente —entre otras cosas—, del modo en que dicha hipótesis haya salido indemne de las contrastaciones hasta el momento: o sea, de su corroboración anterior. Pero hasta los creyentes en la lógica probabilitaria reconocen que estas cuestiones psicológicas no pertenecen a la epistemología ni a la metodología *2; sin embargo, razonan que es posible —basándose en decisiones inductivistas— adscribir grados de probabilidad a *las hipótesis mismas*, y, además, que cabe reducir este concepto al de la probabilidad de eventos.

La probabilidad de hipótesis suele considerarse un mero caso especial del problema general de la *probabilidad de un enunciado*, al que, a su vez, se tiene por el problema de la *probabilidad de un even-*

*3 Según la tesis inductivista que aquí estudio, las premisas para la deducción de la teoría consistirían en el principio de inducción y los enunciados de observación. Pero se supone tácitamente que estos últimos son inamovibles y reproducibles, de modo que no puede hacérseles responsables del fracaso de la teoría.

*1 El presente apartado contiene principalmente una crítica de la tentativa (de Reichenbach) de interpretar *la probabilidad de hipótesis* a base de *una teoría frecuencial de la probabilidad de eventos*. En el apartado 83 está incluida una crítica de la posición de Keynes.

*2 Aludo aquí más a la escuela de Reichenbach que a la de Keynes.

to, y nada más, sólo que expresado en una terminología especial. Así, leemos en Reichenbach, por ejemplo: «El que atribuyamos probabilidad a enunciados o a eventos es solamente una cuestión de terminología. Hasta ahora habíamos considerado la asignación de la probabilidad 1/6 a que salga una cara determinada de un dado como un caso de la probabilidad de eventos; pero podríamos decir exactamente igual que aquello a lo que se asigna la probabilidad 1/6 es al *enunciado* 'saldrá la cara marcada con 1'» [1].

Puede quizá llegar a entenderse mejor esta identificación de la probabilidad de eventos con la de enunciados, si recordamos lo dicho en el apartado 23. Allí definíamos el concepto de «evento» como una clase de enunciados singulares; y, por tanto, estará permitido hablar de la *probabilidad de enunciados* en vez de la probabilidad de eventos. Por tanto, podemos mirar tal sustitución como un simple cambio de terminología: las sucesiones de referencia se interpretan como sucesiones de enunciados. Si consideramos representada por enunciados una «alternativa» —o, mejor, sus elementos—, podemos describir el que salga cara por el enunciado «k es cara», y lo contrario por la negación de este enunciado; de este modo, obtenemos una sucesión de enunciados de la forma p_j, p_k, p_l, p_m, p_n, ..., en la que a veces un enunciado p_i está caracterizado como «verdadero», y otras (en las que se coloca una raya sobre él) como «falso». Por tanto, la probabilidad dentro de una alternativa puede interpretarse como *la «frecuencia veritativa»* [2] *relativa de los enunciados dentro de una sucesión de enunciados* (en lugar de la frecuencia relativa de una propiedad).

Si nos place, podemos llamar «probabilidad de enunciados» o «probabilidad de proposiciones» al concepto de probabilidad transformado de este modo; y cabe hacer patente una conexión muy estrecha entre este concepto y el de «verdad»: pues si hacemos cada vez más corta la sucesión de enunciados, de modo que finalmente no contenga más que un solo elemento —esto es, *un* enunciado *aislado*—, entonces la probabilidad (o frecuencia veritativa) de la sucesión puede únicamente asumir uno de los dos valores 1 y 0, según que el enunciado aislado sea verdadero o falso. Por lo cual se puede considerar la verdad o falsedad de un enunciado como un caso límite de la probabilidad; y, a la inversa, ésta puede considerarse como una generalización del concepto de verdad, dado que incluye a este último como caso límite. Finalmente, cabe definir las operaciones con frecuencias veritativas de tal suerte que las operaciones veritativas de la lógica clásica se conviertan en casos límites de aquellas operaciones; y puede llamarse «*lógica probabilitaria*» al cálculo con las mismas [3].

---

[1] REICHENBACH, *Erkenntnis* 1, 1930, págs. 171 y sig.

[2] Según Keynes —en *A Treatise on Probability* (1921), págs. 101 y sigs.— la expresión «frecuencia veritativa» [en ingl., *truth-frequency*] se debe a Whitehead; cf. la próxima nota.

[3] Doy aquí un esbozo de la construcción de la lógica probabilitaria elaborada por Reichenbach (*Wahrscheinlichkeitslogik, Sitzungsberichte der Preussischen Akade-*

Pero, ¿podemos realmente identificar la *probabilidad de hipótesis* con la probabilidad de enunciados que acabamos de definir, y, por tanto, indirectamente, con la de eventos? Creo que estas identificaciones son el resultado de una confusión. La idea de que se parte es la de que la probabilidad de hipótesis debe encuadrarse bajo el rótulo de «probabilidad de enunciados» —*en el sentido que se acaba de definir*—, por tratarse, sin duda alguna, de un tipo de probabilidad de un enunciado; pero esta conclusión resulta ser injustificada, y de ahí que esta terminología sea completamente inadecuada. Tal vez, en resumidas cuentas, lo mejor sería no emplear nunca la expresión «probabilidad de enunciados» si nos queremos referir a la probabilidad de eventos [*3].

Sea esto como fuere, afirmo que las consideraciones basadas en la lógica probabilitaria no rozan siquiera los temas que surgen a partir del concepto de una *probabilidad de hipótesis;* y que si alguien dice de una hipótesis que no es verdadera, sino «probable», entonces este enunciado, bajo *ningunas* circunstancias puede traducirse por otro acerca de la probabilidad de eventos.

Pues si se intenta reducir la idea de probabilidad de hipótesis a la de frecuencia veritativa —que emplea el concepto de sucesión de enunciados—, se encuentra uno frente a frente con la siguiente cuestión: *¿con referencia a qué sucesión* de enunciados puede asignarse un valor probabilitario a una hipótesis? Reichenbach identifica la misma «aserción de la ciencia natural» —con lo cual quiere decir una hipótesis científica— con una sucesión de referencia de enunciados: dice, «... las aserciones de la ciencia natural —que no son nunca enunciados singulares— son, en realidad, sucesiones de enunciados, a las cuales, hablando rigurosamente, no hemos de asignar el grado de probabilidad 1, sino otro más pequeño; por tanto, solamente la lógica probabilitaria nos proporciona la forma lógica capaz de representar el concepto de conocimiento propio de la ciencia natural» [4]. Tratemos ahora de seguir la sugerencia de que las hipótesis mismas son sucesiones de enunciados. Una forma de interpretar esto sería tomar como elementos de tal sucesión a los diversos enunciados singulares que pueden estar en contradicción con la hipótesis, o conformes

---

mie der Wissenschaften, Physik.-mathem., Klasse **29**, 1932, págs. 476 y sigs.), que sigue a E. L. Post (*American Journal of Mathematics* **43**, 1921, pág. 184) y, al mismo tiempo, la teoría frecuencial de Von Mises. La forma de Whitehead de la teoría frecuencial, de que trata Keynes, en *op. cit.*, págs. 101 y sigs., es parecida.

*3 Sigo pensando: *a)* que la llamada «probabilidad de hipótesis» no puede ser interpretada por una frecuencia veritativa; *b)* que es mejor llamar «probabilidad de un evento» a una probabilidad que esté definida por una frecuencia relativa (ya sea una frecuencia veritativa o la frecuencia de un evento); y *c)* que la llamada «probabilidad de una hipótesis» —en el sentido de su aceptabilidad— *no* es un caso especial de la «probabilidad de enunciados». Y ahora consideraría esta última como una interpretación (la interpretación lógica) entre las diversas posibles del cálculo de probabilidades formal, mejor que una frecuencia veritativa. (Cf. los apéndices *II, *IV y *IX, y mi *Postscript.)*

4 REICHENBACH, *Wahrscheinlichkeitslogik* (*op. cit.*, pág. 488), pág. 15 de la reimpresión.

con ella; entonces la probabilidad de dicha hipótesis estaría determinada por la frecuencia veritativa de los enunciados contenidos en la misma que estuvieran de acuerdo con ella. ¡Pero entonces la hipótesis adquiriría la probabilidad 1/2 si, por término medio, la refutase un enunciado singular de esta sucesión sí y otro no! Con objeto de eludir esta conclusión devastadora podemos ensayar otros expedientes *4. Atribuiríamos a la hipótesis cierta probabilidad —quizá una no muy precisa— basándonos en una estimación que hiciésemos de la razón de todas las contrastaciones superadas por ella a las que aún no se han llevado a cabo. Pero este camino no lleva a ninguna parte, pues lo que ocurre es que es posible calcular semejante estimación de modo absolutamente preciso: y el resultado es siempre que la probabilidad es cero. Finalmente, podríamos tratar de apoyar nuestra estimación en la razón entre las contrastaciones que llevan a un resultado favorable y las que conducen a uno indiferente, esto es, las que no dan lugar a una decisión clara (con lo cual podríamos verdaderamente obtener algo que se parecería a la sensación subjetiva de confianza con que el experimentador mira sus resultados). Pero tampoco valdría este último expediente, incluso si no tenemos en cuenta el hecho de que con semejante tipo de estimación nos desviaríamos sobremanera del concepto de frecuencia veritativa y del de probabilidad de eventos (pues estos conceptos se basan en la razón de los enunciados verdaderos a los falsos, y —como es natural— no hemos de igualar un enunciado indiferente con uno objetivamente falso); la razón del fracaso de esta última tentativa es que la definición que hemos sugerido convertiría la probabilidad de una hipótesis en algo tan subjetivo que echaría todo a perder: dependería más de los conocimientos y la habilidad del experimentador que de resultados objetivamente reproducibles y contrastables.

Pero entiendo que es enteramente imposible aceptar la sugerencia de que haya que tomar una hipótesis por una sucesión de enunciados. Sería posible tal cosa si los enunciados universales tuviesen la forma, «para todo valor de k es verdadero que en el lugar k ocurre esto y lo otro»: entonces podríamos considerar los enunciados básicos (aquéllos que estuvieran en contradicción o en conformidad con el enunciado universal) como elementos de una sucesión de enunciados —que sería la que habría que tomar como enunciado universal—. Pero, según hemos visto (cf. los apartados 15 y 28), los enunciados universales no poseen tal forma: los enunciados básicos no son jamás deductibles de enunciados universales solos *5, y, por ello, estos últi-

*4 Asumo aquí que para entonces ya nos hemos decidido a atribuir la probabilidad cero a la hipótesis siempre que haya una falsación neta, de modo que nuestra discusión se limita a los casos en que no se ha llegado a una falsación tajante.

*5 Según he explicado más arriba, en el apartado 28, los enunciados singulares que *pueden* deducirse de una teoría —o sea, los «enunciados ejemplificadores»— no tienen el carácter de enunciados básicos ni el de enunciados de observación. Mas si, a pesar de ello, decidimos adoptar la sucesión de aquellos enunciados y basar nuestra probabilidad sobre la frecuencia veritativa dentro de ella, entonces la probabilidad será siempre igual a 1, por frecuentemente que la teoría pueda quedar falsada: ya mos no pueden considerarse como sucesiones de aquéllos. Mas si pretendemos tomar en consideración la sucesión de aquellas negaciones de enunciados básicos que *sean* deductibles de enunciados universales, entonces la estimación de *toda* hipótesis coherente conduciría a la misma probabilidad, a saber, 1; pues, en tal caso, habríamos de tener en cuenta la razón entre los enunciados básicos negados *no falsados* que pueden deducirse (o bien otros enunciados deductibles) y los *falsados;* lo cual quiere decir que, en lugar de considerar una frecuencia de verdad, tendríamos que atender al valor complementario de una frecuencia de falsedad: pero este valor sería igual a la unidad, ya que tanto la clase de los enunciados deductibles como, incluso, la clase de las negaciones —deductibles— de enunciados básicos, son infinitas; y, por otra parte, no puede haber más que un número finito de enunciados básicos falsadores aceptados. Así pues, aun en caso de que no tengamos en cuenta el hecho de que los enunciados universales no son nunca sucesiones de enunciados, y de que hasta tratemos de interpretarlos como una cosa de esta índole y de coordinarlos con sucesiones de enunciados singulares completamente decidibles, no llegamos a conseguir un resultado aceptable.

Tenemos que examinar todavía otra posibilidad —enteramente diferente —de explicar la probabilidad de una hipótesis a base de sucesiones de enunciados. Puede recordarse que hemos llamado «probable» a un acontecimiento singular dado (en el sentido de un «enunciado probabilitario formalmente singular») si es un *elemento de una sucesión* de acontecimientos que tienen cierta probabilidad; podría intentarse análogamente llamar «probable» a una hipótesis si es un *elemento de una sucesión de hipótesis* con una frecuencia veritativa determinada. Pero esta tentativa vuelve a fracasar —independientemente de la dificultad de establecer la sucesión de referencia (que puede elegirse de muchas maneras: cf. el apartado 71)—, pues no podemos hablar de una frecuencia veritativa dentro de una sucesión de hipótesis, por el simple hecho de que no podemos saber nunca si una hipótesis es verdadera: si *pudiéramos* saberlo, apenas necesitaríamos para nada el concepto de probabilidad de una hipótesis. Ahora podemos intentar, como hemos hecho más arriba, tomar como punto de partida el complemento de la frecuencia falsitativa dentro de una sucesión de hipótesis. Pero si, digamos, definimos la probabilidad de una hipótesis valiéndonos de la razón de las hipótesis de la sucesión no falsadas a las falsadas, entonces —lo mismo que antes— la probabilidad de *toda* hipótesis dentro de *toda* sucesión de referencia *infinita* ha de ser igual a 1. E incluso si elegimos una sucesión de referencia *finita* no nos encontramos en mejor situación: pues supongamos que, de acuerdo con este procedimiento, podamos atri-

que, como se ha hecho ver en el apartado 28, nota *1, casi toda teoría resulta «verificada» en casi todos los casos (esto es, en casi todos los lugares k). El estudio que se encuentra a continuación en el texto contiene una argumentación muy parecida —también apoyada en los «enunciados ejemplificadores» (o sea, en enunciados básicos negados)— que trata de hacer patente que si se basa la probabilidad de una hipótesis en dichos enunciados básicos negados, siempre será igual a la unidad.

buir a los elementos de cierta sucesión de hipótesis *(finita)* un grado de probabilidad comprendido entre 0 y 1, por ejemplo, el valor 3/4; podremos hacer esto si llegamos a informarnos de que tal o cual hipótesis de la sucesión ha quedado falsada; pero entonces, en la medida en que estas hipótesis *falsadas* son elementos de la sucesión, hemos de adscribirles —*debido a la información obtenida*— no el valor 0, sino 3/4; y, en general, la probabilidad de una hipótesis habría de decrecer en $1/n$ a consecuencia de la información de que es falsa (en donde n es el número de hipótesis de la sucesión de referencia). Todo esto contradice de un modo palmario el programa, que nos habíamos propuesto, de expresar por medio de una «*probabilidad de hipótesis*» el grado de seguridad o confianza que tendríamos que atribuir a una hipótesis a la vista de los datos que la apoyan o la quebrantan.

Con lo cual me parece que quedan agotadas las posibilidades de basar el concepto de probabilidad de una hipótesis en el de frecuencia de enunciados verdaderos (o en el de frecuencia de enunciados falsos), y, por tanto, en la teoría frecuencial de la probabilidad de eventos *6.

---

*6 Las tentativas que acabo de hacer para dar un sentido a la aserción algo enigmática de Reichenbach de que la probabilidad de una hipótesis ha de medirse por una frecuencia veritativa, podrían resumirse como sigue. (Véase un resumen análogo, con crítica, en el penúltimo párrafo del apéndice *I.)

Como primera aproximación, podemos explorar dos modos posibles de definir la probabilidad de una teoría. Uno es el de contar el número de enunciados contrastables experimentalmente que pertenecen a dicha teoría, y de determinar la frecuencia relativa de los que resultan ser verdaderos: podemos tomar esta frecuencia como medida de la probabilidad pedida, y la llamaremos *probabilidad del primer tipo*. En segundo lugar, cabe considerar la teoría en cuestión como elemento de una clase de entidades ideales —digamos, de teorías propuestas por otros científicos— y determinar entonces las frecuencias relativas dentro de esta clase: a lo cual podríamos llamar *probabilidad del segundo tipo*.

En el texto he tratado de hacer ver, además, que ambos modos posibles de dar sentido a la idea de Reichenbach de la frecuencia veritativa llevan a resultados que han de ser enteramente inaceptables para los que se adhieran a la teoría probabilitaria de la inducción.

Reichenbach ha replicado a mis críticas, pero no tanto defendiendo sus tesis cuanto atacando las mías: en su trabajo sobre mi libro *(Erkenntnis* 5, 1935, páginas 267-284) ha dicho que «los resultados del libro son completamente insostenibles», lo cual ha explicado diciendo que se había malogrado mi «método», esto es, que no había logrado «sacar todas las consecuencias» de mi sistema conceptual.

El apartado IV del trabajo que acabo de citar (págs. 274 y sig.) está dedicado a nuestro problema. Y comienza así: «A este respecto, pueden añadirse algunas observaciones acerca de la probabilidad de teorías —observaciones que deberían servir para completar mis comunicaciones sobre este asunto, hasta ahora en exceso sucintas, y que quizá puedan disipar cierta obscuridad que todavía rodea esta cuestión». A lo cual sigue un pasaje que forma el segundo párrafo de la presente nota, párrafo encabezado con las palabras «como primera aproximación» (las únicas que he añadido al texto de Reichenbach).

Reichenbach ha callado sobre el hecho de que su tentativa de disipar «la obscuridad que todavía rodea esta cuestión» no es sino un resumen —sólo una primera aproximación, lo reconozco— de ciertas páginas del mismo libro que estaba atacando. Mas, pese a su silencio, me parece que puedo considerar como un gran cumplido de un escritor tan experimentado acerca de la probabilidad (que en la época en que escribía

A mi entender, hemos de considerar la tentativa de identificar la probabilidad de una hipótesis con la probabilidad de eventos como un completo fracaso. Esta conclusión es enteramente independiente de si aceptamos la pretensión (de Reichenbach) de que *todas las hipótesis de la física* no son, «en realidad», o «cuando se las estudia detalladamente», sino enunciados probabilitarios (acerca de ciertas frecuencias medias dentro de sucesiones de observaciones, en las que siempre se observan desviaciones con respecto a un valor medio), o de si nos sentimos inclinados a establecer una distinción entre dos *tipos* diferentes de leyes naturales: las leyes «deterministas» o «precisas», por un lado, y las «leyes probabilitarias» o «hipótesis frecuenciales», por otro. Pues ambos tipos son asunciones hipotéticas que nunca pueden hacerse «probables» a su vez: lo único que pueden hacer es quedar corroboradas, en el sentido de que pueden «demostrar su temple» bajo el fuego (el fuego de nuestras contrastaciones).

¿Cómo explicaremos el hecho de que los creyentes en la lógica probabilitaria han llegado a la tesis opuesta? ¿Dónde se oculta el error cometido por Jeans cuando escribe —al principio en un sentido con el que puedo estar completamente de acuerdo— que «... no sabemos nada... *con seguridad*» y continúa: «En el mejor de los casos podemos tratar tan sólo de *probabilidades;* [y] las predicciones de la nueva teoría cuántica se encuentran en tanta conformidad [con las observaciones], que la verosimilitud de que este esquema tenga cierta correspondencia con la realidad es *enorme:* en realidad, podemos decir que es *casi seguro* que sea cuantitativamente verdadero...»? [5].

Sin duda alguna, el error más corriente consiste en creer que las estimaciones hipotéticas de frecuencias —esto es, las hipótesis acerca de las probabilidades— pueden ser, a su vez, solamente probables; o —dicho de otro modo— en atribuir a las *hipótesis probabilitarias* cierto grado de una supuesta *probabilidad de hipótesis.* Podemos llegar a construir un argumento muy persuasivo en favor de esta errónea conclusión si recordamos que las hipótesis acerca de las probabilidades no son verificables ni falsables, en lo que a su forma lógica se refiere, e independientemente de nuestro requisito metodológico de falsabilidad (cf. los apartados 65 a 68): no son verificables por ser enunciados universales, y tampoco estrictamente falsables debido a que nunca pueden contradecirlas enunciados básicos algunos. Son, pues (según lo expresa Reichenbach), *completamente indecidibles* [6].

---

su réplica a mi libro tenía en su haber dos libros y alrededor de una docena de trabajos sobre tal materia), que aceptara los resultados de mis intentos de «sacar las consecuencias» de sus «comunicaciones sobre el asunto, en exceso sucintas». Según creo, este éxito de mis intentos se ha debido a una regla de «método»: la de que deberíamos tratar siempre de aclarar y robustecer todo lo posible la posición de nuestro contrincante antes de criticarla, si queremos que nuestra crítica tenga valor.

[5] Jeans, *The New Background of Science* (1934), pág. 58 [vers. cast., pág. 54 *(T.)*]. (Sólo las palabras «con seguridad» figuran en cursiva en el texto de Jeans.)

[6] Reichenbach, *Erkenntnis* 1, 1930, pág. 169 (cf., asimismo, la contestación de Reichenbach a mi nota en *Erkenntnis* 3, 1933, págs. 426 y sig.). Con muchísima

Ahora bien, como hemos tratado de mostrar, pueden *estar mejor o peor «confirmadas»*, es decir, pueden estar de mayor o menor acuerdo con los enunciados básicos aceptados: y éste es el punto en que, según puede parecer, entra la lógica probabilitaria. La simetría entre la verificabilidad y la falsabilidad aceptada por la lógica inductivista clásica sugiere la creencia en que ha de ser posible coordinar tales enunciados probabilitarios «indecidibles» con cierta escala de grados de validez, algo así como «grados continuos de probabilidad, cuyos límites superior e inferior, inalcanzables, son la verdad y la falsedad»[7] (por citar de nuevo a Reichenbach). Sin embargo, según mi tesis, los enunciados probabilitarios, precisamente por ser completamente indecidibles, son *metafísicos* —a menos que nos decidamos a hacerlos falsables aceptando una regla metodológica—; por tanto, el sencillo resultado de su infalsabilidad no es que puedan estar mejor o peor corroborados, sino que *no pueden estar corroborados empíricamente en medida alguna:* pues, de otro modo —y teniendo en cuenta que no excluyen nada y que, por ello, son compatibles con todo enunciado básico—, podría decirse que estaban «corroborados» por *todo enunciado básico arbitrariamente elegido* (de un grado de composición cualquiera), con tal de que describiera un acontecimiento pertinente.

Creo que la física sólo emplea los enunciados probabilitarios del modo que he estudiado extensamente al tratar de la teoría de la probabilidad; y, más en particular, que utiliza las asunciones probabilitarias como enunciados falsables, exactamente lo mismo que hace con las demás hipótesis. Pero rehusaría participar en ninguna discusión acerca de cómo proceden, «en realidad», los físicos, ya que ello tendrá que ser siempre, en gran medida, una cuestión de interpretación.

Tenemos aquí un ejemplo bastante claro del contraste entre mi tesis y lo que he llamado en el apartado 10 la tesis «naturalista»: puede hacerse ver, en primer término, la coherencia lógica interna de mi teoría, y, en segundo, que está libre de las dificultades que cercan a otras. Reconozco, naturalmente, que es imposible demostrar que mi tesis sea exacta, y que, probablemente, sería fútil una controversia con quienes mantienen otra lógica de la ciencia: todo lo que cabe poner de manifiesto es que el modo en que abordo este problema particular es consecuencia de la concepción de la ciencia que he estado defendiendo [*7].

---

frecuencia se encuentran ideas parecidas acerca de los grados de probabilidad o de certidumbre del conocimiento inductivo (cf., por ejemplo, RUSSELL, *Our Knowledge of the External World*, 1926, págs. 225 y sig., y *The Analysis of Matter*, 1927, páginas 141 y 398 [vers. cast. por E. MELLADO, *Análisis de la materia*, Madrid, Revista de Occidente, págs. 143 y 401 *(T.)*].

[7] REICHENBACH, *Erknntnis* 1, 1930, pág. 186 (cf. la nota 4 del apartado 1).

[*7] Los dos últimos párrafos los provocó la actitud «naturalista» adoptada a veces por Reichenbach, Neurath y otros; cf., más arriba, el apartado 10.

81. Lógica inductiva y lógica probabilitaria

No es posible reducir la probabilidad de hipótesis a la de eventos: ésta es la conclusión que surge del examen llevado a cabo en el apartado anterior. Pero, ¿no podría llevar un modo distinto de enfrentarse con la cuestión a una definición satisfactoria de la idea de una *probabilidad de hipótesis?*

No creo que sea factible un concepto de esta última que pueda interpretarse en el sentido de que exprese el «grado de validez» de la hipótesis, de un modo análogo a como ocurre con los de «verdadero» y «falso» (y que, además, se encuentre en una relación suficientemente estrecha con el concepto de «probabilidad objetiva» —esto es, de frecuencia relativa— como para justificar el empleo de la palabra «probabilidad») [1]. Sin embargo, adoptaré con fines dialécticos la *suposición* de que se haya construido realmente semejante concepto, de suerte que se pueda plantear la cuestión sobre de qué modo afectaría tal cosa al problema de la inducción.

Supongamos que se ha reconocido que cierta hipótesis —digamos, la teoría de Schrödinger— es «probable» en un sentido determinado: ya sea «probable en este o aquel grado numérico» o meramente «probable», sin especificar grado. Podemos llamar *evaluación* de la teoría de Schrödinger al enunciado que la describe como «probable».

Desde luego, una evaluación tiene que ser un enunciado sintético —una aserción acerca de la realidad— del mismo modo que lo serían los enunciados «la teoría de Schrödinger es verdadera» y «la teoría de Schrödinger es falsa». Es evidente que todos ellos dicen algo acerca de la adecuación de la teoría, y que, por tanto, sin duda alguna, no son tautológicos [*1]: dicen que una teoría es adecuada o inadecuada,

---

[1] (Añadida en la corrección de pruebas.) Cabe concebir que se encontrara un sistema formal para estimar grados de corroboración que exhibiese analogías formales —limitadas— con el cálculo de probabilidades (por ejemplo, con el teorema de Bayes), pero que, sin embargo, no tuviera nada en común con la teoría frecuencial (debo al doctor J. Hosiasson la sugerencia de esta posibilidad); no obstante lo cual, estoy plenamente convencido de que es imposible abordar *el problema de la inducción* por tales métodos con esperanza alguna de éxito. * Véase también la nota 3 del apartado *57 de mi *Postscript.*

* A partir de 1938 he abandonado la opinión de que tendríamos que mostrar que se satisfacen los axiomas del cálculo formal de probabilidades —incluyendo, naturalmente, el teorema de Bayes— «*para justificar el empleo de la palabra probabilidad*», como digo en el texto (cf. los apéndices *II a *V, y, en especial, el apartado *28 de mi *Postscript);* en cuanto a las analogías entre el teorema de Bayes, que se refiere a la *probabilidad*, y ciertos teoremas sobre el *grado de corroboración*, véanse el apéndice *IX —punto 9 (VII) de la «primera nota»— y los puntos 12) y 13) del apartado *32 del *Postscript.*

[*1] El enunciado probabilitario «$p(S, d) = r$», o, expresado lingüísticamente, «con los datos d, la teoría de Schrödinger tiene la probabilidad r» —que es un enunciado de lógica probabilitaria relativa o condicional—, puede ser, sin duda alguna, tautológico (con tal de que los valores de d y r se escojan de modo que se correspondan mutuamente: así, si d consta exclusivamente de informes de observaciones, r tendrá que ser igual a cero en un universo suficientemente grande); pero la «evaluación», en el sentido que damos nosotros a esta palabra, tendría que tener una forma diferente

o que tiene cierto grado de adecuación. En segundo lugar, toda evaluación de la teoría de Schrödinger ha de ser un enunciado sintético *inverificable*, exactamente lo mismo que la teoría misma: pues la «probabilidad» de una teoría —esto es, la probabilidad de que ésta continúe siendo aceptable— no puede deducirse *de un modo definitivo* de enunciados básicos, como es patente. Nos vemos obligados a preguntar, pues: ¿cómo puede justificarse una evaluación?; ¿cómo puede contrastársela? (con lo cual surge de nuevo el problema de la inducción: véase el apartado 1).

En cuanto a la evaluación misma, podríamos afirmar que es «verdadera» o que es, a su vez, «probable». Si se la considera «verdadera» tiene que ser un *enunciado sintético verdadero* que no ha sido verificado empíricamente, esto es, un enunciado sintético verdadero *a priori;* y si se la toma como «probable», necesitamos una *nueva* evaluación, como si dijéramos una evaluación de la evaluación, y, por tanto, una evaluación de orden superior: pero esto quiere decir que estamos cogidos en una regresión infinita. La apelación a la probabilidad de la hipótesis es incapaz de mejorar la precaria situación de la lógica inductiva.

La mayoría de los que creen en la lógica probabilitaria sostienen la tesis de que se llega a la evaluación por medio de un «principio de inducción», que adscribe probabilidades a las hipótesis inducidas. Pero si vuelven a atribuir una probabilidad a este principio, entonces continúa el regreso infinito; y si, por el contrario, le atribuyen la «verdad», entonces se enfrentan con el dilema de elegir entre la regresión infinita y el *apriorismo*. «De una vez para siempre —dice Heymans—la teoría de la probabilidad es incapaz de explicar los razonamientos inductivos: pues exactamente el mismo problema que se encuentra latente bajo éstos lo está bajo aquélla (en la aplicación empírica de la teoría de la probabilidad). En ambos casos, la conclu-

---

(véase, más abajo, el apartado 84, y, en especial, el texto correspondiente a la nota *2); por ejemplo, la siguiente: $p_k(S) = r$, en que k sería la fecha de hoy; o bien, con palabras: «la teoría de Schrödinger tiene *hoy* (a la vista de la totalidad de los datos que hoy poseemos) la probabilidad r». Con objeto de llegar a esta aseveración, $p_k(S) = r$, a partir de: I) el enunciado tautológico de probabilidad relativa $p(S, d) = r$, y II) el enunciado «d es la totalidad de los datos de que disponemos hoy», tenemos que aplicar un *principio de inferencia* (que en mi *Postcript* —apartados *43 y *51— llamo «regla de absolución»). Este principio se parece mucho al *modus ponens*, y puede parecer, por ello, que hemos de considerarlo analítico; pero si lo miramos así, equivale a la decisión de entender que p_k está *definido* por I) y II) —o, al menos, que no quiere decir más que I) y II) juntos—, y, en este caso, no es posible aceptar que p_k tenga significación práctica alguna: es *seguro* que no puede ser interpretado como medida práctica de la aceptabilidad. Como mejor se ve esto es considerando que en un universo suficientemente grande, $p_k(t, d) \approx 0$ para *cualquier* teoría universal t, con tal de que d esté formada exclusivamente por enunciados singulares (cf. los apéndices *VII y *VIII); pero no cabe duda de que en la práctica aceptamos unas teorías y rechazamos otras.

Si, por otro lado, interpretamos p_k como *grado de adecuación o de aceptabilidad*, el principio de inferencia mencionado —la «regla de absolución» (que con esta interpretación se convierte en un ejemplo típico de un «principio de inducción»)— es simplemente *falsa*, y por ello —evidentemente— no analítica.

sión va más allá de lo que está dado en las premisas»[2]. Así pues, no se gana nada con sustituir la palabra «verdadero» por «probable», ni la palabra «falso» por «improbable». Sólo si se tiene en cuenta *la asimetría entre verificación y falsación* —la asimetría que procede de la relación lógica existente entre las teorías y los enunciados básicos— es posible evitar las celadas del problema de la inducción.

Los creyentes en la lógica de la probabilidad pueden tratar de frustrar mis críticas afirmando que provienen de una mentalidad «atada al marco de la lógica clásica», e incapaz —por tanto— de seguir los métodos de razonar que se emplean en la lógica probabilitaria: admito, desde luego, que soy incapaz de seguir tales métodos.

82. Teoría positiva de la corroboración: cómo puede «demostrar su temple» una hipótesis

¿No podrán volverse, quizá, contra mi propia tesis las objeciones que acabo de plantear a la teoría probabilitaria de la inducción? Podría muy bien ocurrir que así fuera, ya que están basadas en la idea de una *evaluación:* y —sin duda— tengo que emplear yo también esta idea. Yo hablo de la *«corroboración»* de una teoría, y ésta sólo puede expresarse como una evaluación (a este respecto no existe diferencia alguna entre corroboración y probabilidad). Además, también yo mantengo que no puede afirmarse que las hipótesis sean enunciados «verdaderos», sino solamente «conjeturas provisionales» (o algo semejante): tesis que también puede sólo expresarse en forma de evaluación de las hipótesis.

Es fácil responder a la segunda parte de esta objeción. La evaluación de hipótesis que, ciertamente, me veo obligado a emplear, y que las describe como «conjeturas provisionales» (o algo análogo), tiene el estatuto de una *tautología:* por tanto, no da lugar a dificultades del tipo originado por la lógica inductiva. Y ello porque tal descripción solamente parafrasea o interpreta la aserción (a la que por definición es equivalente) de que los enunciados estrictamente universales —esto es, las teorías— no pueden deducirse de enunciados singulares.

La situación es parecida en lo que respecta a la primera parte de

---

[2] Heymans, *Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens* (1890, 1894), páginas 290 y sig.; * 3.ª ed., 1915, pág. 272. El argumento de Heymans había sido expuesto con anterioridad por Hume en un folleto anónimo, *An Abstract of a Book lately published entitled a Treatise of Human Nature*, 1740. Apenas me caben dudas de que Heymans no conocía este opúsculo, que fue descubierto y atribuido a Hume por J. M. Keynes y P. Sraffa, y publicado por estos autores en 1938. Tampoco yo sabía nada acerca de las anticipaciones de Hume y de Heymans de mis argumentos contra la teoría probabilística de la inducción, cuando presenté éstos en 1931, en un libro anterior —no publicado aún— que fue leído por varios miembros del Círculo de Viena. El hecho de que Hume se había adelantado al pasaje de Heymans que cito me ha sido señalado por J. O. Wisdom; cf. sus *Foundations of Inference in Natural Science*, 1952, pág. 218. Citamos el pasaje de Hume más abajo, en el apéndice *VII, texto correspondiente a la nota 6.

la objeción, que se refiere a las evaluaciones que enuncian que una teoría está corroborada. La evaluación corroborante no es una hipótesis, sino que puede deducirse en cuanto se nos den la teoría y los enunciados básicos aceptados: aquella evaluación afirma el hecho de que estos enunciados no contradicen a la teoría, y su afirmación tiene debidamente en cuenta el grado de contrastabilidad de ésta y la dureza de las contrastaciones a que se la ha sometido —hasta un momento determinado.

Decimos que una teoría está «corroborada» mientras sale indemne de dichas contrastaciones. La evaluación que afirma la corroboración (esto es, la evaluación corroboradora) establece ciertas relaciones fundamentales, a saber, la compatibilidad y la incompatibilidad. Consideramos a esta última como equivalente a falsación de la teoría; pero la compatibilidad por sí sola no puede hacer que atribuyamos un grado positivo de corroboración a aquélla: el mero hecho de que una teoría no haya sido falsada aún no puede considerarse suficiente, como es claro; pues no hay nada más fácil que construir una cantidad cualquiera de sistemas teóricos que sean compatibles con un conjunto dado de enunciados básicos aceptados (y esta observación es aplicable, asimismo, a todos los sistemas «metafísicos»).

Podría sugerirse tal vez que debería concederse un grado positivo de corroboración a una teoría si es compatible con el sistema de los enunciados básicos aceptados y si, además de esto, cabe deducir de ella parte de dicho sistema. O bien —si se considera que los enunciados básicos no son deductibles de un sistema puramente teórico (aun cuando sus negaciones sí pueden serlo)— podría sugerirse que se adoptara la regla siguiente: ha de concederse a una teoría un grado positivo de corroboración si es compatible con los enunciados básicos aceptados y si, además, una subclase no vacía de estos últimos es deductible de la teoría en conyunción con los demás enunciados básicos aceptados *[1].

---

*[1] La definición provisional de «corroborado positivamente» que doy aquí (y que rechazo por insuficiente en el siguiente párrafo del texto, ya que no se refiere explícitamente a los resultados de contrastaciones exigentes, esto es, de tentativas de refutación) tiene interés al menos en dos sentidos. En primer lugar, guarda una relación muy estrecha con mi criterio de demarcación, especialmente con la formulación de éste a que se refiere la nota *1 del apartado 21: en realidad, están de absoluto acuerdo, excepto por la restricción a enunciados básicos *aceptados* que forma parte de la presente definición; ésta se convierte, pues, en mi criterio de demarcación si omitimos la restricción citada.

En segundo término, si en lugar de omitir lo que hemos dicho restringimos aún más la clase de los enunciados básicos aceptados *deducidos* —pidiendo que se acepten como resultado de tentativas sinceras de refutar la teoría—, entonces llegamos a una definición adecuada de «corroborado positivamente» (aunque no, desde luego, de «grado de corroboración»): en el texto que sigue inmediatamente está implícito el argumento en que se apoya esta aseveración. Y, además, los enunciados básicos aceptados de esta forma pueden designarse por «enunciados corroboradores» de la teoría.

Debe advertirse que no es posible describir de un modo suficiente los «enunciados ejemplificadores» (esto es, los enunciados básicos negados: véase el apartado 28) diciendo que son enunciados corroboradores o confirmadores de la teoría de la que

No tengo objeciones serias que hacer a esta última formulación, salvo que me parece insuficiente para caracterizar adecuadamente el grado positivo de corroboración de una teoría. Pues queremos decir que unas teorías están mejor o peor corroboradas; ahora bien, su *grado de corroboración,* sin duda alguna, no puede establecerse sin más que contar el número de casos corroboradores (o sea, el de enunciados básicos aceptados que sean deductibles del modo indicado): pues puede ocurrir que una teoría resulte estar mucho peor corroborada que otra, aun cuando hayamos deducido muchísimos enunciados básicos con la primera y sólo unos pocos con la segunda. Como ejemplo podemos comparar las hipótesis «todos los cuervos son negros» y «la carga del electrón tiene el valor determinado por Millikan» (que habíamos mencionado en el apartado 37): aunque es de presumir que hayamos encontrado muchos más enunciados básicos corroboradores de la primera hipótesis, juzgamos que la hipótesis de Millikan es la mejor corroborada de las dos.

Esto hace ver que lo que determina el grado de corroboración no es tanto el número de casos corroboradores cuanto *la dureza de las diversas contrastaciones* a las que puede someterse —o se ha sometido— la hipótesis en cuestión. Pero dicha dureza depende, a su vez, del *grado de contrastabilidad*, y, por tanto, de la sencillez de la hipótesis: la que es falsable en un grado más alto —o sea, la hipótesis más sencilla— es también la corroborable en grado más elevado [1]. Como es natural, el grado de corroboración alcanzado de hecho no depende *solamente* del de falsabilidad: un enunciado que sea falsable en gran medida puede estar corroborado sólo muy ligeramente, e incluso puede estar falsado en realidad; y quizá —sin que se le haya falsado— pueda estar superado por una teoría mejor contrastable, de la cual podría deducírsele —u otro enunciado suficientemente aproximado a él— (y, en este caso, su grado de corroboración disminuiría).

Del mismo modo que el grado de falsabilidad, el de corroboración de dos enunciados puede no ser comparable en todos los casos: no podemos definir un grado de corroboración calculable numéricamente, sino sólo hablar aproximadamente de grados positivos o negativos de corroboración, etc. *[2]. Pero podemos asentar varias reglas:

---

ofrecen ejemplos, debido al hecho de que sabemos que *toda ley universal está ejemplificada* casi en todas partes, tal como se ha indicado en la nota *1 del apartado 28 (véanse, asimismo, la nota *5 del apartado 80 y el texto correspondiente).

[1] Este es otro punto en que mi noción de la sencillez y la de Weyl están de acuerdo: cf. la nota 7 del apartado 42. * Acuerdo que es consecuencia de la tesis —debida a Jeffreys, Wrinch y Weyl (cf. la nota 7 del apartado 42)— de que cabe emplear la parvedad en parámetros de una función como medida de su sencillez, en conyunción con la tesis mía (cf. los apartados 38 y sigs.) de que dicha parvedad puede utilizarse como medida de la contrastabilidad o improbabilidad —tesis rechazada por los autores mencionados—. (Véanse también las notas *1 y *2 del apartado 43).

*[2] Lo que aquí digo me parece exacto en lo que se refiere a la aplicación práctica a teorías existentes; pero ahora pienso que cabe definir el «grado de corroboración» de tal modo que podamos *comparar* varios entre sí (por ejemplo, los de las teorías gravitatorias de Newton y de Einstein). Además, esta definición hace posible

por ejemplo, la de que no seguiremos atribuyendo un grado positivo de corroboración a una teoría que haya quedado falsada en virtud de un experimento contrastable intersubjetivamente y basado en una hipótesis falsadora (cf. los apartados 8 y 22) (pero podemos, con todo, conceder bajo ciertas circunstancias un grado positivo de corroboración a otra teoría que siga un modo de pensar cercano al de aquélla: tenemos un ejemplo en la teoría einsteiniana del fotón, con su cercanía a la teoría corpuscular de la luz de Newton). En general, consideramos que una falsación contrastable intersubjetivamente es definitiva (suponiendo que esté bien contrastada): éste es el modo en que se hace sentir la asimetría entre la verificación y la falsación. Cada una de estas cuestiones metodológicas contribuye de un modo peculiar al desarrollo histórico de la ciencia, que sigue un proceso de aproximaciones sucesivas: una evaluación corroborativa realizada posteriormente —esto es, una evaluación hecha tras haber añadido nuevos enunciados básicos a los ya aceptados— puede remplazar un grado positivo de corroboración por uno negativo, pero no viceversa—. Y aunque creo que en la historia de la ciencia es siempre la teoría y no el experimento, la idea y no la observación, lo que abre paso a nuevos conocimientos, creo también que es siempre el experimento lo que nos saca de las sendas que no llevan a ninguna parte —lo que nos ayuda a salir del atolladero y nos desafía a que encontremos una nueva ruta.

Así pues, el grado de falsabilidad o de sencillez de una teoría cuenta para la evaluación del grado en que está corroborada; evaluación que podemos considerar como una de las relaciones lógicas existentes entre la teoría y los enunciados básicos aceptados, y que tiene en cuenta la dureza de las contrastaciones a que ha sido sometida aquélla.

83. Corroborabilidad, contrastabilidad y probabilidad lógica *1

Al evaluar el grado de corroboración de una teoría tomamos en consideración su grado de falsabilidad: cuanto más contrastable es una teoría, mejor puede ser corroborada. Pero la contrastabilidad es lo contrario del concepto de *probabilidad lógica*, de modo que podemos, asimismo, decir que al evaluar la corroboración se tiene en cuenta la probabilidad lógica del enunciado en cuestión; la cual, a su vez, está en relación con el concepto de probabilidad objetiva —la probabilidad de eventos—, según vimos en el apartado 72. Así pues, por

incluso atribuir grados numéricos de corroboración a hipótesis estadísticas, y quizá hasta a otros enunciados, *con tal de que* podamos atribuir grados de probabilidad lógica (absoluta y relativa) a ellos *y a los enunciados corroboradores.* Véase también el apéndice *IX.

*1 Si se acepta la terminología que he expuesto por primera vez en *Mind,* 1938, sería menester insertar aquí (así como en los apartados 34, etc.) la palabra «absoluta» dondequiera que se halla «probabilidad lógica» —a continuación de esta expresión—, para distinguirla de la probabilidad lógica «relativa» o «condicional»: cf. los apéndices *II, *IV y *IX.

el hecho de contar con la probabilidad lógica, el concepto de corroboración está ligado —aunque sea sólo de una forma indirecta e imprecisa— con el de probabilidad de eventos. Y puede ocurrírsenos que tal vez haya aquí una conexión con la doctrina de la probabilidad de hipótesis que hemos criticado más arriba.

Cuando tratamos de evaluar el grado de corroboración de una teoría podemos razonar poco más o menos del modo siguiente. Dicho grado aumentará con el número de casos corroboradores; y a este respecto solemos conceder a los primeros ejemplos de corroboración mucha mayor importancia que a los últimos, de suerte que, una vez que una teoría está bien corroborada, sus últimos ejemplos aumentan muy poco su grado de corroboración; sin embargo, esta regla no es válida si tales nuevos ejemplos son muy distintos de los anteriores —esto es, si corroboran la teoría en un *nuevo campo de aplicación*—: si ocurre tal cosa, pueden hacer crecer considerablemente el grado de corroboración. Por tanto, el correspondiente a una teoría que tenga un grado mayor de universalidad puede ser más grande que el de otra que lo tenga menor (y, por ello, menor también de falsabilidad); y, de un modo análogo, las teorías de grado de precisión más elevado pueden corroborarse mejor que las menos precisas. Una de las razones por las que no concedemos un grado positivo de corroboración a las típicas profecías de los quirománticos y adivinos es que sus predicciones son tan cautas e imprecisas que la probabilidad lógica de que resulten exactas es sumamente elevada; y si se nos dice que se han confirmado vaticinios de esta índole, si bien más precisos y, por tanto, lógicamente menos probables, lo que ponemos en tela de juicio —por regla general— no es tanto su éxito cuanto su pretendida improbabilidad lógica: como nos inclinamos a creer que tales profecías no son corroborables, tendemos a inferir en tales casos su pequeño grado de contrastabilidad de su pequeño grado de corroborabilidad.

Si comparamos estas tesis mías con las que están implícitas en la lógica probabilitaria (inductiva) llegamos a un resultado verdaderamente notable. Según lo que yo defiendo, la corroborabilidad de una teoría, y el grado de corroboración de una que haya sobrepasado realmente contrastaciones muy duras, se encuentran algo así como *2 en razón inversa de su probabilidad lógica, ya que ambas aumentan con su grado de contrastabilidad y de sencillez. *Pero la tesis implicada*

*2 Digo en el texto «*algo así como*», porque no creía realmente en probabilidades lógicas (absolutas) numéricas, y, por ello, oscilaba al escribirlo entre la opinión de que el grado de corroborabilidad es *complementario* de la probabilidad lógica (absoluta) y la de que es inversamente proporcional a ella; o, dicho de otro modo, entre definir $C(g)$ —esto es, el grado de corroborabilidad— por medio de $C(g) = 1 - P(g)$, con lo cual se haría *la corroborabilidad igual al contenido*, o mediante $C(g) = 1/P(g)$ (siendo $P(g)$, en ambos casos, la probabilidad lógica absoluta de g). En realidad, es posible adoptar definiciones que lleven a una u otra de estas consecuencias, y ambos caminos parecen ser bastante satisfactorios desde el punto de vista intuitivo: lo cual explicará, tal vez, mis vacilaciones. Pero existen razones poderosas en favor del primer método, o bien de aplicar al segundo una escala logarítmica; véase el apéndice *IX.

por la lógica probabilitaria es justamente la opuesta: sus mantenedores hacen que la probabilidad de una hipótesis crezca ***en razón directa*** de su probabilidad lógica —si bien no cabe duda de que ***entienden*** por «probabilidad de una hipótesis» poco más o menos lo mismo que yo trato de designar con «grado de corroboración» *[3].

Entre los que razonan de tal modo se encuentra Keynes, que emplea la expresión «probabilidad *a priori*» para lo que yo llamo «probabilidad lógica» (véase la nota 1 del apartado 34). Este autor hace la siguiente observación [1] —que es enteramente exacta— acerca de una «generalización» (esto es, una hipótesis) *g* que tenga una «condición» (o antecedente, o prótasis) φ y una «conclusión» (o consecuente, o apódosis) *f*: «Cuanto más comprensiva sea la condición φ y menos la conclusión *f*, mayor probabilidad *à priori* *[4] atribuimos a la generalización *g*; con cada aumento de φ aumenta tal probabilidad, y con cada incremento de *f* habrá de disminuir». Como he dicho, esto es absolutamente exacto, aun cuando Keynes no traza una distinción tajante *[5] entre lo que él llama la «probabilidad de una generaliza-

---

*[3] Las últimas líneas de este párrafo, especialmente a partir de la frase en cursiva (que no estaba marcada de este modo en el original), contienen el punto crucial de mi crítica de la teoría probabilitaria de la inducción: punto que puede resumirse como sigue.

Queremos tener hipótesis *sencillas* —o sea, de mucho *contenido*, de un grado de *contrastabilidad* muy elevado—, las cuales son también muy *corroborables*, ya que el grado de corroborabilidad de una hipótesis depende principalmente de la dureza de sus contrastaciones, y, por tanto, de su contrastabilidad. Ahora bien, sabemos que contrastabilidad es lo mismo que gran *improbabilidad* lógica (absoluta), o que pequeña *probabilidad* lógica (absoluta).

Pero si dos hipótesis, h_1 y h_2, son comparables con respecto a su contenido —y, por tanto, con respecto a su probabilidad lógica (absoluta)—, se cumple lo siguiente: sea más pequeña la probabilidad lógica (absoluta) de h_1 que la de h_2; entonces, cualesquiera que sean los datos *d*, la probabilidad lógica (relativa) de h_1 dado *d* no puede nunca exceder de la de h_2 dado *d*. Por tanto, *la hipótesis más contrastable y corroborable no puede nunca tener más probabilidad —a la vista de unos datos* d*— que la menos contrastable:* pero esto entraña que *el grado de corroboración no puede ser lo mismo que la probabilidad.*

Este es el resultado crucial. Las últimas observaciones que hago en el texto no hacen más que sacar las conclusiones del mismo: si se aprecia mucho una gran probabilidad, ha de decirse muy poco —o, mejor aún, nada en absoluto—, de modo que las tautologías siguen conservando la máxima probabilidad.

[1] KEYNES, *A Treatise on Probability* (1921), págs. 224 y sig. La condición φ y conclusión *f* de Keynes corresponden, respectivamente (cf. la nota 6 del apartado 14), a nuestra función de enunciados condicionante, φ, y función de enunciados consecuente, *f*; véase también el apartado 36. Conviene observar que Keynes decía que la condición —o la conclusión— era *más comprensiva* si su *contenido* o intensión —y no su extensión— era mayor. (Yo me refiero a la relación inversa existente entre la intensión y la extensión de un término.)

*[4] Keynes sigue a otros eminentes lógicos de Cambridge al escribir una y otra vez «*à priori*» y «*à posteriori*»: uno diría, *à propos de rien* —si no es a propósito de «*à propos*».

*[5] En realidad, Keynes tiene en cuenta la distinción entre la probabilidad *a priori* (o «probabilidad lógica absoluta», como yo la llamo ahora) de una «generalización» *g*, y su probabilidad con respecto a unos datos determinados *h*, y lo que enuncio en el texto pide una corrección en tal sentido (establece la distinción al asumir en

ción» —que corresponde a lo que aquí hemos llamado la «probabilidad de una hipótesis»— y su «probabilidad *a priori*». Así pues, y frente a lo que ocurre con mi concepto de la corroboración, la probabilidad keynesiana de una hipótesis *aumenta* juntamente con su probabilidad lógica (o falta de contenido); mas el hecho de que su «probabilidad» aumente con el número de casos corroboradores, y el (más importante) de que también lo haga al aumentar les diferencias entre ellos, indican, sin embargo, que Keynes entiende con aquélla lo mismo que yo hago con mi «corroboración». (Pero este autor no se da cuenta de que las teorías cuyos ejemplos corroboradores pertenecen a campos de aplicación sumamente diferentes suelen tener un grado de universalidad elevado; y, por ello, sus dos requisitos para tener gran probabilidad —la menor universalidad posible y la mayor diversidad de casos corroboradores— serán, por regla general, incompatibles.)

Expresada con mi terminología, la teoría de Keynes implica que la corroboración (o la probabilidad de las hipótesis) *decrece* al aumentar la contrastabilidad, tesis a que le lleva su creencia en la lógica inductiva *[6]. En efecto, la tendencia de ésta es hacer las hipótesis científicas lo más *seguras* posible: se atribuye importancia científica a las distintas hipótesis sólo en la medida en que pueden quedar justificadas por la experiencia, y se considera científicamente valiosa una teoría sólo debido a la estrecha *proximidad lógica* (cf. la nota 2 del apartado 48 y el texto correspondiente) entre ella y los enunciados empíricos. Pero esto no significa otra cosa sino que el *contenido* de una teoría debe trascender lo que se encuentra asentado empíricamente *lo menos posible* *[7], tesis unida estrechamente a cierta tendencia a negar el valor de la predicción: «Las virtudes peculiares de la predicción —escribe Keynes [2]— ... son enteramente imaginarias. Los puntos esenciales son el número de casos examinados y la analogía existente entre ellos; la cuestión acerca de si se ha propuesto una hipótesis concreta antes o después de semejante examen no hace al caso». En lo que respecta a las hipótesis «propuestas *a priori*» —esto es, propuestas antes de que tuviésemos bastante fundamento para ellas desde un punto de vista inductivo— Keynes dice: «... si lo único

---

la página 225 del *Treatise* —de un modo correcto, pero quizá sólo implícito— que si $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, y si $f = f_1 f_2$, entonces las probabilidades *a priori* de las diversas g son: $g(\varphi, f_1) \geqslant g(\varphi, f) \geqslant g(\varphi_1, f)$); y *demuestra* correctamente que las probabilidades *(a posteriori)* de las hipótesis g (con respecto a unos datos h cualesquiera) se encuentran en la misma relación que sus probabilidades *a priori*. Así pues, demuestra que las probabilidades de hipótesis están en relación unas con otras como las probabilidades lógicas (absolutas); mientras que el punto capital para mí era —y sigue siendo— que los grados de corroborabilidad (y de corroboración) de aquellas hipótesis se encuentran entre sí en la relación opuesta.

*[6] Véase mi *Postscript*, capítulo *II. Frente a lo que ocurre con las teorías de la probabilidad de Keynes, de Jeffreys y de Carnap, en mi teoría de la corroboración ésta no *decrece* al aumentar la contrastabilidad, sino que tiende a *crecer* con ella.

*[7] Que podría expresarse también por medio de la siguiente regla inaceptable: «Elige siempre la hipótesis más *ad hoc*».

[2] KEYNES, *op. cit.*, pág. 305.

que se había hecho es tratar de adivinar, el hecho afortunado de haberse anticipado a algunos o a todos los casos que verifican lo dicho no añade nada en absoluto a su valor». Sin duda, esta teoría de la predicción es coherente; pero le hace a uno asombrarse de por qué generalizaríamos nunca. ¿Qué razones puede haber para que construyamos teorías e hipótesis? El punto de vista de la lógica inductiva hace incomprensibles todas estas actividades: si lo que más valoramos es el conocimiento más seguro posible, y si las predicciones no contribuyen como tales en nada a conseguir una corroboración, ¿por qué no hemos de quedarnos satisfechos con nuestros enunciados básicos? *[8].

Otra tesis que da lugar a preguntas muy parecidas es la de Kaila [3]. Mientras que yo creo que las teorías sencillas —y justamente aquéllas que emplean pocas hipótesis auxiliares (cf. el apartado 46)— son las que pueden corroborrarse bien, precisamente por su improbabilidad lógica, Kaila interpreta la situación exactamente del modo opuesto, por razones análogas a las de Keynes; también él ve que solemos atribuir una elevada probabilidad (o, en nuestra terminología, una elevada «probabilidad de hipótesis») a las teorías *sencillas*, y, especialmente, a las que necesitan pocas hipótesis auxiliares, pero sus razonamientos son opuestos a los míos. No adscribe la gran probabilidad mencionada a tales teorías como hago yo, porque éstas sean contrastables con mucha dureza, o lógicamente improbables (esto es, porque tengan *a priori* —por decirlo así— *muchas ocasiones de chocar con enunciados básicos):* por el contrario, considera del modo dicho a las teorías sencillas y con pocas hipótesis auxiliares porque cree que un sistema que conste de *pocas* hipótesis tendrá, *a priori, menos* ocasiones de chocar con la realidad que otro en que entren muchas. Y ahora volvemos a asombrarnos de que nos molestemos en construir tales teorías, siempre arriesgadas: si rehuimos todo conflicto con la realidad, ¿por qué ponernos en trance de que surja haciendo afirmaciones? Como nuestra meta es la seguridad, el modo de proceder más seguro sería adoptar un sistema *sin* hipótesis.

Mi regla según la cual deben emplearse lo menos posible las hipótesis auxiliares (el «principio de parquedad en el uso de hipótesis») no tiene nada en común con consideraciones tales como las de Kaila. No me preocupo simplemente por conservar reducido el número de nuestros enunciados: me importa mucho su *sencillez —en el*

---

*[8] En su *Logical Foundations of Probability* (1950) Carnap cree en el valor *práctico* de las predicciones; y, sin embargo, saca parte de la conclusión aquí mencionada (a saber, la de que deberíamos contentarnos con nuestros enunciados básicos): pues dice que las teorías —él habla de «leyes»— no son «indispensables» para la ciencia, ni siquiera para hacer predicciones, pues podemos arreglárnoslas siempre con enunciados singulares. «Sin embargo —escribe (pág. 575)—, es cómodo, desde luego, enunciar leyes universales en libros de física, biología, psicología, etc.». Pero la cuestión no es de comodidad, sino de curiosidad científica: *algunos científicos quieren explicar al mundo,* es decir, su blanco es encontrar teorías explicativas satisfactorias (bien contrastables, esto es, sencillas) y contrastarlas. (Véanse también el apéndice *X y, de mi *Postscript*, el apartado *15.)

[3] Kaila, *Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslogik (Annales Universitatis Aboensis,* 1926), pág. 140.

sentido de gran contrastabilidad—, y ello lleva, por un lado, a la regla de que las hipótesis auxiliares han de emplearse lo menos posible, y, por otro, a pedir que mantengamos el número de axiomas —o sea, el de nuestras hipótesis más fundamentales— lo más pequeño que podamos. Pues este último punto procede del requisito de que se elijan los enunciados de un elevado nivel de universalidad, y de que siempre que sea posible se deduzca un sistema que conste de muchos «axiomas» de otro con menos «axiomas», y éstos de mayor nivel de universalidad (y que, por tanto, se explique aquél a partir de éste).

84. Observaciones acerca del uso de los conceptos de verdadero y corroborado

En la lógica de la ciencia que he bosquejado es posible evitar el empleo de los conceptos de verdadero y falso *[1]: en su lugar, pueden entrar consideraciones lógicas acerca de las relaciones de deduc-

*[1] Poco después de haber escrito esto tuve la buena fortuna de conocer a Alfred Tarski, que me explicó las ideas fundamentales de su teoría de la verdad. Es una verdadera lástima que siga malentendiéndose y teniéndose una idea equivocada de su teoría —que es uno de los dos grandes descubrimientos hechos en el campo de la lógica desde los *Principia Mathematica*—. Nunca subrayaremos demasiado que la idea tarskiana de la verdad (para cuya definición en el campo de los lenguajes formalizados ha dado Tarski un método) es la misma en que pensaba Aristóteles, y en que *piensa casi todo el mundo* (*excepto los pragmatistas*): la de que la *verdad es la correspondencia con los hechos* (o con la realidad). Pero, ¿cuál es el significado posible de decir que un *enunciado* corresponde a los *hechos* (o a la realidad)? Una vez que nos damos cuenta de que dicha correspondencia no puede ser de semejanza estructural, la tarea de elucidarla parece vana; y, en consecuencia, cabe que el concepto de verdad nos resulte sospechoso y prefiramos no emplearlo. Tarski ha resuelto (con respecto a lenguajes formalizados) este problema aparentemente desesperado, en virtud de haber reducido la inmanejable idea de correspondencia a otra más sencilla (la de «satisfacción» o «cumplimiento»).

Gracias a la doctrina de Tarski, ya no vacilo en hablar de «verdad» o «falsedad». Y, como ha ocurrido con las opiniones de todo el mundo (a menos de ser un pragmatista), resultó que mis opiniones eran coherentes con la teoría de Tarski de la verdad absoluta, como era natural; así pues, si bien esta teoría ha revolucionado mis tesis sobre la lógica formal y su filosofía, las correspondientes a la ciencia y su filosofía no han sufrido alteración esencial, si bien han quedado más claras.

La crítica hoy habitual de la teoría de Tarski me parece fuera de lugar. Se dice que su definición es artificial y complicada, pero, puesto que define la verdad con respecto a lenguajes formalizados, ha de basarse en la de una fórmula bien formada de uno de estos lenguajes; y tiene, precisamente, el mismo grado de «artificialidad» o de «complicación» que esta última definición. Se dice también que sólo las proposiciones o enunciados [en ingl., *propositions, statements*, respectivamente] pueden ser verdaderos o falsos, pero no las cláusulas [en ingl., *sentences*]; posiblemente, «cláusula» no ha sido una buena traducción de la terminología tarskiana original (*personalmente, yo prefiero hablar de «enunciado» más que de* «cláusula»: véase, por ejemplo, mi «Note on Tarski's Definition of Truth», *Mind* **64**, 1955, pág. 388, nota 1); pero Tarski mismo dejó sentado de modo perfectamente claro que de una fórmula sin interpretar (o de una sarta de símbolos) no cabe decir que sea verdadera o falsa, y que estos términos son aplicables únicamente a fórmulas interpretadas —o «fórmulas *con sentido*», como dice la traducción—. Vengan en buena hora perfeccionamientos de la terminología; pero criticar una teoría por razones terminológicas no es más que un obscurantismo desatado.

tibilidad. Así pues, no necesitamos decir, «la predicción *p* es verdadera si la teoría *t* y el enunciado básico *b* son verdaderos»; en vez de ello, podemos decir que el enunciado *p* se sigue de la conyunción (no contradictoria) de *t* y *b*. Y cabe describir la falsación de una teoría de un modo semejante: no es menester que digamos que una teoría es falsa, sino solamente que la contradice cierto conjunto de enunciados básicos aceptados. No nos vemos obligados a decir que ciertos enunciados básicos son «verdaderos» o son «falsos», ya que podemos interpretar su aceptación como el resultado de una decisión convencional, y considerar los enunciados aceptados como resultado de tal decisión.

Ciertamente, esto no quiere decir que nos esté prohibido el uso de los conceptos de «verdadero» y «falso», ni que su empleo origine dificultades especiales: el mismo hecho de que podamos eludirlos indica que no pueden dar lugar a ningún nuevo problema fundamental. Su utilización es enteramente análoga a la de conceptos tales como «*tautología*», «*contradicción*», «*conyunción*», «*implicación*» y otros por el estilo: no son conceptos empíricos, sino lógicos [1]; describen o evalúan un enunciado independientemente de cualesquiera cambios en el mundo empírico. Mientras que suponemos que las propiedades de los objetos físicos (los objetos «genidénticos» en el sentido de Lewin) cambian con el paso del tiempo, nos decidimos a emplear estos predicados lógicos de tal modo que las propiedades lógicas de los enunciados se hagan intemporales: si un enunciado es una tautología, lo es de una vez para siempre. Y adscribimos esta misma intemporalidad a los conceptos de «verdadero» y «falso», de acuerdo con el uso corriente: no se suele decir de un enunciado, que era completamente verdadero ayer pero se ha convertido hoy en falso; si ayer evaluamos como verdadero un enunciado cuya evaluación de hoy es la de falso, afirmamos implícitamente que *ayer estábamos equivocados:* que el enunciado era falso incluso ayer —falso intemporalmente—, pero que «lo tomamos por verdadero» por error.

Podemos ver aquí muy claramente la diferencia entre verdad y corroboración. La evaluación de un enunciado como corroborado o no corroborado es también una evaluación lógica, y, por tanto, intemporal, pues afirma que se cumple cierta relación lógica entre un sistema teórico y cierto sistema de enunciados básicos aceptados. Pero no podemos decir nunca que un enunciado está «corroborado» como tal, o en sí mismo (a la manera en que podemos decir que es «verdadero»), sino únicamente que está *corroborado con respecto a algún sistema de enunciados básicos* —sistema que está aceptado hasta una fecha concreta—. «La corroboración que una teoría ha recibido hasta ayer» *no es lógicamente idéntica* con «la corroboración que ha recibido hasta hoy»; así pues, podríamos añadir algo así como un subíndice a toda evaluación de la corroboración, subíndice que caracterizaría el

---

[1] (Añadida en 1934, al corregir las pruebas.) Carnap diría probablemente «conceptos sintácticos» (cf. su *Logical Syntax of Language).*

sistema de enunciados básicos a que se refiere la corroboración (por ejemplo, indicando la fecha de su aceptación) *[2].

Por consiguiente, la corroboración no es un «valor veritativo»; o sea, no puede equiparársela a los conceptos de «verdadero» y «falso» (que están libres de subíndices temporales): pues para uno y el mismo enunciado puede existir un número cualquiera de valores distintos de corroboración, todos los cuales serán, sin duda, «correctos» o «verdaderos» simultáneamente; pues serán valores deductibles de la teoría y de diversos conjuntos de enunciados básicos, que estarían aceptados en fechas distintas.

Las observaciones anteriores pueden servir también —tal vez— para elucidar el contraste entre mis opiniones y las de los pragmatistas, que proponen *definir la «verdad» a base de los éxitos de una teoría —y, por tanto, de su utilidad— o de su confirmación o su corroboración.* Si meramente pretenden afirmar que una evaluación lógica del éxito de una teoría no puede ser sino una evaluación de su corroboración, estoy dispuesto a admitirlo. Pero me parece que identificar el concepto de corroboración con el de verdad distaría mucho de ser «*útil*» *[3]; y en el uso corriente se evita hacer tal cosa: pues cabe muy bien decir de una teoría que apenas está corroborada por ahora, o que todavía no está corroborada, mientras que normalmente no diríamos nunca que una teoría apenas es verdadera por ahora, o que todavía es falsa.

85. La ruta de la ciencia

En la evolución de la física puede discernirse algo así como una dirección general de su evolución, que partiendo de teorías de un nivel reducido de universalidad iría hacia teorías de nivel más elevado. A esto suele llamarse la dirección «inductiva»; y podría pensarse que el hecho de que la física avance en esta dirección permite ser utilizado como argumento en favor del método inductivo.

Ahora bien; un avance en dirección inductiva no consiste necesariamente en una sucesión de inferencias inductivas: en realidad, hemos hecho ver que puede explicarse de un modo enteramente diferente, a saber, teniendo en cuenta los grados de contrastabilidad y de corroborabilidad. Pues sólo cabe superar una teoría que esté bien corroborada por medio de otra de nivel de universalidad más alto; esto es, por una que sea más contrastable y que, además, *contenga* la teoría antigua y bien corroborada (o, al menos, una buena aproximación de ella). Por lo cual, sería mejor designar semejante tendencia —el paso a teorías de nivel de universalidad más elevado— diciendo que es «casi inductiva».

*[2] Cf. la nota *1 del apartado 81.

*[3] Por tanto, para definir «verdadero» como «útil» (de acuerdo con lo propuesto por algunos pragmatistas, especialmente por William James), o bien por «con éxito», «confirmado» o «corroborado», tendríamos que introducir un nuevo concepto «absoluto» o «intemporal», que desempeñaría el papel de «verdad».

Los procesos casi inductivos deberían mirarse del modo siguiente. Se proponen teorías de cierto nivel de universalidad, y se contrastan deductivamente; después se proponen otras de un nivel de universalidad más elevado, que se someten a contraste valiéndose de las correspondientes a los niveles anteriores; y así sucesivamente. Los métodos de contrastación están apoyados invariablemente en inferencias deductivas que van de un nivel a otro más bajo *1; mientras que, por otra parte, en la sucesión temporal se llega a cada nivel de universalidad pasando de un nivel inferior a otro más elevado.

Puede plantearse ahora la cuestión siguiente. «¿Por qué no inventar directamente teorías del máximo nivel de universalidad? ¿Por qué esperamos a esta evolución casi inductiva? ¿No será, tal vez, porque, al fin y a la postre, haya algún elemento inductivo contenido en ella?». Yo no lo creo así. Una y otra vez se proponen ciertas sugerencias —conjeturas, o teorías— de todos los niveles posibles de universalidad; las teorías que se encuentran en un nivel de universalidad *demasiado elevado, como si dijéramos* (*esto es, demasiado lejos* del nivel alcanzado por la ciencia que en aquel momento es susceptible de contrastación), darán lugar, quizá, a un «sistema metafísico». En este caso, incluso si son deductibles enunciados que pertenecen al sistema científico vigente (o sólo semideductibles, como, por ejemplo, en el sistema de Spinoza), entre ellos no se encontrará ningún enunciado contrastable *nuevo:* lo cual quiere decir que no podrá idearse ningún experimento crucial con el que someter a contraste el sistema en cuestión *2. Pero si, por el contrario, cabe idear un experimento crucial con el fin indicado, el sistema contendrá —al menos como primera aproximación— alguna teoría bien corroborada y, además, alguna otra cosa que quepa contrastar: no será «metafísico», naturalmente, y cabrá considerarle como un nuevo paso en la evolución casi inductiva de la ciencia. Esto explica por qué, por regla general, sólo las teorías que se proponen con una pretensión de resolver *los problemas a la vista en el momento —esto es, las dificultades*, contradicciones y falsaciones con que se está enfrentado en el momento— establecen un contacto con la ciencia de la época: al proponer una solución para tales dificultades, tales teorías pueden indicar el camino hacia un experimento crucial.

Para tener una imagen o modelo de esta evolución casi inductiva de la ciencia podemos representarnos las diversas ideas e hipótesis como partículas suspendidas en un fluido. La ciencia susceptible de contrastación es el precipitado de dichas partículas en el fondo del recipiente, donde se depositan en capas (de universalidad); el es-

*1 Las «inferencias deductivas que van de un nivel a otro más bajo» son, naturalmente, *explicaciones* (en el sentido del apartado 12); y de ahí que las hipótesis de nivel superior sean *explicativas* con respecto a las de nivel inferior.

*2 Convendría advertir que lo que quiero decir cuando hablo de experimento crucial es un experimento ideado para refutar una teoría (si es posible), y, más en particular, aquél que se pretende aporte una decisión entre dos teorías en competencia al refutar (al menos) una de ellas —sin demostrar por eso la otra, desde luego— (véanse, asimismo, la nota 1 del apartado 22 y el apéndice *IX).

pesor del depósito crece con el número de capas, y cada capa nueva corresponde a una teoría más universal que las situadas debajo de ella. Como resultado de este proceso, es posible que el crecimiento de la ciencia llegue a alcanzar ideas que antes se encontraban flotando en regiones metafísicas más altas, con las que establece contacto y las hace asentarse. Tenemos ejemplos de estas ideas en el atomismo, en la idea de un «principio» físico —o elemento último— único (del cual se deriven todos los demás), en la teoría del movimiento terrestre (al cual se opuso Bacon como ficticio), en la antiquísima teoría corpuscular de la luz, y en la teoría de la electricidad como fluido (que ha revivido en forma de la hipótesis del gas de electrones de la conducción metálica). Todos estos conceptos e ideas metafísicos pueden haber ayudado, incluso en sus formas más primerizas, a ordenar la imagen del mundo que tiene el hombre, y, en algunos casos, han llevado a predicciones con éxito. Pero una idea de este tipo adquiere ciudadanía científica solamente cuando se la presenta en forma falsable: esto es, sólo cuando se ha hecho posible decidir empíricamente entre ella y otra teoría rival.

Mi investigación ha seguido y rastreado las diversas consecuencias de las decisiones y convenciones que habíamos adoptado al comenzar este libro, en particular del criterio de demarcación. Mirando hacia atrás, podemos tratar ahora de tener, por fin, una panorámica de la imagen de la ciencia y de la investigación científica que ha surgido. (Me refiero no a una imagen de la ciencia como fenómeno biológico, como instrumento de adaptación o como método de producción en rodeo, sino a sus aspectos epistemológicos.)

La ciencia no es un sistema de enunciados seguros y bien asentados, ni uno que avanzase firmemente hacia un estado final. Nuestra ciencia no es conocimiento (*epistēmē*): nunca puede pretender que ha alcanzado la verdad, ni siquiera el sustituto de ésta que es la probabilidad.

Pero la ciencia tiene un valor que excede al de la mera supervivencia biológica; no es solamente un instrumento útil: aunque no puede alcanzar ni la verdad ni la probabilidad, el esforzarse por el conocimiento y la búsqueda de la verdad siguen constituyendo los motivos más fuertes de la investigación científica.

No sabemos: sólo podemos adivinar. Y nuestras previsiones están guiadas por la fe en leyes, en regularidades que podemos des-cubrir —descubrir—: fe acientífica, metafísica (aunque biológicamente explicable). Como Bacon, podemos describir la propia ciencia contemporánea nuestra —«el método de razonar que hoy aplican ordinariamente los hombres a la Naturaleza»— diciendo que consiste en «anticipaciones, precipitadas y prematuras», y en «prejuicios» [1].

Pero domeñamos cuidadosa y austeramente estas conjeturas o «anticipaciones» nuestras, tan maravillosamente imaginativas y audaces, por medio de contrastaciones sistemáticas: una vez que se ha pro-

[1] Bacon, *Novum Organum*, I, 26.

puesto, ni una sola de nuestras «anticipaciones» se mantiene dogmáticamente; nuestro método de investigación no consiste en defenderlas para demostrar qué razón teníamos; sino que, por el contrario, tratamos de derribarlas. Con todas las armas de nuestro arsenal lógico, matemático y técnico, tratamos de demostrar que nuestras anticipaciones eran falsas —con objeto de proponer en su lugar nuevas anticipaciones injustificadas e injustificables, nuevos «prejuicios precipitados y prematuros», como Bacon los llamó con gran mofa [*3].

Es posible interpretar los progresos de la ciencia más prosaicamente. Cabría decir que el progreso puede «... originarse de dos maneras solamente: acumulando nuevas experiencias perceptivas y organizando mejor las que ya teníamos a nuestra disposición» [2]. Pero esta descripción del progreso científico, aunque no es realmente errónea, parece no dar en el blanco; recuerda demasiado a la inducción baconiana: sugiere en exceso su industrioso acumular los «incontables racimos, maduros y en sazón» [3] de los que esperaba que fluyese el vino de la ciencia, su mito de un método científico que partiera de la observación y el experimento para avanzar luego hasta las teorías. (Diremos de pasada que este método legendario aún inspira algunas nuevas ciencias, que intentan practicarlo debido a la general creencia de que constituye el método de la física experimental.)

El avance de la ciencia no se debe al hecho de que se acumulen más y más experiencias perceptivas con el correr del tiempo, ni al de que haríamos cada vez mejor uso de nuestros sentidos. No es posible destilar ciencia de experiencias sensoriales sin interpretar, por muy

---

3 El término de Bacon «anticipación» («anticipatio»*, *Novum Organum*, I, 26), quiere decir casi lo mismo que «hipótesis» (tal como yo lo empleo). La tesis de Bacon era que, con objeto de preparar la inteligencia para la intuición de la verdadera *esencia* o *naturaleza* de una cosa, era menester limpiarla antes meticulosamente de toda anticipación, prejuicio e ídolo: pues la fuente de todos los errores es la impureza de nuestra propia inteligencia, ya que la Naturaleza no miente. La función principal de la inducción eliminativa sería (como en Aristóteles) la de ayudar a tal purificación (véase también mi *Open Society* [vers. cast., *La sociedad abierta (T.)*] —capítulo 24, nota 59 del capítulo 10 y nota 33 del capítulo 11— en donde se describe brevemente la teoría de la inducción de Aristóteles): esta purificación de prejuicios es concebida como una especie de rito, que se prescribe para el científico con objeto de preparar su inteligencia para la interpretación del Libro de la Naturaleza —análogamente a como la purificación mística de su alma la dispone para la visión de Dios (cf. el apartado *4 de mi *Postscript)*.

2 P. Frank, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1932). La tesis de que el progreso de la ciencia se deba a la acumulación de experiencias perceptivas sigue teniendo gran aceptación (cf. mi segundo prefacio, de 1958); y el *no* que opongo a ella está relacionado estrechamente con mi recusación de que la ciencia —o el conocimiento— *tenga* que avanzar debido a que nuestras experiencias *tienen* que acumularse. Frente a esto, creo que el avance de la ciencia depende de la libre competición del pensamiento, y, por ello, de la libertad, y que se verá obligado a detenerse si se acaba con ésta (aunque puede muy bien ser que continúe en ciertos campos, especialmente en el de la tecnología): en mi *Poverty of Historicism* [vers. cast., *La miseria del historicismo (T.)*] (apartado 32) desarrollo ampliamente esta idea; también razono allí (en el prefacio) que el crecimiento de nuestro conocimiento es imprevisible por medios científicos, y que —en consecuencia— el curso futuro de nuestra historia es, asimismo, imprevisible.

3 Bacon, *Novum Organum*, I, 123.

industriosamente que las acumulemos y escojamos; el único medio que tenemos de interpretar la Naturaleza son las ideas audaces, las anticipaciones injustificadas y el pensamiento especulativo: son nuestro solo *organon*, nuestro único instrumento para captarla. Y hemos de aventurar todo ello para alcanzar el premio: los que no están dispuestos a exponer sus ideas a la aventura de la refutación no toman parte en el juego de la ciencia.

Incluso la cuidadosa y austera contrastación de nuestras ideas por medio de la experiencia está, a su vez, inspirada por las ideas: el experimento es una acción planeada, en la que todos y cada uno de los pasos están guiados por la teoría. No tropezamos con nuestras experiencias, no las dejamos inundarnos como un río; sino que, más bien, hemos de ser activos, hemos de «*hacer*» experiencias. Somos nosotros quienes siempre formulamos las preguntas que se han de proponer a la Naturaleza, quienes intentamos una y otra vez plantearlas de tal modo que sonsaquen un «sí» o «no» tajantes (pues la Naturaleza no responde a menos que se la urja a ello). Y, finalmente, somos nosotros los que damos la respuesta, quienes —tras exigente escrutinio— decidimos acerca de la contestación a la pregunta que habíamos propuesto a la Naturaleza (después de continuados y serios intentos de sonsacarla un «no» inequívoco). «De una vez para siempre —dice Weyl [4] (con quien estoy de pleno acuerdo)— quiero manifestar mi admiración ilimitada por el trabajo del experimentador en su lucha por sacar *hechos interpretables* de una Naturaleza huraña, que tan bien sabe responder a nuestras teorías con un *no* decisivo o con un *sí* inaudible».

El antiguo ideal científico de la *epistēmē* —de un conocimiento absolutamente seguro y demostrable— ha mostrado ser un ídolo. La petición de objetividad científica hace inevitable que todo enunciado científico sea *provisional para siempre*: sin duda, cabe corroborarlo, pero toda corroboración es relativa a otros enunciados que son, a su vez, provisionales. Sólo en nuestras experiencias subjetivas de convicción, en nuestra fe subjetiva, podemos estar «absolutamente seguros» [5].

Juntamente con el ídolo de la certidumbre (que incluye los grados de certidumbre imperfecta o probabilidad) cae uno de los baluartes del obscurantismo, que cierra el paso del avance científico: pues la adoración de este ídolo reprime la audacia de nuestras preguntas y pone en peligro el rigor y la integridad de nuestras contrastaciones. La opinión equivocada de la ciencia se delata en su pretensión de tener razón: pues lo que hace al hombre de ciencia no es su *posesión* del conocimiento, de la verdad irrefutable, sino su *indagación* de la verdad persistente y temerariamente crítica.

¿Ha de ser nuestra actitud, pues, de resignación? ¿Nos veremos

---

[4] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1931), pág. 2. Trad. ingl. por H. P. ROBERTSON, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (1931), pág. XX.

[5] Cf., por ejemplo, la nota 4 del apartado 30. Esta última observación, desde luego, es más psicológica que epistemológica; cf. los apartados 7 y 8.

obligados a decir que la ciencia sólo puede cumplir su misión biológica: que únicamente puede —en el mejor de los casos— demostrar su temple en las aplicaciones prácticas que puedan corroborrarla? ¿Son insolubles nuestros problemas intelectuales? No lo pienso así. La ciencia nunca persigue la ilusoria meta de que sus respuestas sean definitivas, ni siquiera probables; antes bien, su avance se encamina hacia una finalidad infinita —y, sin embargo, alcanzable—: la de descubrir incesantemente problemas nuevos, más profundos y más generales, y de sujetar nuestras respuestas (siempre provisionales) a contrastaciones constantemente renovadas y cada vez más rigurosas.

APENDICES

Definición de dimensión de una teoría

(Cf. los apartados 38 y 39.)

La definición que sigue debe considerarse sólo provisional *[1]: se trata de un intento de definir la dimensión de una teoría de modo que esté de acuerdo con la dimensión del conjunto de curvas que se obtiene cuando se representa el campo de aplicación de aquélla en un papel cuadriculado. Surge una dificultad por el hecho de que inicialmente no hemos de asumir que en dicho campo estén definidas ni una métrica ni siquiera una topología; en particular, no hemos de suponer que estén definidas relaciones algunas de vecindad. Y admito que con la definición que propongo, más que vencer esta dificultad lo que se hace es sortearla: lo cual es posible porque una teoría prohibe siempre ciertos *eventos «homotípicos»*, como los hemos llamado (esto es, una clase de acontecimientos que difieren solamente en sus coordenadas espacio-temporales; cf. los apartados 23 y 31), de modo que, en general, aparecerán coordenadas espacio-temporales en el esquema que da origen al campo de aplicación, y, en consecuencia, el campo de los enunciados relativamente atómicos manifestará tener —en general— un orden topológico, e incluso métrico.

La definición que propongo dice así. Se dice que una teoría t es «d-dimensional con respecto al campo de aplicación C» si y sólo si se cumple la siguiente relación entre t y C: existe un número d tal que, *a)* la teoría no choca con ningún acervo-d del campo, y *b)* cualquier acervo-d dado en conyunción con la teoría divide unívocamente todos los enunciados relativamente atómicos restantes en dos subclases infinitas, A y B, tales que se satisfacen las siguientes condiciones: α) todo enunciado de la clase A unido conyuntivamente al acervo-d dado forma un «acervo $d+1$ falsador», es decir, un posible falsador de la teoría; y β) por otra parte, la clase B es la suma de una o más

*1 Una definición simplificada y algo más general es la siguiente: sean A y X dos conjuntos de enunciados (dicho de modo intuitivo, A es un conjunto de leyes universales y X uno —ordinariamente infinito— de enunciados de contraste singulares); decimos que X es un campo de aplicación (homogéneo) con respecto a A (en símbolos: $X = C_A$), si y sólo si para cada enunciado a de A existe un número natural $d(a) = n$ que satisface las dos condiciones siguientes: I) toda conyunción, c_n, de n enunciados distintos de X es compatible con a; y II) para cada una de estas conyunciones c_n existen en X dos enunciados x e y tales, que $x.c_n$ es incompatible con a, y que $y.c_n$ es deductible de $a.c_n$, pero no de a ni de c_n.

Llamamos a $d(a)$ la dimensión de a —o el grado de composición de a— con respecto a $X = C_A$; y cabe tomar $1/d(a)$ como medida de la sencillez de a.

En el apéndice *VIII se desarrolla ulteriormente esta cuestión.

—pero siempre en número finito— subclases infinitas [B_i], tales que la conyunción de un número cualquiera de enunciados pertenecientes a una cualquiera de estas [B_i], sea compatible con la conyunción del acervo-*d* dado y la teoría.

Con esta definición se pretende excluir la posibilidad de que una teoría tenga dos campos de aplicación tales que los enunciados relativamente atómicos de uno de ellos sean resultado de la conyunción de los enunciados relativamente atómicos del otro (lo cual ha de evitarse para que el campo de aplicación pueda ser identificado con el de su representación gráfica: cf. el apartado 39). Quizá convenga añadir que mediante esta definición se resuelve el problema de los enunciados atómicos (cf. la nota 2 del apartado 38) de una forma que podría llamarse «deductivista», ya que la misma teoría determina qué enunciados singulares son *relativamente atómicos* (con respecto a ella): pues el campo de aplicación se define a través de la teoría misma, y con él quedan definidos los enunciados que —debido a su forma lógica— gozan de igual estatuto con respecto a aquélla. Así pues, no resolvemos el problema de los enunciados atómicos descubriendo unos que tengan cierta forma elemental y a partir de los cuales se construyan inductivamente los otros enunciados compuestos —o se los componga por el método de las funciones veritativas—; por el contrario, los enunciados relativamente atómicos —y, con ellos, los enunciados singulares— resultan ser una especie de precipitado, o algo así como un depósito (relativamente) sólido, que se asienta a partir de los enunciados universales de la teoría.

Cálculo general de la frecuencia en clases finitas

(Cf. los apartados 52 y 53) *[1].

Teorema general de multiplicación. Denotamos la clase finita de referencia con «α», y las dos clases de propiedades con «β» y «γ». El primer problema que se nos plantea es el de determinar la frecuencia de los elementos que pertenecen tanto a β como a γ.

La solución está dada por la fórmula

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha}F''}(\beta) \cdot {_{\alpha.\beta}F''}(\gamma) \tag{1}$$

o bien, puesto que β y γ pueden conmutarse,

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha.\gamma}F''}(\beta) \cdot {_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1'}$$

Se obtiene la demostración de modo inmediato a partir de la definición dada en el apartado 52: sustituyendo en (1) de acuerdo con dicha definición, obtenemos

$$\frac{N(\alpha.\beta.\gamma)}{N(\alpha)} = \frac{N(\alpha.\beta)}{N(\alpha)} \cdot \frac{N(\alpha.\beta.\gamma)}{N(\alpha.\beta)} \tag{1,1}$$

que manifiesta ser una identidad sin más que simplificar eliminando «$N(\alpha . \beta)$». (Compárese con esta demostración, y, asimismo, con la de (2_s), Reichenbach, «Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung», *Mathematische Zeitschrift* 34, pág. 593.)

Si asumimos que existe *independencia* (cf. el apartado 53), esto es, que

$$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1^s}$$

llegamos, a partir de (1), al *teorema especial de multiplicación:*

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha}F''}(\beta) \cdot {_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1_s}$$

Valiéndose de la equivalencia de (1) y (1′) puede demostrarse ahora la simetría de la relación de independencia (cf. también la nota 4 del apartado 53).

Los teoremas de adición se ocupan de los elementos que pertenecen a β o a γ. Si denotamos con el símbolo «$\beta + \gamma$» (en donde el sig-

*[1] He desarrollado posteriormente este apéndice en forma de un tratamiento axiomático de la probabilidad: véanse los apéndices *III a *V.

no «+», *cuando está situado entre designaciones de clases*, no significa la adición aritmética, sino el *«o» no excluyente)* la combinación disyuntiva de aquellas clases, el teorema general de adición es:

$$_{\alpha}F''(\beta + \gamma) = {_{\alpha}F''(\beta)} + {_{\alpha}F''(\gamma)} - {_{\alpha}F''(\beta.\gamma)} \tag{2}$$

Su demostración se basa en la definición del apartado 52 y se apoya en la fórmula universalmente válida del cálculo de clases,

$$\alpha.(\beta + \gamma) = (\alpha.\beta) + (\alpha.\gamma), \tag{2,2}$$

y en esta otra (también universalmente válida):

$$N(\beta + \gamma) = N(\beta) + N(\gamma) - N(\beta.\gamma) \tag{2,1}$$

Bajo el supuesto de que α, β y γ no tengan ningún miembro común a las tres, supuesto que puede simbolizarse por la fórmula

$$N(\alpha.\beta.\gamma) = 0 \tag{2^s}$$

llegamos, a partir de (2), al *teorema especial de adición*

$$_{\alpha}F''(\beta + \gamma) = {_{\alpha}F''(\beta)} + {_{\alpha}F''(\gamma)}. \tag{2_s}$$

Este teorema es válido para *todas* las propiedades que son *propiedades primarias* en una clase α, ya que éstas son mutuamente excluyentes; y la suma de las frecuencias relativas de las mismas es, naturalmente, igual a 1.

Los teoremas de división enuncian cuál es la frecuencia de la propiedad γ dentro de una clase *seleccionada* a partir de α teniendo en cuenta la propiedad β. La fórmula general se obtiene inmediatamente por inversión de (1):

$$_{\alpha\beta}F''(\gamma) = \frac{_{\alpha}F''(\beta.\gamma)}{_{\alpha}F''(\beta)} \tag{3}$$

Si transformamos el *teorema general de división* (3), mediante el teorema especial de multiplicación, llegamos a

$$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {_{\alpha}F''(\gamma)} \tag{3^s}$$

En esta fórmula reconocemos la condición (1^s), y vemos, por tanto, que *cabe describir la independencia como un caso especial de selección.*

Los diversos teoremas asociados al nombre de Bayes son todos casos especiales del teorema de división. Bajo la asunción de que (α . γ) sea una subclase de β, o en símbolos,, que

$$\alpha.\gamma \subset \beta \tag{3^{bs}}$$

obtenemos a partir de (3) la *primera* forma (especial) de la regla de Bayes:

$$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = \frac{_{\alpha}F''(\gamma)}{_{\alpha}F''(\beta)} \qquad (3_{bs})$$

Podemos evitar el supuesto (3^{bs}) si introducimos la suma de las clases β_1, β_2, ..., β_n. Emplearemos el signo «Σ» *delante de designaciones de clases* análogamente a como hicimos cuando empleábamos el signo « + » *entre* ellas: podemos escribir, entonces, una *segunda* forma (universalmente válida) del teorema de Bayes del modo siguiente:

$$_{\alpha.\Sigma\beta_i}F''(\beta_i) = \frac{_{\alpha}F''(\beta_i)}{_{\alpha}F''(\Sigma\beta_i)}, \qquad (3_b)$$

Se puede aplicar al numerador de esta fórmula el teorema especial de adición, (2^s), si asumimos que las β_i no tienen miembros comunes con α, asunción que puede escribirse así:

$$N(\alpha.\beta_i.\beta_j) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (3/2^s)$$

En este supuesto obtenemos la *tercera* forma (especial) del teorema de Bayes, que es aplicable siempre en el caso de que las β_i sean propiedades primarias:

$$_{\alpha.\Sigma\beta_i}F''(\beta_i) = \frac{_{\alpha}F''(\beta_i)}{\Sigma_{\alpha}F''(\beta_i)}. \qquad (3/2_s)$$

Deducción de la primera forma de la fórmula binomial

(Para sucesiones finitas de segmentos imbricados, cf. el apartado 56.)

Puede decirse que la primera fórmula binomial *[1],

$$_{\alpha(n)}F''(m) = {}^{n}C_{m}\, p^{m} q^{n-m} \qquad (1)$$

—en que $p = {}_{\alpha}F''(1)$, $q = {}_{\alpha}F''(0)$ y $m \leqslant n$— está demostrada, en el supuesto de que α sea (al menos) libre-n—1 (despreciando los errores provinentes del último término: cf. el apartado 56), si podemos hacer patente que

$$_{\alpha(n)}F''(\sigma_{m}) = p^{m} q^{n-m} \qquad (2)$$

en donde «σ_m» designa un acervo-n concreto (si bien elegido arbitrariamente) que contenga m unos (lo que se pretende indicar con dicho símbolo es que lo dado es la ordenación completa de este acervo-n, o sea, no solamente el número de unos, sino sus posiciones en él). Pues, supongamos que se cumple (2) para todos los n, m y σ (es decir, para las distintas ordenaciones de los unos); entonces habrá —según un teorema combinatorio perfectamente conocido— ${}^{n}C_{m}$ modos distintos de distribuir los m unos en n lugares, y teniendo en cuenta el teorema especial de adición podemos afirmar (1).

Supongamos ahora que (2) está demostrado para un n cualquiera —esto es, para *un* n concreto y para todo m y todo σ que sean compatibles con aquél—. Vamos a demostrar que en este supuesto se cumple también para $n + 1$, o sea, demostraremos

$$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m} + 0) = p^{m} q^{n+1-m} \qquad (3,0)$$

y

$$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m} + 1) = p^{m+1} q^{(n+1)-(m+1)} \qquad (3,1)$$

en donde «σ_{m+0}» y «σ_{m+1}» representan, respectivamente, las sucesiones de longitud $n + 1$ que se obtienen a partir de σ_m al añadir al final un cero y un uno, respectivamente.

Asumamos que, para toda longitud n de los acervos-n (o segmentos) considerados, α sea (al menos) libre-n—1 (de secuelas); entonces,

*[1] Recuérdese que $\binom{m}{n}$ es otro modo usual de escribir el coeficiente binomial ${}^{n}C_{m}$, esto es, el número de modos diferentes en que es posible distribuir m objetos en n sitios (supuesto que sea $m < n$).

para un segmento de longitud $n + 1$ ha de considerarse que α es, por lo menos, libre-n. Denotemos con «$\acute{\sigma}_m$» la propiedad de ser sucesor de un acervo-n, σ_m; entonces podemos afirmar

$$_\alpha F''(\acute{\sigma}_m.0) = {_\alpha F''}(\acute{\sigma}_m).{_\alpha F''}(0) = {_\alpha F''}(\acute{\sigma}_m).q \qquad (4,0)$$

$$_\alpha F''(\acute{\sigma}_m.1) = {_\alpha F''}(\acute{\sigma}_m).{_\alpha F''}(1) = {_\alpha F''}(\acute{\sigma}_m).p \qquad (4,1)$$

Observemos ahora que es evidente que tiene que haber justamente tantos $\acute{\sigma}_m$ —esto es, sucesores de la sucesión «σ_m» en α— como sucesiones σ_m hay en $\alpha_{(n)}$, y, por tanto, que

$$_\alpha F''(\acute{\sigma}_m) = {_{\alpha_{(n)}}F''}(\sigma_m) \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta esta fórmula podemos transformar el segundo miembro de (4). Y, por la misma razón, tenemos

$$_\alpha F''(\acute{\sigma}_m.0) = {_{\alpha_{(n+1)}}F''}(\sigma_{m+0}) \qquad (6,0)$$

$$_\alpha F''(\acute{\sigma}_m.1) = {_{\alpha_{(n+1)}}F''}(\sigma_{m+1}). \qquad (6,1)$$

Con éstas podemos, a su vez, transformar el primer miembro de (4): es decir, al sustituir (5) y (6) en (4) llegamos a

$$_{\alpha_{(n+1)}}F''(\sigma_{m+0}) = {_{\alpha_{(n)}}F''}(\sigma_m).q \qquad (7,0)$$

$$_{\alpha_{(n+1)}}F''(\sigma_{m+1}) = {_{\alpha_{(n)}}F''}(\sigma_m).p \qquad (7,1)$$

Vemos, pues, que si suponemos que se cumple (2) para cierto n (y para todas las ordenaciones σ_m que le corresponden), podemos deducir (3) por medio de una inducción matemática; pero asumiendo primero que $m = 1$ y luego que $m = 0$ se advierte que (2) es realmente válida para $n = 2$ y para todo σ_m (en donde $m \leqslant 2$); luego podemos afirmar (3), y —en consecuencia— (2) y (1).

Un método para construir modelos de sucesiones aleatorias

(Cf. los apartados 58, 64 y 66.)

Como en el apartado 55, suponemos que para todo número finito n dado se puede construir un período generador, libre-n (de secuelas) y con equidistribución. En cada uno de estos períodos aparecerá al menos una vez cada acervo-x combinatoriamente posible (para $x \leqslant n + 1$) de unos y de ceros [*1].

a) Construimos un modelo de sucesión «absolutamente libre» (de secuelas) del modo siguiente. Escribimos primero un período libre-n, para un n arbitrariamente elegido, período que tendrá un número de términos finito, digamos n_1; luego otro período que sea por lo menos libre-n_1—1, y cuya longitud será n_2. En este último ha de aparecer al menos una sucesión que sea idéntica al período dado inicialmente (de longitud n_1): pues bien, lo reordenamos de modo que empiece precisamente con dicha sucesión (lo cual es siempre posible, según el análisis llevado a cabo en el apartado 55), y al resultado le llamamos segundo período. Escribimos ahora otro nuevo período que al menos sea libre-n_2—1, y buscamos en él la sucesión idéntica al *segundo período* (una vez reordenado); lo reordenamos de suerte que el tercer período comience por el segundo; etc. Obtenemos, de este modo, una sucesión cuya longitud aumenta muy rápidamente, y cuyo período inicial es el que habíamos escrito al empezar (que es la sucesión inicial del segundo período, y así sucesivamente). Si se determina una su-

---

[*1] Existen varios métodos constructivos que cabe aplicar a la tarea de construir un período generador de una sucesión libre-n con equidistribución. Damos un método sencillo: haciendo $x = n + 1$ preparamos primero la *tabla* de los 2^x acervos-x posibles de unos y ceros (ordenados con arreglo a una regla lexicográfica cualquiera, por orden de magnitud, digamos); iniciamos ahora el período escribiendo el último de estos acervos-n, que consta de x unos (y que tacharemos de la tabla); continuamos luego de acuerdo con la regla siguiente: añádase un cero al segmento inicial *siempre que esté permitido*, y si no es así, un uno («*siempre que esté permitido*» significa aquí, «si no ha aparecido ya el acervo-n final que formamos en el período inicial al hacer esto, y si —por tanto— no está ya tachado de la tabla»); se sigue procediendo de este modo hasta que queden tachados todos los acervos-n de la lista, y el resultado es una sucesión de longitud $2^x + x - 1$, que consta de, *a)* un período generador —de longitud $2^x = 2^{n+1}$— de una alternativa libre-n, y *b)* de los primeros n elementos del período siguiente (que están añadidos al período acabado de mencionar). Podemos decir que la sucesión construida de este modo es una sucesión libre-n «*mínima*», ya que cabe ver fácilmente que no puede existir un período generador (de una sucesión periódica libre-n) cuya longitud sea menor que 2^{n+1}.

El doctor L. R. B. Elton y yo hemos encontrado pruebas de la validez de la regla de construcción dada, y pretendemos publicar conjuntamente un trabajo sobre esta materia.

cesión inicial concreta y se especifican otras condiciones —por ejemplo, que los períodos que se formen no deben ser nunca más largos de lo necesario (de modo que serán *exactamente* libres-n_i—1, y no *al menos* libres-n_i—1); cabe perfeccionar este método de construcción hasta hacerlo *unívoco*, de suerte que defina una sucesión determinada, en la que podamos calcular para cada uno de sus términos si es un uno o un cero *[2]. Tenemos así una sucesión (determinada), construida de

---

*[2] Para tomar un ejemplo concreto de esta construcción —la de una *sucesión aleatorizada mínima*, como propongo ahora llamarla—, podemos comenzar con el período

$$0\ 1 \qquad (0)$$

de longitud $n_0 = 2$ (podemos decir que este período da origen a una alternativa libre-0). A continuación hemos de construir un período que sea libre-n_0 — 1, es decir, libre-1: el método de la nota *1 anterior nos da «1100» como período generador de una alternativa libre-1, que es necesario reordenar ahora para que empiece con la sucesión «01», a la que hemos llamado (0); el resultado de tal reordenación es

$$0\ 1\ 1\ 0 \qquad (1)$$

con $n_1 = 4$. Construimos en este momento el período libre-n_1-1 (es decir, libre-3), que determinamos por el método de la nota *1 citada, y resulta ser

$$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0$$

Lo reordenamos para que comience con nuestra sucesión inicial (1), con lo que obtenemos

$$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \qquad (2)$$

Como $n_2 = 16$, tenemos que construir después, por el método de la nota *1, un período libre-15, que llamaremos (3), y cuya longitud será $2^{16} = 65.536$. Una vez que tengamos este período libre-15, hemos de averiguar dónde aparece en él nuestra sucesión (2); reordenamos entonces (3) de suerte que comience con (2), y pasamos a construir (4), que tendrá la longitud $2^{65.536}$.

Puede llamar «sucesión aleatorizada *mínima*» a la que se construye de este modo, ya que, I) cada paso de su construcción consiste en construir un período libre-n mínimo para cierto n (cf. la nota *1 anterior), y II) la sucesión está construida de tal modo que, cualquiera que sea la etapa de su construcción, *comienza* siempre por un período libre-n mínimo. En consecuencia, este método garantiza que todo trozo inicial de longitud

$$m = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$$

es un período libre-n mínimo para el n mayor posible (esto es, para $n = (\log_2 m) - 1$).

Esta propiedad de «minimalidad» es muy importante: pues podemos obtener siempre sucesiones libres-n —o absolutamente libres— con equidistribución que comiencen por un segmento finito de una longitud m *cualquiera* que, por su parte, no tenga carácter aleatorio —sino que conste, por ejemplo, sólo de ceros, o sólo de unos, o que esté formado por cualquier otra ordenación intuitivamente «regular»—; lo cual hace ver que para las aplicaciones no basta el requisito de libertad-n, ni siquiera el de libertad absoluta, sino que es menester remplazarlo por algo así como la condición de que la libertad-n *esté patente desde el comienzo:* que es, precisamente, lo que logran las sucesiones aleatorizadas «mínimas», y del modo más radical posible. Sólo éstas, pues, establecen el tipo ideal de aleatoriedad; y para ellas *es posible demostrar inmediatamente la convergencia*, frente a lo que ocurre en los ejemplos *b)* y *c)* que damos más abajo. Véase también el apéndice *VI.

acuerdo con una regla matemática, y con frecuencias cuyos límites son,

$$_{\alpha}F'(1) = {}_{\alpha}F'(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Empleando el procedimiento utilizado en la demostración de la tercera forma de la fórmula binomial (apartado 60) o en la del teorema de Bernoulli (apartado 61), puede ponerse de manifiesto (con un grado cualquiera de aproximación) que *para cualquier valor frecuencial que podamos escoger* existen sucesiones que son «absolutamente libres», sin más condición que la de que exista, al menos, una sucesión absolutamente libre (condición cuyo cumplimiento acabamos de demostrar).

b) Puede emplearse ahora un método de construcción análogo para hacer ver que existen sucesiones que tienen una frecuencia media «absolutamente libre» (cf. el apartado 64), aun cuando no posean límite frecuencial. Para ello basta modificar el proceso *a)* de tal modo que, tras un número dado de aumentos de longitud, añadamos siempre a la sucesión un «bloque» (o «iteración») finito —por ejemplo, formado por unos— y cuya longitud sea tal que se llegue a cierta frecuencia dada, *p*, distinta de 1/2. Una vez alcanzada la frecuencia que acabamos de mencionar, la totalidad de la sucesión que se ha escrito (cuya longitud será m_i) se considera como sucesión inicial de un período libre-m_i—1 (con equidistribución), etc.

c) Finalmente, es posible construir de un modo semejante un modelo de sucesión que tenga *más de una* frecuencia media «absolutamente libre»: según *a)*, existen sucesiones que no tienen equidistribución y son «absolutamente libres», de modo que lo único que tenemos que hacer es combinar dos sucesiones de este tipo, (A) y (B) (cuyas frecuencias sean *p* y *q*), como se indica a continuación. Escribimos una sucesión inicial de (A); la buscamos en (B), y reordenamos el período de (B) que la precede de tal modo que comience con aquella sucesión. Empleamos ahora este período reordenado de (B) como sucesión inicial: la buscamos en (A) y reordenamos ésta; y así sucesivamente. Obtenemos de esta suerte una sucesión en la que aparecen una y otra vez unos términos hasta llegar a los cuales la sucesión es libre-n_i para la frecuencia relativa *p*—de la sucesión (A)—, pero en la que también aparecen una y otra vez unos términos hasta llegar a los cuales dicha sucesión es libre-n_i para la frecuencia *q* —de (B)—; como en este caso los números n_i crecen sin fin y sin límite, hemos conseguido un método de construcción de una sucesión que tiene dos «frecuencias medias» diferentes, ambas «absolutamente libres» (pues hemos determinado (A) y (B) de modo que sus límites frecuenciales sean distintos).

Nota. Está asegurada la aplicabilidad del teorema especial de multiplicación al problema clásico de echar dos dados, X e Y, simultáneamente (y a problemas relacionados con éste), si —por ejemplo— hacemos la estimación hipotética de que la «sucesión combinada» (como podemos llamarla) —esto es, la sucesión α que tiene las tiradas con X por términos impares y las con Y por términos pares— es aleatoria.

Examen de una objeción. El experimento de la ranura doble

(Cf. el apartado 76) *[1].

El experimento imaginario que describimos abajo —en el párrafo *a)*— está encaminado a refutar mi aserción de que la teoría cuántica es compatible con mediciones (no predictivas) simultáneas arbitrariamente exactas de la posición y el momento de una partícula.

a) Sea A un átomo radiante, y hagamos que la luz procedente de él caiga sobre una pantalla *Pn* después de haber pasado a través de dos ranuras, Rn_1 y Rn_2. Según Heisenberg, en este caso podemos medir exactamente, ya sea la posición de A, ya el momento de la radiación (pero no ambas cosas): si medimos exactamente la posición (con esta operación se hace «difuso» o «borroso» el momento), hemos de suponer que A emite la luz en ondas esféricas; pero si medimos el momento con exactitud —por ejemplo, midiendo los retrocesos debidos a la emisión de fotones (con lo cual haremos «difusa» o «borrosa» la posición)— seremos capaces de calcular exactamente la dirección y el momento de los fotones emitidos, con lo cual hemos de considerar a la radiación corpuscular («agujas de radiación»). Así pues, a las dos operaciones distintas corresponden dos tipos distintos de radiación, de suerte que obtenemos dos resultados experimentales diferentes. Pues si medimos la posición con exactitud, obtenemos unas franjas de interferencia en la pantalla: se trata de una fuente luminosa puntual —siempre que su posición puede medirse exactamente *es* puntual —que emite luz coherente; si, por otra parte, medimos con exactitud el momento, no aparecen franjas de interferencia (en la pantalla aparecen únicamente relámpagos luminosos o centelleos una vez que los fotones han atravesado las ranuras, lo cual está en consonancia con el hecho de que la posición es «difusa» o «borrosa», y de una fuente luminosa no puntual no emite una luz coherente). Si supusiéramos que podíamos medir con exactitud tanto la posición como el momento, entonces el átomo tendría que emitir, por una parte —y de acuerdo con la teoría ondulatoria— ondas esféricas continuas que producirían franjas de interferencia, y, por otra, un haz

*[1] Véanse, asimismo, el apéndice *XI, y mi *Postscript*, capítulo *V, apartado *110. Opino actualmente que sería necesario tratar de otra forma el experimento de la doble ranura, pero que la interpretación que se propone en este apéndice conserva todavía cierto interés. Las observaciones que hago en *e)* contienen, según me parece, una crítica que sigue siendo válida del intento de explicar el dualismo de corpúsculo y onda a base de la «complementaridad» —intento que, al parecer, ha sido abandonado después por algunos físicos.

corpuscular incoherente de fotones (si fuéramos capaces de calcular la trayectoria de cada fotón no tendríamos jamás nada semejante a una «interferencia», debido al hecho de que los fotones ni se anulan mutuamente ni entran en interacción de ningún otro modo). Por tanto, la suposición de que se realicen simultáneamente mediciones exactas de posición y de momento lleva a dos predicciones contradictorias entre sí: pues, por un lado, nos conduce a predecir que aparecerán franjas de interferencia, y, por otro, a que no aparecerán.

b) Voy a reinterpretar estadísticamente este experimento imaginario. Me ocuparé primero del intento de medir exactamente la posición. Sustituyo el átomo radiante *único* por un grupo de átomos, pero de tal modo que emitan luz coherente que se propague en forma de ondas esféricas: esto se consigue empleando una segunda pantalla que esté perforada por una pequeña abertura A, y colocada entre el grupo de átomos y la primera pantalla de forma que la abertura A se encuentre exactamente en el sitio ocupado antes por el átomo radiante único A. El grupo mencionado emite luz que sufre una selección según una posición dada al pasar a través de la abertura A, y que después se difunde en forma de ondas esféricas continuas: *remplazamos así el átomo único de posición determinada con* exactitud por un caso estadístico de selección puramente de acuerdo con la posición.

c) Substituiremos de modo análogo el átomo con momento medido exactamente por una selección pura según un momento dado; o, dicho de otro modo, por un haz monocromático de fotones que se muevan según trayectorias paralelas a partir de una fuente luminosa (no puntual).

En cada uno de estos casos obtenemos el resultado experimental correcto: franjas de interferencia en el caso *b)* y ausencia de ellas en el *c)*.

d) ¿Cómo hemos de interpretar el tercer caso, que —según se admite— lleva a dos predicciones mutuamente contradictorias? Para averiguarlo imaginemos que hemos observado exactamente la trayectoria del átomo A, esto es, tanto su posición como su momento: observaremos que emite fotones aislados y que retrocede en cada emisión; cada retroceso lo desplaza a otra posición, y cada vez el desplazamiento es en una dirección distinta. Si suponemos que el átomo considerado irradia de este modo durante cierto período de tiempo (no nos ocuparemos acerca de si absorbe o no energía durante el mismo), pasará por una serie de posiciones distintas durante él, que abarcarán un volumen considerable; y, por esta razón, no nos está permitido remplazarle por un grupo de átomos puntual, sino solamente por un grupo distribuido sobre un volumen espacial considerable. Además, puesto que el átomo del caso irradia en todas direcciones, hemos de sustituirlo por un grupo de átomos que irradia de esta misma forma. Así, pues, no obtenemos un caso puro, no llegamos a tener una radiación coherente, ni franjas de interferencia.

Otras objeciones parecidas a la que hemos examinado pueden reinterpretarse estadísticamente siguiendo la misma marcha que en este ejemplo.

e) Por lo que respecta a nuestro análisis de este experimento imaginario, yo diría que —contrariamente a lo que podría suponerse a primera vista— el argumento *a)* es, en todo caso, enteramente insuficiente para elucidar el llamado problema de la complementaridad (o del dualismo de ondas y corpúsculos). Pretende hacerlo poniendo de manifiesto que el átomo es capaz de emitir solamente *u* ondas coherentes *o* fotones incoherentes, y que, *por tanto*, no se plantea ninguna contradicción, ya que los dos experimentos son mutuamente excluyentes. Pero esto último, simplemente no es verdad: pues podemos, desde luego, combinar una medición de la posición no demasiado exacta con una de momento tampoco muy exacta; y, en este caso, el átomo ni emite ondas enteramente coherentes ni fotones completamente incoherentes. Es evidente que mi propia interpretación estadística no encuentra la menor dificultad para tratar semejantes casos intermedios, aun cuando nunca he pretendido resolver con ella el problema de la dualidad entre ondas y corpúsculos. Me parece que difícilmente será posible llegar a una solución realmente satisfactoria de este problema dentro del marco de la física cuántica estadística (la teoría corpuscular de Heisenberg y de Schrödinger en la interpretación de Born de 1925-1926), pero pienso que quizá lo sea en una física cuántica de campos de onda o en la «segunda cuantización» (la teoría de Dirac de la emisión y absorción y la teoría de campos de onda de la materia de Dirac, Jordan, Pauli, Klein, Mie y Wiegner, de 1927-1928; cf. la nota 2 de la introducción al apartado 73).

APÉNDICE VI.

Sobre un procedimiento de medir no predictivo

(Cf. el apartado 77) *1.

Supongamos que se somete a selección de acuerdo con el momento (gracias a interponer un filtro) un haz no monocromático de partículas, por ejemplo, un haz luminoso (si se tratase de un haz de electrones, en lugar del filtro se utilizaría un campo eléctrico perpendicular a la dirección del rayo, con objeto de analizar su espectro). Supondremos con Heisenberg que este proceso no modifica los momentos —o, dicho con más precisión, las componentes de éstos en la dirección x—, ni, por consiguiente, las *velocidades* (o sus componentes según x) de las partículas así seleccionadas.

Detrás del filtro colocamos un contador de Geiger (o una cinta móvil de película fotográfica) con objeto de medir el instante en

---

*1 Heisenberg —que habla de *medir* o de *observar* en lugar de hacerlo de *seleccionar*— se vale de la descripción de un experimento imaginario, mediante la cual presenta la situación del modo siguiente: si queremos observar la *posición* del electrón hemos de emplear luz de frecuencia muy elevada, que entrará en interacción fuertemente con él, y *perturbará*, por tanto, su momento; y si queremos observar este momento tenemos que utilizar luz de baja frecuencia, que (apenas) altera el momento, pero que no sirve para determinar la posición. A este respecto tiene mucha importancia que *la incertidumbre del momento se debe a una perturbación, mientras que la de la posición no proviene de nada semejante:* es resultado, más bien, de *evitar* toda perturbación considerable del sistema (véase apéndice *XI, punto 9).

Mi antiguo argumento —que se basaba en esta observación— se desenvuelve ahora del modo siguiente: puesto que una determinación del momento no afecta a éste, ya que su interacción con el sistema es muy débil, tampoco ha de afectar a la posición (aunque no consiga *revelárnosla);* pero esta posición latente puede hacerse patente por medio de una segunda medición; y dado que la primera (apenas) había alterado el estado del electrón, podemos calcular el pasado de éste, no solamente *entre* las dos mediciones, sino antes de la primera.

No veo cómo podría Heisenberg eludir esta conclusión, a menos que modifique esencialmente sus razonamientos (dicho de otro modo: continúo creyendo que mis argumentos y el experimento del apartado 77 pueden servir para destacar cierta inconsecuencia existente en la discusión heisenberguiana de la observación de electrones). Pero en la actualidad creo que estaba equivocado al suponer que lo que era válido para las «observaciones» o «experimentos» imaginarios de Heisenberg lo era también para mis «selecciones»: como Einstein hace ver (en el apéndice *XII), no se cumple en lo que respecta a un filtro que actúe sobre un fotón, ni tampoco para un campo eléctrico perpendicular a la dirección del haz de electrones —que mencionaba (juntamente con el filtro) en el primer párrafo de este apéndice—; pues el ancho del haz tiene que ser considerable para que haya electrones que se muevan paralelamente al eje x, y, por tanto, no es posible calcular con precisión la posición que tenían antes de entrar en el campo, una vez que han sufrido una deflexión debido a éste. Con lo cual quedan invalidados los razonamientos de este apéndice, del siguiente y del apartado 77.

que llegan los corpúsculos: lo cual nos permitirá calcular las coordenadas x de sus posiciones respectivas en cualquier instante anterior al de su llegada, ya que conocemos sus velocidades. Vamos a considerar ahora dos supuestos posibles. Si, por una parte, se supone que las coordenadas x de las posiciones de las partículas no han sufrido interferencia alguna por efecto de la medición de sus momentos, entonces es válido extender la medida de posiciones y momentos al período de tiempo que precede al instante de selección del momento (por medio del filtro). Si, por otro lado, se supone que dicha selección interfiere con las coordenadas x de las posiciones de las partículas, podemos calcular la trayectoria de éstas con exactitud solamente para el intervalo temporal *entre* las dos mediciones.

Ahora bien; la asunción de que la posición de los corpúsculos en la dirección de su marcha resulta afectada de un modo imprevisible por una selección que se efectúe de acuerdo con un momento dado, significa lo mismo que afirmar que dicha selección alteraría de forma no calculable la coordenada de posición de la partícula. Pero, puesto que su velocidad no se ha alterado, aquel supuesto sería equivalente al de que —por efecto de dicha selección— el corpúsculo ha tenido que saltar *discontinuamente* (con velocidad superior a la de la luz) a otro punto de su trayectoria.

Pero este supuesto es incompatible con la teoría cuántica tal como se la acepta actualmente. Pues, si bien esta teoría permite saltos discontinuos, sólo lo hace en el caso de partículas en el interior de un átomo (dentro de una gama de autovalores discontinuos, pero no para partículas libres dentro de una gama de autovalores continuos).

Es de sospechar que —para escapar a las conclusiones a que acabamos de llegar, o para conservar el principio de indeterminación— sea posible idear una teoría que modifique la teoría cuántica de tal modo que ésta sea compatible con el supuesto de que se altere la posición al seleccionar el momento; pero incluso semejante teoría —a la que podría llamar «teoría de la indeterminación»— sólo podría deducir consecuencias estadísticas del principio de indeterminación, y, por tanto, solamente cabría corroborarla estadísticamente; el principio mencionado sería en ella únicamente un enunciado probabilitario formalmente singular, aunque su contenido trascendería lo que he llamado las «relaciones estadísticas de dispersión»: pues, como pondré de manifiesto con un ejemplo, estas relaciones son compatibles con el supuesto de que al seleccionar el momento no se perturbe la posición. *Así pues, este último supuesto no nos permite inferir la existencia de un «caso super-puro», que está prohibido por las relaciones de dispersión.* Este enunciado hace ver que el método de medición que he examinado no afecta a las fórmulas de Heisenberg interpretadas estadísticamente; y, por ello, puede decirse que ocupa en mi interpretación estadística algo así como el mismo «lugar lógico» que ocupa —en la interpretación de Heisenberg— el enunciado de este físico que niega «realidad física» a las mediciones exactas; en realidad, mi enunciado puede considerarse como la traducción del de Heisenberg al lenguaje estadístico.

Mediante las consideraciones que siguen puede verse que el enunciado en cuestión es correcto. Podríamos tratar de obtener un «caso super-puro» invirtiendo el orden de los pasos que se dan en el experimento: seleccionaríamos primeramente, digamos, una posición dentro de la dirección x (la dirección de movimiento) mediante un obturador muy rápido; y después seleccionaríamos el momento por medio de un filtro. Podría pensarse que esto es perfectamente factible, ya que a consecuencia de medir la posición aparecerían toda clase de momentos, y el filtro seleccionaría de entre ellos —sin alterar la posición— precisamente los que cayesen dentro de una estrecha gama. Pero estas consideraciones son erróneas. Pues si un «obturador instantáneo» selecciona un grupo de partículas del modo indicado, entonces los paquetes de onda de Schrödinger (obtenidos por superposición de frecuencias diversas) nos dan solamente *probabilidades* de la aparición de partículas con el momento prefijado en el grupo de éstas (probabilidades que han de interpretarse estadísticamente); y entonces, para todo margen finito de momentos, $\triangle p_x$, dicha probabilidad tiende a 0 en cuanto hagamos infinitamente pequeña la longitud del tren de ondas —esto es, en cuanto midamos la posición con una precisión arbitraria (abriendo el obturador instantáneo durante un tiempo arbitrariamente breve)—; y, de parecido modo, la probabilidad tiende a 0 durante un período finito cualquiera en que permanezca abierto el obturador instantáneo —o sea, para cualquier valor del margen $\triangle x$ de posición— con tal de que $\triangle p_x$ tienda a 0. Cuanto más exactamente seleccionemos la posición y el momento, tanto más improbable será que encontremos partículas tras el filtro. Pero esto quiere decir que para que encontremos corpúsculos detrás del filtro será menester un número muy elevado de experimentos, y que, además, no seremos capaces de predecir en cuáles de ellos los encontraremos en el lugar mencionado; así pues, en modo alguno podremos evitar que las partículas aparezcan a intervalos dispersos aleatoriamente, y de ahí que no seamos capaces de producir de este modo un agregado de ellas que sea más homogéneo que un caso puro.

Resulta que hay un experimento crucial relativamente sencillo para decidir entre la «teoría de la indeterminación» (que hemos descrito un poco más arriba) y la teoría cuántica. Según la primera, *deben llegar fotones durante cierto tiempo a una pantalla situada* detrás de un filtro sumamente selectivo (o un espectrógrafo), incluso después de la extinción de la fuente luminosa; y, además, tal «resplandor póstumo» originado por el filtro tiene que durar tanto más cuanto más selectivo sea éste *2.

---

*2 Así precisamente sucederá, según las observaciones que hace Einstein; reproducidas aquí en el apéndice *XII.

Observaciones acerca de un experimento imaginario

(Cf. el apartado 77) *1.

Podemos partir del supuesto de que $\mathbf{a}_1$ y $|\mathbf{b}_1|$ están medidos —o seleccionados— con un grado de precisión arbitrario. Teniendo en cuenta el resultado a que se ha llegado en el apéndice VI, podemos asumir que puede medirse el momento absoluto, $|\mathbf{a}_2|$, de la partícula que llega a X en la dirección PX, con un grado de precisión también arbitrario; según lo cual podemos determinar (empleando el principio de conservación de la energía) $|\mathbf{b}_2|$ con la precisión que queramos. Igualmente es posible medir con una precisión arbitraria la posición de Rn y de X en los instantes en que llegan a X las partículas de [A]. Así pues, lo único que necesitamos investigar es la situación en lo que respecta a las indeterminaciones $\triangle \mathbf{a}_2$ y $\triangle \mathbf{b}_2$ —que se deben a las indeterminaciones en las *direcciones* correspondientes— y el vector $\triangle \mathbf{P}$, referente a la indeterminación de la posición de P —y que es también consecuencia de la indeterminación de la *dirección*, esto es, de la dirección PX.

Si el haz PX atraviesa una ranura situada en X, se produce una indeterminación, φ en la dirección (debida a la difracción que acaece en la ranura). Podemos hacer el ángulo φ todo lo pequeño que queramos sin más que hacer $|\mathbf{a}_2|$ suficientemente grande, ya que tenemos

$$\varphi \cong \frac{h}{r . |\mathbf{a}_2|} \tag{1}$$

en donde r es el ancho de la ranura; pero por este método es imposible disminuir $|\triangle \mathbf{a}_2|$: sólo podría hacerlo cuando aumentase r, lo cual llevaría a un aumento de $|\triangle \mathbf{P}|$, ya que tenemos

$$|\Delta \mathbf{a}_2| = \varphi \, |\mathbf{a}_2| \tag{2}$$

que, recordando (1), conduce a

$$|\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r} \tag{3}$$

lo cual hace ver que $|\triangle \mathbf{a}_2|$ es independiente de $|\mathbf{a}_2|$.

---

*1 Para una crítica de algunas de las asunciones subyacentes al apartado 77 y a este apéndice, véase la nota *1 del apéndice VI.

Debido al hecho de que, para todo r previamente elegido, podemos hacer φ tan pequeño como queramos sin más que aumentar $|\mathbf{a}_2|$, nos es dado hacer también tan pequeña como queramos la componente $\triangle \mathbf{a}_2$ en la dirección PX —que denotaremos con «$(\triangle \mathbf{a}_2)_x$» —: lo cual podemos conseguir sin interferir con la precisión de la medida de la posición de P, ya que ésta se hace también más precisa cuando $|\mathbf{a}_2|$ aumenta y r disminuye. Queremos ahora poner de manifiesto que para $(\triangle \mathbf{b}_2)_y$ —esto es, para la componente PY de $\triangle \mathbf{b}_2$— es válido el razonamiento correspondiente.

Como (en virtud de nuestro supuesto) podemos hacer $\triangle \mathbf{a}_1 = 0$, a partir de la conservación del momento llegamos a

$$\Delta \mathbf{b}_2 = \Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{a}_2 \tag{4}$$

Para toda terna dada de $\mathbf{a}_1$, $|\mathbf{b}_1|$ y $|\mathbf{a}_2|$, $\triangle \mathbf{b}_1$ depende directamente de φ, lo cual quiere decir que podemos tener un dispositivo tal que se cumpla

$$|\Delta \mathbf{b}_1| \cong |\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r} \tag{5}$$

y —por tanto— que también sea válida

$$|\Delta \mathbf{b}_1| - |\Delta \mathbf{a}_2| \cong \frac{h}{r} \tag{6}$$

Además, por analogía con (2) tenemos

$$|\Delta \mathbf{b}_2| \cong \Psi . |\mathbf{b}_2|, \tag{7}$$

en donde «ψ» denota la indeterminación en la dirección de $\mathbf{b}_2$. Por tanto, y a la vista de (4) y (5),

$$\Psi \cong \frac{|\Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{a}_2|}{\mathbf{b}_2} \cong \frac{h}{r . |\mathbf{b}_2|}\ ; \tag{8}$$

Pero esto quiere decir: por pequeña que hagamos r, podemos hacer siempre ψ —y, con ella, $(\triangle \mathbf{b}_2)_y$— tan pequeña como queramos sin más que emplear valores suficientemente grandes para el momento $|\mathbf{b}_2|$: y esto, de nuevo, sin interferir con la precisión con que se mida la posición P.

Lo cual hace ver que es posible hacer tan pequeño como queramos cada uno de los dos factores del producto $(\triangle \mathbf{P})_y . (\triangle \mathbf{b}_2)_y$, de modo independiente entre sí. Mas para refutar la aserción de Heisenberg referente a los límites de precisión alcanzables, hubiera bastado poner de manifiesto que cabe hacer tan pequeño como se desee uno de estos factores sin que por ello se haga aumentar al otro más allá de todo límite.

Puede, además, advertirse que si se elige convenientemente la dirección PX se puede determinar la *distancia* PX de tal modo que $\triangle \mathbf{P}$ y $\triangle \mathbf{b}_2$ sean paralelos, y, por tanto —si φ es suficientemente pequeño—, normales a PY[1]. En consecuencia, tanto la precisión del momento en esta dirección como —incluso— la precisión de la posición (en la misma dirección), se hacen *independientes de la precisión con que se mida la posición de* P (si empleamos valores elevados de $|\mathbf{a}_2|$, esta última posición depende principalmente de la pequeñez de r): *ambas dependen exclusivamente de la precisión con que se midan la posición y el momento de la partícula que llega a* X *en dirección* PX, y de la pequeñez de ψ (lo cual corresponde al hecho de que la precisión, $(\triangle \mathbf{a}_2)_x$, de la partícula que llega a X depende de la pequeñez de φ).

Se observa que —en lo que respecta a la precisión de las medidas— la medición (aparentemente no predictiva) del corpúsculo de [A] que llega a X y la predicción de la trayectoria del corpúsculo de [B] que procede de P, son completamente *simétricas*.

---

[1] En el curso de una discusión de mi experimento imaginario, Schiff me señaló el hecho de que puede tener trascendencia un examen del grado de exactitud de una medida tomada en una dirección perpendicular a $\triangle s$.

Quiero manifestar aquí mi agradecimiento más cordial al doctor K. Schiff por su fructuosa colaboración conmigo durante cerca de un año.

NUEVOS APENDICES

Aun cuando me he encontrado, con gran sorpresa mía, que aún podía asentir a casi todas las opiniones filosóficas expresadas en este libro, e incluso a la mayoría de las relativas a la probabilidad —campo en que mis ideas han cambiado más que en ningún otro—, me ha parecido que era menester incluir en él parte del material nuevo que se ha acumulado durante estos años. Su cantidad es bastante considerable, porque no he dejado de trabajar en los problemas planteados en esta obra, y, por ello, no era posible introducir en los nuevos apéndices todos los resultados de trascendencia. Mencionaré, en especial, uno que falta aquí: es *la interpretación de propensiones de la probabilidad* (como yo la llamo); pues su exposición y discusión ha crecido, bien contra mis intenciones, hasta convertirse en el núcleo principal de un nuevo libro.

El título de éste es *Postscript: After Twenty Years* **[1]; se trata de una continuación del presente libro, que contiene muchos asuntos que guardan una relación estrecha con éste, aparte de la teoría de la probabilidad. A este respecto aludiré también a dos trabajos míos que podría haber incluido entre los apéndices si no fuese opuesto a ampliarlos aún más: son «Three Views Concerning Human Knowledge» **[2] y «Philosophy of Science: A Personal Report» **[3] [1].

Los dos primeros apéndices nuevos contienen tres cortas notas, publicadas entre 1933 y 1938, y que están relacionadas muy de cerca con este libro. Temo que son difíciles de leer: su concisión es excesiva, y he sido incapaz de hacerlos más legibles sin introducir cambios que hubieran disminuido su valor como documentos.

Los apéndices *II a *V son algo técnicos —al menos, lo son demasiado para mi gusto—. Pero semejantes tecnicismos son necesarios, me parece, para resolver el siguiente problema filosófico: *el grado de corroboración, o de aceptabilidad, de una teoría, ¿es una probabilidad*, como han creído tantos filósofos? O, dicho de otro modo, *¿obedece a las reglas del cálculo de probabilidades?*

En el libro mismo había contestado a esta pregunta, diciendo «*no*»; a esto replicaron algunos filósofos, «pero yo me refiero al hablar de probabilidad (o de corroboración, o de confirmación) a una cosa distinta de lo que usted quiere decir». Y ha sido necesario entrar en tecnicismos para justificar mi rechazo de esta evasiva respuesta (que

---

**1 *Post scriptum: veinte años después*.—*N. del T.*

**2 «Tres tesis acerca del conocimiento humano».—*N. del T.*

**3 «La filosofía de la ciencia: un informe personal».—*N. del T.*

1 Publicados respectivamente en *Contemporary British Philosophy 3*, ed. por H. D. Lewis, 1956, págs. 355-388, y en *British Philosophy in the Mid-Century*, ed. por C. A. Mace, 1957, págs. 153-191. Ambos se incluyen en mi *Conjectures and Refutations*.

amenaza reducir la teoría del conocimiento a un mero verbalismo): era preciso formular las reglas («axiomas») del cálculo de probabilidades, y averiguar el papel que desempeña cada una de ellas; pues había que tomar el cálculo mencionado en su sentido más amplio, y admitir en él sólo las reglas esenciales, con objeto de no prejuzgar si el grado de corroboración es o no una de sus interpretaciones posibles. En 1935 comencé estas investigaciones, y he incluido en el apéndice *II un breve informe sobre algunos de mis primeros estudios; en los apéndices *IV y *V doy un esquema de mis resultados más recientes. En todos estos apéndices se afirma que, aparte de las interpretaciones clásica, lógica y frecuencial de la probabilidad —de la que me había ocupado en el libro— *hay muchas interpretaciones posibles de la idea de probabilidad y del cálculo de probabilidades:* de este modo preparan el camino para lo que después he llamado la *interpretación de propensiones* de la probabilidad[2].

Mas no solamente tenía que examinar las reglas del cálculo de probabilidades, sino también que formular *reglas para la evaluación de contrastaciones*, esto es, para el grado de corroboración; lo cual llevé a cabo en una serie de tres estudios, que he reimpreso aquí en el apéndice *IX. En cuanto a los apéndices *VII y *VIII, forman una especie de eslabón entre mi elaboración de la probabilidad y la de corroboración.

Espero que los restantes tengan interés tanto para los filósofos como para los científicos, especialmente los que se ocupan del desorden objetivo y de los experimentos imaginarios. Por fin, el apéndice *XII consiste en una carta de Albert Einstein, que se publica aquí por primera vez, con la amable autorización de sus albaceas literarios.

---

[2] Cf. mi artículo «The Propensity Interpretation and the Quantum Theory», en *Observation and Interpretation*, ed. por S. Körner, 1957, págs. 65-70 y 88 y sigs. Véanse también los dos trabajos mencionados en la nota precedente, especialmente las páginas 388 y 188, respectivamente.

Dos notas sobre inducción y demarcación (1933-1934)

La primera de las notas que vuelvo aquí a sacar a luz es una carta al editor de *Erkenntnis*. La segunda es una colaboración a un debate celebrado en una conferencia filosófica en Praga, en 1934; se publicó por primera vez en *Erkenntnis* en 1935, formando parte del informe sobre dicha conferencia.

1

La carta al editor se publicó originalmente en 1933, en *Erkenntnis* **3** (es decir, en *Annalen der Philosophie,* **11**), núms. 4-6, págs. 426 y siguientes. He fragmentado algunos de sus párrafos con objeto de facilitar la lectura.

Esta carta surgió por el hecho de que, por entonces, varios miembros del Círculo de Viena debatían ampliamente mis tesis, incluso por escrito (cf. la nota 3), aun cuando no se había publicado —en parte debido a su tamaño— ninguno de mis manuscritos (así, mi libro *Logik der Forschung* tuvo que ser cercenado hasta reducirlo a una fracción de su tamaño original para poder publicarse), que algunos miembros del Círculo habían leído. En la carta acentué la diferencia entre el problema de un criterio de *demarcación* y el pseudoproblema de un criterio de *sentido* (así como el contraste entre mis opiniones y las de Schlick y Wittgenstein), movido por el hecho de que ya entonces se debatían mis tesis —en el Círculo— bajo la interpretación equivocada de que yo abogaba por el remplazamiento de un criterio de sentido, el de la verificabilidad, por otro, el de la falsabilidad: mientras que, en realidad, yo no me ocupaba del problema del *sentido,* sino del de la *demarcación.* Como puede verse en mi carta, ya en 1933 traté de corregir esta interpretación errónea de mis opiniones; lo mismo intenté en mi *Logik der Forschung,* y he seguido intentándolo desde entonces: mas parece que mis amigos positivistas siguen sin poder advertir la diferencia. La mala inteligencia a que me refiero me impulsó en la carta a señalar la diversidad entre mis opiniones y las del Círculo de Viena (y a insistir sobre ella); y, en consecuencia, algunos supusieron —equivocadamente— que las mías habían sido elaboradas originariamente como crítica a las de Wittgenstein. En realidad, yo había formulado el problema de la demarcación y del criterio de falsabilidad o contrastabilidad en el otoño de 1919, años antes de que las tesis de este autor se convirtieran en un asunto de debate en Viena (cf. mi trabajo «Philosophy of Science: A personal Report», que ahora está incluido en *Conjectures and Refutations):* lo cual explica por qué en cuanto supe algo acerca del nuevo criterio de *sentido* del Círculo —el de verificabilidad— lo contrapuse a mi criterio de falsabilidad, que es un criterio de *demarcación* encaminado a delimitar los sistemas de enunciados científicos frente a los sistemas —perfectamente llenos de sentido— de enunciados metafísicos. (En cuanto al palabreo absurdo y carente de sentido, no pretendo que mi sistema le sea aplicable.)

He aquí la carta de 1933:

Un criterio del carácter empírico de los sistemas teóricos

1) *Cuestión preliminar.* El *problema de Hume de la inducción* —la cuestión de la validez de las leyes naturales— procede de una contradicción aparente entre el principio del empirismo (el de que sólo la «experiencia» puede decidir sobre la verdad o falsedad de enunciados fácticos) y el haberse dado cuenta Hume de que los razonamientos inductivos (o generalizadores) no tienen validez.

Schlick [1], influido por Wittgenstein, cree que sería posible resolver esta contradicción adoptando el supuesto de que las leyes naturales «no son auténticos enunciados», sino «reglas para la transformación de enunciados» [*1]: esto es, que sean un tipo particular de «pseudoenunciados».

Este intento de resolver el problema (si bien me parece ser en *todo caso una solución verbal*) comparte con todos los intentos anteriores —o sea, con el *apriorismo*, convencionalismo, etc.— una suposición carente de fundamento: la de que todos los enunciados auténticos han de ser, en principio, enteramente decidibles, es decir, verificables o falsables; o —dicho con más precisión— que para todo auténtico enunciado han de ser lógicamente posibles una verificación empírica (definitiva) y una falsación empírica (también definitiva).

Si eliminamos tal asunción cabe resolver de un modo sencillo la contradicción que constituye el problema de la inducción: podemos interpretar de un modo perfectamente coherente las leyes naturales —o las teorías— como auténticos enunciados que son *parcialmente decidibles:* esto es, que por razones lógicas no son verificables, sino que *sólo son falsables, de un modo asimétrico;* pues serían enunciados que se contrastan sometiéndolos a intentos sistemáticos de falsarlos.

La solución que aquí propongo tiene la ventaja de preparar también

[1] SCHLICK, *Die Naturwissenschaften* **19** (1931), núm. 7, pág. 156.

[*1] Para captar lo que quería decir Schlick hubiera sido mejor decir: «reglas para la formación o transformación de enunciados». El texto alemán dice: «*Anweisungen zur Bildung von Aussagen»;* es obvio que pueda traducirse «Anweisungen» por «reglas»; pero «Bildung» tenía escasamente en aquella época ninguna de las connotaciones técnicas que luego han llevado a distinguir claramente entre la «formación» y la «transformación» de enunciados.

el camino para resolver el segundo —y más fundamental— de los dos problemas de la teoría del conocimiento (o de la teoría del método empírico). Me refiero al siguiente:

2) *Problema principal.* Este es el *problema de la demarcación* (el problema kantiano de los límites del conocimiento científico), que puede definirse como el de encontrar un criterio mediante el cual podamos distinguir entre aserciones que pertenecen a las ciencias empíricas y las que podríamos llamar «metafísicas».

Según una solución propuesta por Wittgenstein [2], se logra la demarcación buscada mediante la idea de «significado» o «sentido»: toda proposición con sentido —o, con significado— tiene que ser una función veritativa de proposiciones «atómicas», esto es, ha de podérsela reducir lógicamente de un modo completo a enunciados singulares de observación (o ha de ser deductible de ellos). Si un supuesto enunciado resulta no poderse reducir del modo dicho, entonces es «carente de sentido», «absurdo», «metafísico» o una «pseudoproposición». Así pues, la *metafísica sería un palabreo absurdo y carente de sentido.*

Podría parecer que los positivistas, al trazar esta línea de demarcación, han conseguido acabar con la metafísica de una manera más completa que los antimetafísicos anteriores; sin embargo, no solamente ocurre que han aniquilado la metafísica, sino que lo mismo han hecho con la ciencia natural: pues las leyes de la Naturaleza son tan poco reducibles a enunciados de observación como los discursos metafísicos (recuérdese el problema de la inducción); si se aplicase consecuentemente el criterio de sentido de Wittgenstein, cobrarían el aspecto de «pseoudoproposiciones carentes de sentido», y, por tanto, el de algo «metafísico». Con lo cual se hunde la tentativa de trazar una línea de demarcación.

Puede eliminarse el dogma del significado o del sentido —y al par los pseudoproblemas a que ha dado lugar— si adoptamos el *criterio de falsabilidad* (o sea, el de una decidibilidad—al menos—unilateral o asimétrica) como criterio de demarcación. Según éste, los enunciados y los sistemas de enunciados nos transmiten una información acerca del mundo empírico solamente si son capaces de chocar con la experiencia; o, con mayor precisión, sólo si pueden ser *contrastados sistemáticamente:* es decir, si son susceptibles de ser sometidos a contraste (de acuerdo con una «decisión metodológica») de tal modo que *pudieran* quedar refutados [3].

De esta forma, el reconocimiento de los enunciados unilateralmente decidibles no sólo nos permite resolver el problema de la in-

---

[2] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico Philosophicus* (1922).

[3] Carnap menciona este procedimiento de contrastar en *Erkenntnis* **3**, págs. 223 y sigs., llamándolo «procedimiento B». Véase también DUBISLAV, *Die Definition*, 3.ª edición, págs. 100 y sigs. * Añadido en 1957: No se trata de una referencia a Carnap, sino a otros trabajos míos que este autor menciona y acepta en el artículo referido; Carnap reconocía explícitamente que yo era el autor de lo que él designaba como «procedimiento B» *(«Verfahren B»).*

ducción (obsérvese que únicamente existe un tipo de razonamiento que se mueva en dirección inductiva: el *modus tollens*, que es deductivo), sino, asimismo, el problema más fundamental de la demarcación, que ha dado origen a casi todos los demás de la epistemología. Pues nuestro criterio de falsabilidad ha discriminado con suficiente precisión los sistemas teóricos de las ciencias empíricas de los de la metafísica (y de los sistemas convencionalistas y los tautológicos), sin aseverar, por ello, la carencia de sentido de la metafísica (la cual, desde un punto de vista histórico, puede observarse que ha sido la fuente de que han brotado las teorías de las ciencias empíricas).

Adaptando una observación muy conocida de Einstein [4], podríamos caracterizar las ciencias empíricas, por tanto, como sigue: *En la medida en que un enunciado científico habla acerca de la realidad, tiene que ser falsable; y en la medida en que no es falsable, no habla acerca de la realidad.*

Mediante un análisis lógico podría mostrarse que el papel de la *falsabilidad* (unilateral) como criterio de la *ciencia empírica* es formalmente análogo al de la *compatibilidad* para la *ciencia en general:* un sistema incompatible (o contradictorio) no es capaz de escoger un subconjunto propio del conjunto de todos los enunciados posibles, y —análogamente— un sistema infalsable no puede escoger un subconjunto propio de entre el conjunto de todos los posibles enunciados «empíricos» (o sea, de todos los enunciados sintéticos singulares) [5].

2

La segunda nota consiste en ciertas observaciones que hice durante la discusión de un trabajo leído por Reichenbach en una conferencia filosófica habida en Praga en el verano de 1934 (cuando el libro estaba en pruebas). En *Erkenntnis* se publicó posteriormente un informe de la conferencia; mi colaboración a ella apareció en *Erkenntnis* 5, 1935, págs. 170 y sigs.

Sobre las llamadas «lógica de la inducción» y «probabilidad de hipótesis».

No creo posible elaborar una teoría satisfactoria de lo que se llama tradicionalmente —y también por Reichenbach, por ejemplo— «inducción». Por el contrario, creo que semejante teoría tiene que llevar,

[4] EINSTEIN, *Geometrie und Erfahrung*, págs. 3 y sig. * Añadido en 1957: Einstein decía: «En la medida en que los enunciados de la geometría hablan acerca de la realidad, no son seguros, y en la medida en que son seguros no hablan acerca de la realidad». *(Geometrie und Erfahrung* se publicó en 1921.)

[5] Se publicará pronto una exposición más completa en forma de libro (en *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung*, ed. por Frank y Schlick y publicados por Springer en Viena). * Añadido en 1957: Me refería a mi libro *Logik der Forschung*, que entonces estaba en prensa. (Se publicó en 1934, pero —de acuerdo con la costumbre de Europa continental— llevaba la fecha «1935», a que yo mismo he aludido con frecuencia.)

por razones puramente lógicas —y ello lo mismo si emplea la lógica clásica como si emplea la probabilitaria—, o a una regresión infinita, o a apoyarse en un principio *apriorístico* de inducción (es decir, a un principio sintético que no pueda ser contrastado empíricamente).

Si distinguimos, como hace Reichenbach, entre un «procedimiento de encontrar» y un «procedimiento de justificar» (una hipótesis), entonces hemos de decir que no es posible reconstruir racionalmente el primero. Pero, en mi opinión, el análisis del procedimiento de justificar las hipótesis no nos conduce a nada que podamos decir que pertenece a una lógica inductiva; pues la teoría de la inducción es superflua, y carece de función en una lógica de la ciencia.

Nunca es posible «justificar» o verificar las teorías científicas. Mas, a pesar de ello, una hipótesis determinada, A, puede aventajar bajo ciertas circunstancias a otra, B: bien sea porque B esté en contradicción con ciertos resultados de observación —y, por tanto, quede «falsada» por ellos—, o porque sea posible deducir más predicciones valiéndose de A que de B. Lo más que podemos decir de una hipótesis es que hasta el momento ha sido capaz de mostrar su valía, y que ha tenido más éxito que otras: aun cuando, en principio, jamás cabe justificarla, verificarla ni siquiera hacer ver que sea probable. Esta evaluación de la hipótesis se apoya exclusivamente en las consecuencias *deductivas* (predicciones) que pueden extraerse de ella: *no se necesita ni mencionar la palabra «inducción»*.

Es fácil explicar históricamente el error que suele cometerse en esta materia: se consideraba que la ciencia era un sistema de conocimientos (esto es, de conocimientos todo lo seguros que se pudiera), y se suponía que la «inducción» garantizaba su verdad; más tarde se vio claramente que no es posible llegar a una verdad absolutamente segura, y se trató de poner en su lugar por lo menos una especie de certidumbre o de verdad atenuadas —es decir, la «probabilidad».

Pero el hablar de la «probabilidad» en lugar de hacerlo de la «verdad» no nos sirve para escapar de la regresión infinita o del *apriorismo* [1].

Desde este punto de vista cabe darse cuenta de que es inútil y engañoso emplear el concepto de probabilidad en relación con las hipótesis científicas.

El concepto de probabilidad se emplea en la física y en la teoría de los juegos de azar de un modo concreto, que puede definirse satisfactoriamente valiéndose del concepto de frecuencia relativa (según hace Von Mises) [2]. Pero las tentativas de Reichenbach de ampliar tal concepto de suerte que incluya la llamada «probabilidad inductiva» o la «probabilidad de hipótesis» están condenadas a fracasar, según mi opinión, si bien no tengo objeción alguna que hacer contra la idea —que aquel autor trata de invocar— de una «frecuencia veri-

---

[1] Cf. POPPER, *Logik der Forschung*, por ejemplo, las págs. 188 y 195 y sig. *de la ed. original: esto es, los apartados 80 y 81.

[2] *Op. cit.*, págs. 94 y sigs. *(es decir, los apartados 47 a 51).

tativa» en una sucesión de enunciados[3]: pues no es posible interpretar satisfactoriamente las hipótesis como sucesiones de enunciados[4], e incluso si se aceptase esta interpretación no se ganaría nada, ya que se encuentra uno abocado en diversas definiciones de la probabilidad de una hipótesis todas enteramente inadecuadas. Por ejemplo, se desemboca en una definición que atribuye la probabilidad 1/2 —en lugar de 0— a una hipótesis que ha quedado falsada mil veces: así ocurriría con una hipótesis que resultase falsada en una contrastación sí y una no. Podría quizá considerarse la posibilidad de interpretar la hipótesis, no como una sucesión de enunciados, sino como un *elemento* de una sucesión de hipótesis[5], y de atribuirla cierto valor probabilitario en cuanto elemento de semejante sucesión (aunque no a base de la «frecuencia de la verdad», sino de la «frecuencia de la falsedad» dentro de semejante sucesión). Pero esta tentativa es, asimismo, *completamente insatisfactoria*: mediante consideraciones sumamente sencillas se llega al resultado de que no podemos obtener de este modo un concepto de probabilidad que satisfaga ni siquiera la modesta condición de que una observación falsadora origine una disminución apreciable de la probabilidad de la hipótesis.

A mi entender, tenemos que hacernos a la idea de que no hemos de considerar la ciencia como un «cuerpo de conocimientos», sino más bien como un sistema de hipótesis: es decir, como un sistema de conjeturas o anticipaciones que —por principio— no son susceptibles de justificación, pero con las que operamos mientras salgan indemnes de las contrastaciones; y tales que nunca estaremos justificados para decir que son «verdaderas», «más o menos ciertas», ni siquiera «probables».

---

[3] Este concepto se debe a Whitehead.

[4] Reichenbach interpreta «las aserciones de las ciencias de la Naturaleza» como sucesiones de enunciados en su *Wahrscheinlichkeitslogik*, pág. 15 *(Ber. d. Preuss. Akad.*, Phys.-Math. Klasse 29, 1932, pág. 488).

[5] Esto correspondería a la tesis mantenida por Grelling en el presente debate; cf. *Erkenntnis* 5, págs. 168 y sig.

Nota sobre probabilidad (1938)

La nota que sigue, «Un conjunto de axiomas independientes para la probabilidad», se publicó por vez primera en *Mind*, N. S., 1938, páginas 275 y sigs. Es breve, pero, por desgracia, está bastante mal escrita: era mi primera publicación en idioma inglés, y, además, no pude corregir las pruebas (me encontraba por entonces en Nueva Zelanda).

El texto introductorio de la nota —que es lo único que se reproduce aquí— enuncia claramente (y creo que era la primera vez que se hacía) que habría de construirse la teoría matemática de la probabilidad como un *sistema «formal»*: es decir, un sistema susceptible de recibir múltiples interpretaciones, y entre ellas, por ejemplo, 1) la interpretación clásica, 2) la frecuencial, y 3) la lógica (que ahora se llama, a veces, interpretación «semántica»).

Una de las razones por las que quería desarrollar una teoría formal que fuese independiente de la interpretación concreta que se eligiese, era que esperaba hacer patente posteriormente que lo que había llamado en mi libro «grado de corroboración» (o de «confirmación», o de «aceptabilidad») no era una «probabilidad», esto es, que sus propiedades eran incompatibles con el cálculo de probabilidades formal (cf. el apéndice *IX, y, de mi *Postcript*, los apartados *27 a *32).

Otro de los motivos que tenía para escribir esta nota consistía en mi intención de mostrar que lo que en el libro había llamado «probabilidad lógica» era la interpretación lógica de cierta «probabilidad absoluta»: o sea, de una probabilidad $p(x, y)$ en la que y fuese tautológica. Puesto que —con los símbolos que empleo en la nota— cabe escribir una tautología así, no-(x y no-x), o bien $\overline{x\bar{x}}$, podemos definir la probabilidad absoluta de x (que se puede escribir «$p(x)$ o «$pa(x)$») a base de la relativa del modo siguiente:

$$p(x) = p(x, \overline{x\bar{x}}), \quad \text{o} \quad pa(x) = p(x, \overline{x\bar{x}}) = p(x, \overline{y\bar{y}})$$

En la nota se da una definición parecida.

Cuando la escribí no conocía el libro de Kolmogorov *Foundations of Probability*, aun cuando se había publicado primeramente en alemán en 1933. Kolmogorov se encaminaba a metas semejantes, pero su sistema es menos «formal» que el mío, y de ahí que pueda recibir menos interpretaciones. La diferencia principal es la siguiente: él interpreta los argumentos del funtor probabilitario como *conjuntos*, y supone —por tanto— que tienen miembros (o «elementos»); pero en mi sistema no se asume nada análogo: *en mi teoría no se hace suposición alguna acerca de tales argumentos (a los que llamo «elementos»), excepto la de que sus probabilidades se comportan del modo exigido por los axiomas.* Sin embargo, el sistema de Kolmogorov puede considerarse como una de las interpretaciones posibles del mío (véanse mis observaciones sobre el particular en el apéndice *IV).

El sistema de axiomas que presenté al final de la nota era algo torpe, y poco después de su publicación lo reemplacé por otro más sencillo y más elegante. Tanto uno como otro estaban formulados a partir del *producto* (o conyunción) y el *complemento* (o negación), como ha ocurrido con los demás sistemas que he desarrollado posteriormente [*1]; en aquella época no había logrado deducir la ley distributiva de otras más sencillas (tales como la asociativa), y, por ello, tenía que enunciarla como axioma; ahora bien, la ley distributiva resulta sumamente torpe cuando se la escribe a base del producto y el complemento. Por esta razón he omitido el final de la nota, y con él mi antiguo sistema de axiomas; en su lugar enunciaré ahora de nuevo mi otro sistema, más sencillo (cf. *Brit. Journal Phil. Sc., loc. cit.*), que —como el sistema antiguo— está basado sobre la probabilidad absoluta (desde luego, puede deducírsele del que doy en el apéndice *IV, que se basa en la probabilidad relativa): lo hago en un orden correspondiente al que tenía el de la antigua nota:

A1 $\quad p(xy) \geqslant p(yx)$ (Conmutación)

A2 $\quad p((xy)z) \geqslant p(x(yz))$ (Asociación)

A3 $\quad p(xx) \geqslant p(x)$ (Tautología)

A4 Existen al menos un x y un y tales que

$p(x) \neq p(y)$ (Existencia)

B1 $\quad p(x) \geqslant p(xy)$ (Monotonía)

B2 $\quad p(x) = p(xy) + p(x\bar{y})$ (Complemento)

B3 Para todo x existe un y tal que

$p(y) \geqslant p(x)$, y $p(xy) = p(x)p(y)$ (Multiplicación)

Doy a continuación mi antigua *nota* de 1938, con ligeras correcciones de estilo.

Un conjunto de axiomas independientes para la probabilidad

Desde el punto de vista formal de la «axiomática» cabe describir la probabilidad como un funtor diádico [1] (esto es, una función numérica de dos argumentos que no es necesario que tengan, a su vez, va-

---

[*1] En el *British Journal for the Philosóphy of Science* 6, 1955, págs. 51-57, 176 y 351, publiqué dos de ellos; y un perfeccionamiento ulterior de los mismos en el apéndice a «Philosophy of Science: A Personal Report», en *British Philosophy in Mid-Century*, editado por A. C. Mace, 1956. En el apéndice *IV se encontrará mi sistema final (que, según pienso, difícilmente se podrá simplificar aún más); y puede verse una demostración de su independencia en la nota *2 a pie de página que se encuentra al final del presente apéndice.

[1] Para la terminología, véanse CARNAP, *Logical Syntax of Language* (1937), y TARSKI, *Erkenntnis* 5 (1935), pág. 175.

lores numéricos) cuyos argumentos son *nombres* variables o constantes (que pueden interpretarse, por ejemplo, como nombres de predicados o de enunciados [1], según sea la interpretación que se elija). Si queremos admitir para ambos argumentos las mismas reglas de sustitución y la misma interpretación, entonces se puede denotar el funtor mencionado con

$$«p(x_1, x_2)»$$

lo cual puede leerse, «la probabilidad x_1 con respecto a x_2».

Es conveniente construir un sistema de axiomas, s_1, en el que «$p(x_1, x_2)$» aparezca como variable primitiva (no definida), y que esté constituido de tal suerte que admita indiferentemente cualquiera de las interpretaciones que se han propuesto. Las tres que se han debatido más ampliamente son: 1) la definición clásica [2] de probabilidad como razón de los casos favorables a los igualmente posibles; 2) la teoría frecuencial [3], que define la probabilidad como frecuencia relativa de cierta clase de acontecimientos dentro de otra clase determinada, y 3) la teoría lógica [4], que la define como el grado de relación lógica entre enunciados (que se hace igual a 1 si x_1 es consecuencia lógica de x_2, e igual a 0 si la negación de x_1 es consecuencia lógica de x_2).

Cuando se construye semejante sistema s_1, capaz de ser interpretado de una cualquiera de las formas mencionadas (y de algunas otras también), es aconsejable introducir —valiéndose de un grupo especial de axiomas (véase más abajo el grupo A)— ciertas funciones no definidas de los argumentos: por ejemplo, la conyunción («x_1 y x_2», que simbolizamos aquí con «x_1x_2») y la negación («no-x_1», que simbolizo por «$\bar{x}_1$»). De este modo se puede expresar simbólicamente una idea tal como «x_1 y no x_1» mediante «$x_1\bar{x}_1$», y su negación por «$\overline{x_1\bar{x}_1}$» —si se adopta 3), esto es, la tercera interpretación, ha de considerarse «$x_1\bar{x}_1$» como el nombre de un enunciado que es la conyunción del enunciado cuyo nombre es «x_1» y de su negación.

Suponiendo que se hayan formulado del modo apropiado las reglas de sustitución, puede demostrarse que para cualesquiera x_1, x_2 y x_3,

$$p(x_1, \overline{x_2\bar{x}_2}) = p(x_1, \overline{x_3\bar{x}_3}).$$

Así pues, el valor de $p(x_1, \overline{x_2\bar{x}_2})$ depende exclusivamente de la única variable verdadera, x_1; esto justifica [5] la siguiente definición explícita de un nuevo funtor, monádico, «$pa(x_1)$», que puedo llamar «probabilidad *absoluta*»:

$$pa(x_1) = p(x_1, \overline{x_2\bar{x}_2}) \qquad \mathbf{Df_1}$$

[1] *Ibíd.*

[2] Véase, por ejemplo, LEVY-ROTH, *Elements of Probability*, pág. 17 (1936).

[3] Véase POPPER, *Logik der Forschung*, págs. 94-153 (1935).

[4] Véase KEYNES, *A Treatise on Probability* (1921); Mazurkiewicz ha dado recientemente —en *C. R. Soc. d. Sc. et de L.*, Varsovia, 25, Cl. III (1932)— un sistema más satisfactorio; véase TARSKI, *loc. cit.*

[5] Véase CARNAP, *loc. cit.*, pág. 24. * Hubiera sido más sencillo escribir Df_1 (sin «justificarla») del modo siguiente: $pa(x_1) = p(x_1, \overline{x_1\bar{x}_1})$.

(Se tiene un ejemplo de interpretación de «$pa(x_1)$» en el sentido de 3) —o sea, de la interpretación lógica— con el concepto de «probabilidad lógica» que he empleado en anteriores publicaciones[6].)

Ahora bien, es posible realizar paso a paso toda la construcción empezando por el otro extremo: en lugar de introducir «$p(x_1, x_2)$» como concepto primitivo (funtor primitivo) de un sistema axiomático s_1, y definir explícitamente «$pa(x_1)$», podemos construir otro sistema de axiomas s_2 en el que aparezca «$pa(x_1)$» como variable primitiva (no definida), y en el que pasemos después a definir explícitamente «$p(x_1, x_2)$» a partir de «$pa(x_1)$», del modo siguiente:

$$p(x_1, x_2) = \frac{pa(x_1 x_2)}{pa(x_2)} \qquad \mathrm{Df}_2$$

Los fórmulas que en s_1 se adoptan como axiomas (y también Df_1) se convierten ahora en teoremas de s_2: es decir, pueden deducirse mediante el nuevo sistema de axiomas s_2.

Cabe mostrar que los dos métodos descritos —la elección de s_1 y Df_1, por un lado, y la de s_2 y Df_2, por el otro— no son igualmente convenientes desde el punto de vista de la axiomática formal: el segundo es superior al primero en ciertos aspectos, de los cuales el más importante es el de que es posible formular en s_2 un axioma de unicidad más exigente que el correspondiente de s_1 (si no se restringe la generalidad de este último sistema); lo cual se debe a que si $pa(x_2) = 0$, el valor de $p(x_1, x_2)$ se hace indeterminado *[1].

Incluyo un sistema de axiomas independientes, s_2, del tipo descrito más arriba (es fácil construir valiéndose de él un sistema s_1); el cual, combinado con la definición $\mathrm{D}f_2$, basta para deducir la teoría matemática de la probabilidad. Los axiomas pueden dividirse en dos grupos: el A está formado por las propiedades yuncionales —conyunción y negación— del argumento, y es prácticamente una adaptación del sistema de postulados para la llamada «álgebra de la lógica»[7]; y el B presenta los axiomas propios de la medida de la probabilidad. Unos y otros son:

---

[6] Véase Popper, *loc. cit.*, págs. 71 y 151.

*[1] El sistema absoluto (s_2) aventaja al relativo (s_1) solamente mientras la probabilidad relativa $p(x, y)$ se considere indeterminada si $pa(y) = 0$. Posteriormente he desarrollado un sistema (véase el apéndice *IV) en el que las probabilidades relativas están determinadas incluso en el caso de que $pa(y) = 0$; y, por esta razón, considero ahora que el sistema relativo es superior al absoluto. (Podría añadir también que tengo por una mala elección el término «axioma de unicidad»: supongo que quería aludir a algo semejante al postulado 2 —o al axioma A2— del sistema del apéndice *IV.)

[7] Véanse Huntington, *Trans. Amer. Mathem. Soc.* 5, pág. 292 (1904), y Whitehead-Russell, *Principia Mathematica*, I, en donde las cinco proposiciones 22·51, 22·52, 22·68, 24·26 y 24·1 corresponden a los cinco axiomas del grupo A, tal como se dan aquí.

(Aquí se encontraba —con diversas erratas— el complicado sistema de axiomas que he reemplazado luego por el más sencillo que doy arriba *[2]).

Christchurch, N. Z., 20 *de noviembre de* 1937.

---

*2 La independencia de ambos sistemas —el sistema original y el que he dado aquí en la pág. 296— es una cuestión casi trivial, salvo para dos dos primeros axiomas, A1 y A2 (cf., más adelante, las págs. 313 a 319).

Para hacer patente la independencia de A1, tómese la matriz de la pág. 317, en la que se hayan pasado, de 1 a 0 el valor de 0.1, y de 0 a 1 el de 1.0. Háganse $p(0) = 0$ y $p(1) = p(2) = 1$: A1 *deja de cumplirse* para $x = 0$ e $y = 1$.

Para demostrar lo mismo con respecto a A2, tómese la matriz siguiente, que —como puede verse teniendo en cuenta sus valores diagonales (del ángulo superior izquierda al inferior derecha)— satisface A3, y también satisface A1 por su simetría con respecto a la diagonal mencionada. A4, B1 y B3 se comprueban de un vistazo, y B2 sin más que añadir productos complementarios. Pero A2 no se cumple en ciertos casos: por ejemplo, para $x = 2$, $y = 3$ y $z = 6$.

Sobre el empleo heurístico de la definición clásica de probabilidad, especialmente para la deducción del teorema general de multiplicación

La definición clásica de la probabilidad como número de casos favorables dividido por el de casos igualmente posibles tiene considerable valor heurístico. Su inconveniente principal reside en que, si bien es aplicable a dados homogéneos o simétricos, por ejemplo, no lo es a dados cargados: dicho de otro modo, en que no admite que *los casos posibles tengan distintos pesos.* Pero en algunas situaciones especiales hay modos y maneras de superar tal dificultad; y en ellas precisamente tiene su valor heurístico la antigua definición: toda definición satisfactoria ha de estar de acuerdo con la antigua siempre que pueda dominarse la dificultad de la asignación de pesos —y, por tanto, *a fortiori,* cuando la definición antigua sea aplicable.

1) La definición clásica será aplicable en todos los casos en que conjeturemos estar frente a pesos iguales —o posibilidades iguales—, y, por ello, frente a iguales probabilidades.

2) Será aplicable en todos los casos en que podamos transformar el problema de modo que se obtengan iguales pesos, posibilidades o probabilidades.

3) También lo será, con leves modificaciones, siempre que podamos asignar una función de ponderación a las diversas posibilidades.

4) Será aplicable, o tendrá valor heurístico, en la mayoría de los casos en que una simplificación excesiva que opere con posibilidades iguales lleve a una solución próxima a las probabilidades cero o uno.

5) Tendrá gran valor heurístico en casos en que puedan introducirse pesos en forma de probabilidades. Tomemos, por ejemplo, el sencillo problema siguiente: hemos de calcular la probabilidad de sacar un número par con un dado cuando *no se cuentan* las tiradas en que sale el número seis, *sino que se considera que «no ha habido tirada».* La definición clásica conduce, desde luego, a $2/5$. Supongamos ahora que el dado esté cargado, y que se nos den las probabilidades (desiguales) de los diversos lados, $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(6)$; aún es posible calcular la probabilidad pedida, que será igual a

$$\frac{p(2)+p(4)}{p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)}=\frac{p(2)+p(4)}{1-p(6)}$$

Es decir, podemos modificar la definición clásica de suerte que nos dé la sencilla regla siguiente:

Dadas las probabilidades de todos los casos posibles (y mutuamente excluyentes), la probabilidad pedida es igual a la suma de las probabilidades de todos los casos favorables (mutuamente excluyentes) dividida por la de aquellas probabilidades.

Es evidente que podemos expresar también esta regla como sigue, para casos mutuamente excluyentes o no:

La probabilidad pedida es siempre igual a la probabilidad de la disyunción de todos los casos favorables (mutuamente excluyentes o no), dividida por la probabilidad de la disyunción de todos los casos posibles (mutuamente excluyentes o no).

6) Cabe emplear las reglas dadas para una deducción heurística de la definición de probabilidad relativa y del teorema general de multiplicación.

Pues, simbolicemos «par» por «a» y «distinto de seis» por «b»; entonces, el problema que habíamos planteado de determinar la probabilidad de que salga par si no tenemos en cuenta las tiradas en que sale seis, es, sin duda, el mismo que el de determinar $p(a,b)$: es decir, la probabilidad de a supuesto b, o sea, la probabilidad de encontrar un a entre los b.

El cálculo puede llevarse a cabo del modo siguiente: En lugar de escribir «$p(2) + p(4)$» podemos escribir, con mayor generalidad, «$p(ab)$»: o sea, la probabilidad de que salga un número par distinto de seis; y en vez de escribir «$p(1) + p(2) + ... + p(5)$» —o, lo que es lo mismo, «$1 - p(6)$»— podemos poner «$p(b)$»: esto es, la probabilidad de que salga un número distinto de seis. No cabe duda de que estos cálculos son enteramente generales; y suponiendo $p(b) \neq 0$, llegamos a la fórmula

(1) $$p(a,b) = p(ab) \,/\, p(b)$$

o a esta otra (más general, ya que sigue teniendo sentido aunque sea $p(b) = 0$),

(2) $$p(ab) = p(a, b)\, p(b)$$

Este es el teorema general de multiplicación para la probabilidad absoluta de un producto ab.

Sustituyendo «b» por «bc», obtenemos a partir de (2)[1]:

$$p(abc) = p(a, bc)\, p(bc)$$

y, por tanto —al aplicar (2) a $p(bc)$—:

$$p(abc) = p(a, bc)\, p(b, c)\, p(c)$$

---

[1] Omito los paréntesis que deberían encuadrar «bc» porque no me preocupa ahora un planteamiento formal, sino heurístico, y, además, porque trataremos extensamente el problema de la ley de asociación en los dos apéndices siguientes.

o bien, suponiendo $p(c) \neq 0$,

$$p(abc) \,/\, p(c) = p(a, bc)\, p(b, c).$$

Pero, teniendo en cuenta (1), esta última igualdad equivale a

$$p(ab, c) = p(a, bc)\, p(b, c). \tag{3}$$

Que es el teorema general de multiplicación para la probabilidad *relativa* de un producto *ab*.

7) Es posible formalizar con facilidad la deducción que hemos esbozado, pero la demostración formalizada tendrá que partir de un sistema de axiomas en lugar de hacerlo de una definición. Pues el empleo heurístico que hemos hecho de la definición clásica ha consistido en introducir posibilidades ponderadas —que es prácticamente lo mismo que probabilidades— en el *definiens* clásico; mas el resultado de tal modificación ya no puede considerarse como una definición auténtica, puesto que tiene que fijar unas relaciones entre probabilidades distintas, y equivale, por eso, a la construcción de un sistema axiomático. Si queremos formalizar nuestra deducción —que utiliza implícitamente las leyes de la asociación y de la adición de probabilidades— hemos de introducir reglas para estas operaciones en nuestro sistema de axiomas: tenemos un ejemplo en el sistema para probabilidades absolutas que he presentado en el apéndice *II.

Si formalizamos del modo dicho nuestra deducción de (3), solamente podremos llegar a este teorema imponiendo la condición «supuesto que sea $p(bc) \neq 0$», como es obvio teniendo en cuenta la deducción heurística.

Pero (3) puede tener sentido aun sin este requisito si es que podemos construir un sistema axiomático en el que $p(a, b)$ tenga sentido en general, incluso si $p(b) = 0$. Es evidente que no podríamos deducir (3) del modo bosquejado en una teoría de este tipo, pero podríamos adoptar (3) como axioma y considerar la deducción mencionada —véase también la fórmula (1) del antiguo apéndice II— como una justificación heurística de su adopción: así hemos hecho en el sistema que se describe en el apéndice siguiente (*IV).

Teoría formal de la probabilidad

Teniendo en cuenta que un enunciado probabilitario tal como «$p(a, b) = r$» puede ser interpretado de muchas maneras distintas, me ha parecido conveniente construir un sistema puramente «formal», «abstracto» o «autónomo», en el sentido de que sus «elementos» (representados por «a», «b», ...) puedan interpretarse de muchos modos diferentes, de modo que no estemos atados a ninguna de estas interpretaciones. La primera vez que propuse un sistema formal de este tipo lo hice en una nota publicada en *Mind* en 1938 (incluida aquí en el apéndice *II); desde aquella fecha he construido varios sistemas simplificados [1].

Hay tres características que distinguen una teoría de este tipo de las demás: I) es una teoría formal, es decir, no supone una interpretación en particular, aunque permite —por lo menos— todas las interpretaciones conocidas; II) es *autónoma*, o sea, se adhiere al principio de que sólo es posible deducir conclusiones probabilitarias de premisas probabilitarias: dicho de otro modo, al principio de que el cálculo de probabilidades es un método de transformar unas probabilidades en otras, y III) es simétrica: esto es, se halla construida de tal modo que siempre que exista una probabilidad $p(a, b)$ —es decir, una probabilidad de a supuesto b— existe también una probabilidad $p(b, a)$, y ello incluso en el caso de que la probabilidad abso-

[1] En *Brit. Journ. Phil. of Science* 6, 1955, págs. 53 y 57 y sig., y en la primera nota a pie de página del apéndice a mi trabajo «Philosophy of Science: A Personal Report», en *Britih Philosophy in Mid-Century*, ed. por C. A. Mace, 1956.

Debe advertirse que los sistemas que estudio aquí son «formales», «abstractos» o «autónomos» en el sentido explicado, pero que para llegar a una «formalización» completa habríamos de encerrarlos dentro de cierto formalismo matemático (bastaría el «álgebra elemental» de Tarski).

Puede preguntarse si podría existir un procedimiento de resolver la decidibilidad de un sistema que consistiese, digamos, en el álgebra elemental tarskiana y nuestro sistema de fórmulas A1, B y C+. Hay que responder que no. Pues pueden añadirse a nuestro sistema unas fórmulas que expresen cuántos elementos a, b, ..., existen en S; tendremos así en aquél un teorema:

Existe un elemento a en S tal que $p(a, \bar{a}) \neq p(\bar{a}, a)$.

Al cual podemos añadir ahora la fórmula

(o) *Para todo elemento a de S*, $p(a, \bar{a}) \neq p(\bar{a}, a)$;

pero al hacer tal cosa puede demostrarse que en S hay *exactamente dos* elementos. Y, sin embargo, los ejemplos mediante los que demostraremos más adelante la compatibilidad de nuestros axiomas hacen ver que en S puede existir un número cualquiera de elementos; por lo cual, no es posible deducir (o) ni ninguna otra fórmula parecida que fije el número de elementos, del mismo modo que tampoco la negación de ninguna fórmula de este tipo. Así pues, nuestro sistema es incompleto.

luta de b —$p(b)$— sea igual a cero, o sea, incluso cuando $p(b, \overline{a\bar{a}}) = 0$.

Por extraño que parezca, no parece haber existido hasta el momento teoría alguna de esta índole, si dejamos a un lado mis propios intentos anteriores en este campo. Otros autores han pretendido construir teorías «abstractas» o «formales» —así Kolmogorov—, pero siempre han asumido una *interpretación* más o menos específica: por ejemplo, han supuesto que en una ecuación como

$$p(a, b) = r$$

los «elementos» a y b son *enunciados,* o sistemas de enunciados; o bien que a y b son *conjuntos,* o sistemas de conjuntos; o tal vez propiedades, o clases finitas (agregados) de cosas.

Kolmogorov escribe [2]: «La teoría de la probabilidad puede y debe desarrollarse como una disciplina matemática, a partir de axiomas, exactamente del mismo modo que la geometría y el álgebra»; y alude a «la introducción de conceptos geométricos básicos en los *Fundamentos de la geometría,* de Hilbert» y a otros sistemas abstractos parecidos.

Y, sin embargo, supone que en «$p(a, b)$» —utilizo mi propia simbología, no la suya— a y b son *conjuntos:* con lo cual excluye, entre otras, la interpretación lógica según la cual a y b serían enunciados (o «proposiciones», si se prefiere). Dice, con mucha razón, que «carece de importancia qué es lo que representan los miembros del conjunto»; pero esta advertencia no basta para determinar el carácter formal de la teoría que busca, ya que en ciertas interpretaciones a y b *no tienen miembros,* ni nada que pudiera corresponderse con éstos.

Todo lo cual tiene graves consecuencias en lo que se refiere a la construcción real del sistema axiomático mismo.

Los que interpretan los elementos a y b como enunciados o proposiciones suponen, como es muy natural, que el cálculo de composición de enunciados (el cálculo proposicional) se cumple para ellos. Y, análogamente, Kolmogorov supone que las operaciones de adición, multiplicación y complementación de *conjuntos* son válidas para dichos elementos, puesto que los interpreta como conjuntos.

Más concretamente: se presupone siempre (a menudo sólo de un modo tácito) que ciertas leyes algebraicas, tales como la de la asociación

(a) $$(ab)c = a(bc)$$

la ley de conmutación

(b) $$ab = ba$$

o la de indempotencia

(c) $$a = aa$$

---

[2] Todas estas citas proceden de la pág. primera de A. Kolmogorov, *Foundation of the Theory of Probability,* 1950 (1.ª ed. alem. de 1933).

se cumplen para los elementos del sistema: es decir, para los argumentos de la función $p(..., ...)$.

Una vez hecha esta suposición —ya tácita, ya explícitamente— se establecen otros axiomas o postulados para la probabilidad relativa,

$$p(a, b)$$

o sea, para la probabilidad de a dada la información b; o bien para la probabilidad absoluta

$$p(a)$$

esto es, para la probabilidad de a (sin que esté dada información alguna, o solamente tautológica).

Pero este procedimiento es muy capaz de hacer que permanezca oculto el hecho —tan sorprendente y de tanta importancia— de que basten algunos de los axiomas o postulados que se adoptan para la probabilidad relativa $p(a, b)$, para *garantizar que los elementos cumplan todas las leyes del álgebra booleana*. Por ejemplo, las dos fórmulas siguientes (cf. el apéndice precedente, *III):

$$\text{(d)} \qquad p(ab) = p(a, b)p(b)$$

$$\text{(e)} \qquad p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c)$$

entrañan cierta forma de ley de la asociación; de ellas, la primera, (d), da origen también a una especie de definición de la probabilidad relativa a base de la absoluta:

$$\text{(d')} \qquad \text{Si } p(b) \neq 0, \text{ entonces } p(a, b) = p(ab) \,/\, p(b),$$

mientras que la segunda, que es la correspondiente a las probabilidades relativas, es la «ley general de multiplicación», perfectamente conocida.

Como hemos dicho, las dos fórmulas (d) y (e) entrañan —sin necesidad de ningún otro supuesto (excepto la posibilidad de sustituir *probabilidades* iguales)— la forma siguiente de la ley de la asociación:

$$\text{(f)} \qquad p((ab)c) = p(a(bc)).$$

Pero este hecho [3], tan interesante, pasa inadvertido si se introduce (f) al *asumir* la identidad algebraica (a) —o sea, la ley de la

[3] La deducción es como sigue:

(1)	$p((ab)c) = p(ab, c)p(c)$	d
(2)	$p((ab)c) = p(a, bc)p(b, c)p(c)$	1, e
(3)	$p(a(bc)) = p(a, bc)p(bc)$	d
(4)	$p(a(bc)) = p(a, bc)p(b, c)p(c)$	3, d
(5)	$p((ab)c) = p(a(bc))$	2, 4

asociación— incluso previamente a todo comienzo de desarrollo del cálculo de probabilidades: pues a partir de

(a) $$(ab)c = a(bc)$$

podemos obtener (f) sin más que sustituir en la identidad

$$p(x) = p(x).$$

Con lo cual no se para mientes en que (f) es deductible de (d) y (e); o, dicho de otra forma, no se advierte que la asunción de (a) es completamente innecesaria si trabajamos con un sistema axiomático que contenga —o implique— (d) y (e); ni tampoco que cuando asumimos (a) además de (d) y (e) nos impedimos averiguar *qué tipo de relaciones están implicadas por nuestros axiomas o postulados;* ahora bien, una de las claves del método axiomático es justamente averiguar tal cosa.

En consecuencia, tampoco se cae en la cuenta de que (d) y (e), aunque implican (f) —esto es, una ecuación a base de la probabilidad *absoluta*— no implican por sí solas ni (g) ni (h), que son las fórmulas correspondientes a base de la probabilidad *relativa:*

(g) $$p((ab)c, d) = p(a(bc), d)$$
(h) $$p(a, (bc)d) = p(a, b(cd)).$$

Para deducir estas fórmulas —véase el apéndice *V, (41) a (62)— se requieren muchas más cosas además de (d) y (e): hecho que tiene un interés notable desde un punto de vista axiomático.

He puesto este ejemplo para que se viera que Kolmogorov no llega a llevar a cabo su programa; y lo mismo ocurre con todos los demás sistemas que han llegado a mi conocimiento. En mis propios sistemas de postulados para la probabilidad pueden deducirse todos los teoremas del álgebra de Boole; y ésta, a su vez, puede interpretarse de muchas maneras: como un álgebra de conjuntos, de predicados, de enunciados (o proposiciones), etc.

Otro punto de considerable importancia es el problema de un sistema «simétrico». Tal como hemos dicho más arriba, es posible definir la probabilidad relativa a base de la absoluta, del modo siguiente:

(d′) Si $p(b) \neq 0$ entonces $p(a, b) = p(ab) / p(b)$.

Ahora bien, el antecedente «si $p(b) \neq 0$» es ineludible, ya que la división por cero *no es una operación definida;* por ello, la mayoría de las fórmulas de la probabilidad relativa pueden expresarse —en los sistemas al uso— sólo en forma condicional, es decir, análogamente a (d′). Por ejemplo, en casi todos los sistemas (g) no es válida, y ha de ser reemplazada por otra fórmula condicional mucho más débil:

(g^-) Si $p(d) \neq 0$ entonces $p((ab)c, d) = p(a(bc), d)$

y es menester también anteponer a (h) una condición análoga.

Algunos autores no se han dado cuenta de esta cuestión (por ejemplo, Jeffreys, y también Von Wright: este último utiliza condiciones que equivalen a $b \neq 0$, pero esto no asegura que $p(b) \neq 0$, especialmente puesto que su sistema contiene un «axioma de continuidad»); por tanto, sus sistemas no son coherentes en su estado actual, aunque a veces puedan arreglarse. Otros se han percatado de lo que ocurre, pero debido a ello sus sistemas son muy débiles (al menos comparados con el mío): puede ocurrir en tales sistemas que

$$p(a, b) = r$$

sea una fórmula con sentido, pero que —simultáneamente y con idénticos elementos— no lo sea

$$p(b, a) = r$$

esto es, no esté definida convenientemente —o incluso no sea definible— debido a ser $p(a) = 0$.

Pero un sistema de este tipo no sólo es débil, sino que para muchos fines interesantes es *inadecuado:* por ejemplo, no se puede aplicar del modo apropiado a los enunciados cuya probabilidad absoluta es cero, aunque esta aplicación es sumamente importante: las leyes universales tienen, por ejemplo, según podemos asumir aquí (cf. los apéndices *VII y *VIII), probabilidad cero. Si tomamos dos teorías universales, s y t, tales que s sea deductible de t, deberíamos poder afirmar que

$$p(s, t) = 1$$

Pero si $p(t) = 0$ no podemos hacerlo en los sistemas probabilitarios acostumbrados. Por parecidas razones, puede ocurrir que la expresión

$$p(d, t)$$

(en donde d son los datos que abogan en favor de la teoría t) no esté definida; ahora bien, esta expresión es importantísima (es la «verosimilitud» de t sobre la base de los datos d, según Fisher; véase también el apéndice *IX).

Así pues, se necesita un cálculo de probabilidades en el que podamos operar con argumentos segundos que tengan probabilidad absoluta igual a cero: por ejemplo, es indispensable para toda discusión seria de la teoría de la corroboración o confirmación.

Esta es la razón por la que he tratado durante varios años de construir un cálculo de probabilidades relativas en el que, siempre que

$$p(a, b) = r$$

sea una fórmula bien formada, esto es, verdadera o falsa,

$$p(b, a) = r$$

lo sea asimismo, incluso si $p(a) = 0$: sistema al que podemos aplicar el calificativo de «simétrico». El primer sistema de este tipo que he publicado [4] procede de 1955, y resultó ser mucho más sencillo de lo que había esperado. Pero por entonces estaba todavía preocupado con las peculiaridades que debería poseer todo sistema de la índole mencionada. Quiero decir lo siguiente: en todo sistema simétrico satisfactorio son válidas reglas como las que siguen,

$$p(a, b\bar{b}) = 1$$
$$\text{Si} \quad p(\bar{b}, b) \neq 0, \quad \text{entonces } p(a, b) = 1$$
$$\text{Si} \quad p(a, \bar{a}b) \neq 0, \quad \text{entonces } p(a, b) = 1$$

En los sistemas al uso estas fórmulas o bien no son válidas o se satisfacen (la segunda y la tercera) *de un modo vacío*, ya que en ellas aparecen segundos argumentos de probabilidad absoluta nula. En aquella época creía, por tanto, que algunas de ellas habían de proponerse como axiomas; pero posteriormente me he dado cuenta de que cabía simplificar mi sistema axiomático, y al hacerlo ha resultado que estas fórmulas desusadas pueden deducirse de otras que tienen un aspecto completamente «normal». En mi trabajo «Philosophy of Science: A Personal Report» [5] he presentado por primera vez el sistema simplificado resultante: es el mismo sistema de seis axiomas que expongo más a fondo en el presente apéndice.

Es un sistema sorprendentemente sencillo e intuitivo, y su alcance —que excede con mucho al de cualquiera de los sistemas corrientes— se debe meramente al hecho de que omito en todas las fórmulas, excepto una (el axioma C), toda condición del tipo, «si $p(b) \neq 0$, entonces...» (en los sistemas habituales o aparecen tales condiciones o deberían aparecer, para evitar incoherencias).

En este apéndice me propongo exponer primero el sistema axiomático, con sus demostraciones de compatibilidad y de independencia, y luego unas pocas definiciones basadas en él, entre ellas las de un campo boreliano de probabilidades.

Primero el sistema axiomático.

En nuestros postulados aparecen *cuatro conceptos sin definir:* I) S, el universo del discurso o sistema de elementos admisibles (los cuales se denotarán con minúsculas en cursiva, «a», «b», «c», ..., etc.); II) una función numérica binaria de estos elementos, que denotaremos por medio de «$p(a, b)$», etc.: esto es, la probabilidad de a supuesto b; III) una operación binaria de los elementos, denotada con «ab» y llamada *producto* (o encuentro, o conyunción) de a y b, y IV) el complemento del elemento a, que será denotado por «$\bar{a}$».

A estos cuatro conceptos no definidos podemos añadir un quinto, al que cabe considerar, a nuestra elección, como definido o como no

---

[4] En el *British Journal for the Philosophy of Science* 6, 1955, págs. 5 y sig.

[5] En *British Philosophy in the Mid-Century*, ed. por C. A. Mace, 1956, pág. 191. Los seis axiomas que allí se daban eran los B1, C, B2, A3, A2 y A1 del presente apéndice (la rotulación con que estaban presentados era, B1, B2, B3, C1, D1 y E1, respectivamente).

definido: es la «probabilidad absoluta de a», que denotamos con «$p(a)$».

Cada concepto no definido se introduce por un *postulado*. Y para entender éstos conviene tener presente que $p(a, a) = 1 = p(b, b)$ para todos los elementos de S, como puede demostrarse, naturalmente, por medio de los postulados.

Postulado 1. El número de elementos de S es, como máximo, infinito, pero numerable.

Postulado 2. Si a y b pertenecen a S, entonces $p(a, b)$ es un número real, y se cumplen los siguientes axiomas:

A1 Hay elementos c y d en S, tales que $p(a, b) \neq p(c, d)$ (Existencia).

A2 Si $p(a, c) = p(b, c)$ para todo c de S, entonces $p(d, a) = p(d, b)$ para todo d de S (Sustituibilidad).

A3 $p(a, a) = p(b, b)$ (Reflexividad).

Postulado 3. Si a y b pertenecen a S, entonces ab pertenece a S; y si, además, c también pertenece a S (y, por tanto, asimismo, bc), se cumplen los axiomas siguientes:

B1 $p(ab, c) \leqslant p(a, c)$ (Monotonía)

B2 $p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c)$ (Multiplicación)

Postulado 4. Si a pertenece a S, entonces $\bar{a}$ también pertenece a S; y si, además, b pertenece a S, se cumple el siguiente axioma:

C $p(a, b) + p(\bar{a}, b) = p(b, b)$, a menos que $p(b, b) = p(c, b)$ para todo c de S. (Complementación)

Con esto se termina el sistema «elemental» («elementalidad» referente a su ampliación para campos borelianos). Como hemos indicado, podemos añadir ahora la *definición de probabilidad absoluta* como quinto postulado —que llamaríamos «postulado PA»— o bien podemos considerar esta definición como explícita (en vez de como un postulado).

Postulado PA. Si a y b pertenecen a S, y si $p(a, a) = p(b, c)$ para todo c de S, entonces $p(a) = p(a, b)$

(Definición de probabilidad absoluta).

Demostraremos más adelante que el sistema de postulados y axiomas que hemos dado es *compatible* e *independiente*[6].

Vamos a hacer ahora algunos comentarios sobre el sistema de postulados.

Los seis axiomas —A1, A2, A3, B1, B2 y C— se emplean explícitamente en las operaciones de deducción de los teoremas. El resto (existencial) de los postulados puede darse por supuesto, como se hacía en el trabajo en que presenté por vez primera este sistema[7]

[6] Cf. la nota anterior 1.

[7] Otro sistema posible es el siguiente: Los postulados son iguales a los del texto, lo mismo que los axiomas A1 y A2, pero los A3 y B1 quedan remplazados por los tres siguientes:

Cabe remplazar estos seis axiomas por un sistema que sólo contenga cuatro, pero a costa de introducir una cuarta variable, «d», en los postulados 3 y 4: se tienen los axiomas A1, A2 y los dos siguientes,

B+ Si $p(a, bc)p(b, c) = p(d, c)$ supuesto que $p(a, c) \geqslant p(d, c)$, entonces $p(ab, c) \neq p(d, c)$

C+ Si $p(a, b) + p(\bar{a}, b) \neq p(c, c)$ entonces $p(c, c) = p(d, b)$

En este sistema, B+ equivale a la conyunción de B1 y B2, y análogamente, C+ a la de A3 y C [8]. Se trata de un sistema muy breve que comparte muchas ventajas de otros más extensos: el producto y el complemento aparecen separadamente, de modo que todos los axiomas, excepto los que llevan la letra B, están libres del producto,

---

A3′ $$p(a, a) = 1$$

A4′ $$p(a, b) \geqslant 0$$

B1′ $$p(ab, c) = p(ba, c)$$

El axioma B2 no sufre modificación, y el C se sustituye por

C′ Si $p(a, b) \neq 1$, entonces $p(c, b) + p(\bar{c}, b) = 1$

Este sistema tiene un aspecto muy parecido al de algunos de los sistemas acostumbrados (excepto por la omisión de los antecedentes en todos los axiomas salvo en C′, y por la forma de dicho antecedente en C′); y es muy notable que —lo mismo que ocurre en el sistema del texto— proporciona para los elementos a, b, ..., los teoremas del álgebra de Boole, que, generalmente, han de asumirse por separado. Sin embargo, es más exigente de lo necesario: no sólo por introducir los números 1 y 0 (con lo cual oculta el hecho de que no sea menester mencionarlos en los axiomas), sino porque A3, B1 y C se siguen inmediatamente de A3′, A4′ y C′, mientras que para las deducciones inversas son indispensables todos los axiomas del sistema presentado en el texto, excepto A2 (para estas deducciones, véase el apéndice *V).

Dentro del sistema de axiomas que doy aquí —y, asimismo, dentro del propuesto en el texto— puede remplazarse la conyunción de los axiomas A4′ y B1′ por B1, y viceversa. También son aplicables al sistema que aquí describo las demostraciones de independencia (véase más adelante).

La deducción de B1 a partir de A4′ y de B1′, y en presencia de los axiomas A3 o A3′, C o C′ y B2, es como sigue:

(1) $0 \leqslant p(a, b) \leqslant p(a, a)$ A4′; C o C′; A3 o A3′

(2) $p(a, a) \geqslant p((aa)a, a) = p(aa, aa)p(a, a) = p(a, a)^2$ 2, B2; A3 o A3′

(3) $0 \leqslant p(a, b) \leqslant p(a, a) \leqslant 1$ 1, 2

(4) $p(ba, c) \leqslant p(a, c)$ B2, 3

Aplicamos ahora B1′:

(5) $p(ab, c) \leqslant p(a, c)$ 4, B1′

Para la deducción de A4′ y B1′ a partir de B1, véase el apéndice *V.

[8] C+ se sigue inmediatamente de A3 y C. Puede mostrarse la proposición inversa deduciendo A3 de C+ del modo siguiente:

(1) $p(c, b) + p(\bar{c}, b) \neq p(b, b) \rightarrow p(b, b) = p(d, b) = p(c, b) = p(\bar{c}, b)$ C+

(2) $p(a, a) \neq p(b, b) \rightarrow p(a, a) = p(c, b) + p(\bar{c}, b) \neq p(b, b) = p(c, b) = p(\bar{c}, b)$ C+,1

(3) $p(a, a) \neq p(b, b) \rightarrow p(a, a) = 2p(b, b)$ 2

(4) $p(b, b) \neq p(a, a) \rightarrow p(b, b) = 2p(a, a) = 4p(b, b) = 0 = p(a, a)$ 3

(5) $p(a, a) = p(b, b)$. 4

Cabe remplazar C+, por ejemplo, por la fórmula algo más exigente

C* $p(a, a) \neq p(b, c) \rightarrow p(a, c) + p(\bar{a}, c) = p(d, d)$.

B+ no es sino un modo «orgánico» de escribir la fórmula más sencilla, pero «inorgánica»,

B* $p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c) \leqslant p(a, c)$.

y el complemento aparece una sola vez; pero personalmente yo prefiero el de seis axiomas, con ser más largo [9].

Podemos comentar ahora los diversos postulados y axiomas de nuestro sistema.

Cabe omitir el postulado 1 (que pertenece solamente a la teoría *elemental)*, como se observa teniendo en cuenta que, para demostrar su independencia, podemos construir un sistema S que no sea numerable —se satisfacen todos los demás postulados si interpretamos S como el conjunto de todas las sumas finitas de subintervalos semiabiertos, $[x, y)$, del intervalo unidad, $[0, 1)$, siendo x e y números reales; podemos interpretar entonces $p(a)$ como la longitud de dichos intervalos, y $p(a, b)$ como igual a $p(ab)/p(b)$ supuesto que $p(b) \neq 0$, e igual a 1 supuesto que $b = 0$: en otro caso, sería lím $p(ab)/p(b)$, supuesto que existiera este límite—. La finalidad del postulado 1 es únicamente la de caracterizar los sistemas *elementales:* en la exposición axiomática del álgebra booleana o de la lógica de enunciados o de proposiciones se asume a menudo un postulado de esta índole, y queremos poder poner de manifiesto que en la teoría *elemental,* S es un álgebra booleana (numerable). (Véanse los puntos 8 a 10 del apéndice *VI, que señalan otro ejemplo.)

En el postulado 2 se necesita A1 para estatuir que *no todas las probabilidades son iguales* (digamos, iguales a 0 o a 1). La función que desempeña A2 es la de permitirnos demostrar «$p(x, a) = p(x, b)$» para todos los elementos a y b cuyas probabilidades sean iguales supuesta *cualquier* condición: cabe lograr lo mismo *sin* A2, pero sólo en el supuesto de que $p(a) \neq 0 \neq p(b)$. Así pues, A2 nos hace capaces de ampliar la equivalencia probabilística de a y b al segundo argumento, incluso en los casos en que a y b tengan *probabilidad absoluta nula.*

Puede remplazarse A2 por la fórmula algo más exigente

A2+ Si $p(a, a) = p(b, c) = p(c, b)$, entonces $p(a, b) = p(a, c)$, para todo c de S;

o por

B3 Si $p(ab, c) = p(ba, c)$, entonces $p(c, ab) = p(c, ba)$.

Es evidente que también podría remplazársela por esta otra (que es más sencilla, pero mucho más exigente):

B3+ $p(a, bc) = p(a, cb)$.

Pero como B3+ pide más de lo necesario —en realidad, bastaría con $p(a, (bc)\ (cb)) = p(a, (cb)\ (bc))$, pese a ser más débil— es algo engañosa: al adoptarla quedaría oculto el hecho de que puede demostrarse la ley de conmutación para el primer argumento con sólo los

[9] He aquí tres de las razones por que prefiero el sistema de seis axiomas al de cuatro: I) los axiomas del sistema más largo son algo menos desusados, y, por tanto, más intuitivos, especialmente en la forma mencionada en la nota anterior 6; II) para reducir el número de axiomas se introduce una variable suplementaria, lo cual es pagar un precio demasiado caro; III) la «organicidad» de B+ se logra por una especie de truco mecánico, y de ahí que tenga poco valor.

demás axiomas. A2+ es preferible a las otras fórmulas que hemos mencionado ahora, ya que evita emplear el producto de a y b (cosa que también hace A2, con ser mucho más débil).

Sin embargo, podemos sacar partido de las circunstancias que acabamos de indicar para reducir al número de axiomas a tres, a saber, A1, C+ y el axioma B que enunciamos a continuación y que combina B3+ y B+:

B Si $p(ab, c) \neq p(a, d)p(b, c)$ supuesto que $p(a, c) \geqslant p(a, d)p(b, c)$ y $p(a, d) = p(a, bc)$, entonces $p(a, cb) \neq p(a, d)$.

Aparte de exigir tal vez más de lo que podría parecer conveniente, este sistema de tres axiomas tiene todas las ventajas del anteriormente mencionado con cuatro (con A1, A2, B+ y C+).

Como ya se ha señalado, A3 se necesita para demostrar que $p(a, a) = 1$ para todo elemento a de S; pero puede omitírsele si se refuerza C: es claro, teniendo en cuenta C+, que A3 es superfluo si remplazamos en C las dos apariciones de «$p(b, b)$» por «$p(d, d)$» (o sólo la segunda aparición).

El postulado 3 pide la existencia de un producto (o encuentro, o intersección) de cualesquiera elementos a y b de S: caracteriza de un modo exhaustivo las propiedades de dicho producto (tales como indempotencia, conmutación y asociación) por medio de dos axiomas sencillos, de los que el primero es evidente intuitivamente y el segundo ha sido discutido en el apéndice *III.

En mi opinión, de todos nuestros axiomas, el B1 es el más evidente desde un punto de vista intuitivo. Es preferible tanto a A4′ como a B1′ (cf. la nota anterior 6), que reunidos le pueden reemplazar: pues cabe tomar equivocadamente a A4′ por una convención, frente a B1; y B1′ no caracteriza —como hace B1— un aspecto métrico intuitivo de la *probabilidad*, sino el producto o conyunción ab.

Como hace ver la fórmula B anterior, puede combinarse el axioma B2 con B1 y con A2+. Hay otras combinaciones posibles, entre ellas algunas en las que el producto aparece sólo una vez: son muy complicadas, pero tienen la ventaja de que se las puede dar una forma análoga a la de una definición. Por ejemplo, si en el axioma siguiente BD (que, como B, puede remplazar a A2, B1 y B2) introducimos el símbolo «(a)» dos veces —una vez al comienzo y otra antes de «$(\mathrm{E}b)$»— y reemplazamos la primera flecha (condicional) por una doble flecha (bicondicional), obtenemos una de las formas definicionales mentadas (téngase en cuenta que empleo aquí las abreviaciones explicadas al comienzo del apéndice *V).

BD $p(xy, a) = p(z, a) \longrightarrow (\mathrm{E}b)\,(c)\,(d)\,(\mathrm{E}e)\,(\mathrm{E}f)\,(\mathrm{E}g)\,(p(x, a) \geqslant p(z, a) =$
$= p(x, b)p(y, a)\ \&\ p(a, c) \geqslant p(b, c) \leqslant p(y, c)\ \&\ (p(a, e) \geqslant p(c, e) \leqslant$
$\leqslant p(y, e) \longrightarrow p(c,d) \leqslant p(b,d))\&(p(a,f) = p(y,f) \longrightarrow p(x, a) = p(x, b) =$
$= p(x, y))\ \&\ (p(x, g) \geqslant p(c, g) \leqslant p(y, g) \longrightarrow p(c, a) \leqslant p(z, a))).$

El postulado 4 pide la existencia de un complemento, $\bar{a}$, para todo a de S, y caracteriza dicho complemento por (una forma condicional debilitada de) algo que parece ser una fórmula evidente si se tiene en cuenta que $1 = p(a, a)$, a saber: «$p(a, c) + p(\bar{a}, c) = 1$». Se necesita la condición que precede a esta fórmula porque en caso de que c sea, digamos, $a\bar{a}$ (el «elemento vacío»), obtenemos $p(a, c) = 1 = p(\bar{a}, c)$: de modo que en este caso límite la fórmula aparentemente «evidente» falla.

Este postulado —o el axioma C— tiene el carácter de una definición de $p(\bar{a}\ b)$ a partir de $p(a, b)$ y $p(a, a)$, como puede verse fácilmente si lo escribimos del modo siguiente:

(I) $p(\bar{a}, b) = p(a, a) - p(a, b)$, supuesto que haya un c tal que $p(c, b) \neq p(a, a)$

(II) $p(\bar{a}, b) = p(a, a)$, supuesto que no exista tal c.

La fórmula que vamos a dar ahora, CD, es análoga a BD y puede *transformarse en un bicondicional, exactamente lo mismo que ocurría* con esta última.

CD $\quad p(\bar{x},a) \fallingdotseq p(y,a) \longrightarrow (b)(c)(p(x,a) + p(y,a) \neq p(b,b) \longrightarrow p(c,a)=p(b,b))$

A mi juicio, el sistema formado por A, BD y CD es un poco preferible al de A1, B y C+, no obstante la complejidad de BD.

Por fin, el postulado PA puede sustituirse por la sencilla definición

(.) $$p(a) = p(a, \overline{\bar{a}a})$$

la cual, sin embargo, utiliza la complementación y el producto, y, por ello, presupone los dos postulados 3 y 4 (deduciremos esta fórmula más adelante, en el apéndice *V, llamándola fórmula 75).

Puede demostrarse que nuestro sistema es *compatible:* podemos construir sistemas S de elementos (con un número infinito de elementos distintos, pues si S es finito la demostración es trivial) y una función $p(a, b)$ tal que se demuestre que se satisfacen todos los axiomas. También es posible demostrar que nuestro sistema axiomático es *independiente*. Debido a lo poco exigentes que son los axiomas, las demostraciones son muy fáciles.

Llegamos a una demostración trivial de la compatibilidad de un S finito asumiendo que $S = \{1, 0\}$: esto es, que S consta de dos elementos, 1 y 0. Se admite que el producto —o encuentro— y el complemento son, respectivamente, iguales al producto y el complemento (con respecto a 1) aritméticos; definimos $p(0, 1) = 0$, y en todos los demás casos hacemos $p(a, b) = 1$; entonces quedan satisfechos todos los axiomas.

Daremos dos interpretaciones finitas más de S antes de entrar en una que sea infinita numerable; las cuales no sólo satisfacen nuestro sistema axiomático, sino —por ejemplo— la siguiente aserción existencial:

(E) Hay elementos a, b y c de S, tales que

$$p(a, b) = 1 \text{ y } p(a, bc) = 0$$

Otra aserción análoga sería:

(E′) Hay un elemento a de S, tal que

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = p(\bar{a}, a) = 0 \neq p(a, a) = 1.$$

Nuestro primer ejemplo no satisface la aserción (E), como tampoco puede ocurrir tal cosa en ninguno de los sistemas probabilitarios que conozco (excepto, naturalmente, en algunos de mis propios sistemas).

El primer ejemplo que satisface nuestro sistema y (E) consta de cuatro elementos: $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Se define ab como el más pequeño de los dos números a y b, con la excepción siguiente: $1.2 = 2.1 = 0$. Definimos también: $\bar{a} = 3 - a$; $p(a) = p(a, 3) = 0$, siempre que sea $a = 0$ ó 1, y $p(a) = p(a, 3) = 1$, siempre que $a = 2$ ó 3; $p(a, 0) = 1$; $p(a, 1) = 0$, a menos que sea $a = 1$ o $a = 3$ (y, en este caso, $p(a, 1) = 1$). En los demás casos, $p(a, b) = p(ab)/p(b)$. Cabe identificar intuitivamente el elemento 1 con una ley universal (de probabilidad absoluta nula), y el 2 con su negación existencial. Con objeto de satisfacer (E) hemos de tomar $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$.

Se pueden representar los ejemplos que acabamos de describir mediante las dos «matrices» siguientes (método que, según creo, fue introducido por Huntington en 1904):

ab	0	1	2	3	$\bar{a}$
0	0	0	0	0	3
1	0	1	0	1	2
2	0	0	2	2	1
3	0	1	2	3	0

$p(a, b)$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	1	0	1	1
3	1	1	1	1

El segundo ejemplo es una generalización del primero, con la que se hace patente que puede ampliarse la aplicación de la idea que subyace a éste, hasta abarcar un número de elementos superior a un número cualquiera dado —con tal de que dichos elementos formen un álgebra booleana (lo cual quiere decir que su número ha de ser igual a 2^n)—. n puede considerarse que es el número de las zonas o clases mutuamente excluyentes mínimas en que está dividido cierto universo del discurso; podemos perfectamente hacer corresponder a cada una de estas clases una fracción positiva, $0 \leqslant r \leqslant 1$, que será su probabilidad absoluta, pero teniendo cuidado de que la suma de todas éstas sea igual a 1; hacemos corresponder también a una cualquiera de las sumas booleanas la suma aritmética de las probabilidades correspondientes, y a uno de los complementos booleanos el complemento aritmético con respecto a 1. Obsérvese que podemos asignar a una o varias de las zonas o clases mutuamente excluyentes y mínimas —pero no nulas— la probabilidad cero: si b es una de estas clases —o zonas—, hacemos $p(a, b) = 0$ en caso de que sea $ab = 0$, y $p(a, b) = 1$ en los demás casos; y, además, hacemos $p(a, 0) = 1$; mientras que en todos los casos restantes ponemos $p(a, b) = = p(ab)/p(b)$.

Para mostrar que nuestro sistema es compatible incluso en el supuesto de que S sea infinito numerable, podemos elegir la siguiente interpretación (que tiene interés por estar relacionada con la interpretación frecuencial). Sea S la clase de las fracciones racionales en representación diádica, de modo que si a es un elemento de S, podamos escribir en forma de sucesión, $a = a_1, a_2, ...$, en la que a_i sea ó 0 ó 1. Interpretamos ab como la sucesión $ab = a_1b_1, a_2b_2, \ldots$, de modo que $(ab)_i = a_ib_i$; y $\bar{a}$ como esta otra, $\bar{a} = 1—a_1, 1—a_2, ...$, con lo que $\bar{a}_i = 1—a_i$. Para definir $p(a, b)$ introducimos una expresión auxiliar, A_n, definida del modo siguiente:

$$A_n = \sum_n a_i$$

de suerte que tenemos

$$(AB)_n = \sum_n a_ib_i;$$

definimos, además, una función auxiliar, q:

$$q(a_n, b_n) = 1 \text{ siempre que } B_n = 0$$
$$q(a_n, b_n) = (AB)_n/B_n, \text{ siempre que } B_n \neq 0.$$

Podemos definir ahora, por fin,

$$p(a, b) = \text{lím}\, q(a_n, b_n).$$

Este límite existe para todos los elementos a y b de S, y es sumamente fácil hacer patente que satisface todos nuestros axiomas. (Véanse los puntos 8 a 10 del apéndice *VI, en que se da otro ejemplo.)

Con lo cual hemos terminado con la *compatibilidad* de nuestros sistemas axiomáticos.

Para hacer ver la *independencia* de A1 podemos hacer $p(a, b) = 1$ para todo a y todo b de S: entonces se satisfacen todos los axiomas, excepto A1.

Para mostrar la independencia de A2 suponemos [10] que S consta de tres elementos: $S = \{0, 1, 2\}$. No ofrece dificultad poner de ma-

[10] Teniendo en cuenta lo que se ha dicho antes acerca de A2, es claro que el problema de demostrar su independencia equivale al de construir un ejemplo (una matriz) que sea no conmutativo y de combinarlo con una regla numérica acerca de los valores de p que asegure que sólo el segundo argumento viola la ley de conmutación. La demostración de independencia de A2 que doy aquí, ideada para satisfacer estas condiciones, fue encontrada simultáneamente por el doctor J. Agassi y por mí mismo (este ejemplo satisface el postulado PA solamente si en dicho postulado se coloca una raya encima de cada letra b; pero satisface la definición (.) de la página 313).

nifiesto que el producto ab ha de ser no conmutativo; cabe definirlo, pues, como sigue: $1.2 = 2$, y, en todos los demás casos (incluyendo el de 2.1), ab es igual a $min(a, b)$ —esto es, al menor de los dos componentes a y b. Definimos también: $\bar{a} = 1$ si y sólo si $a = 0$, y, en los demás casos $\bar{a} = 0$; y, asimismo, $p(0, 2) = 0$, mas en todos los casos restantes $p(a, b) = 1$. Ahora puede hacerse ver con facilidad que $p(1, b) = p(2, b)$ para todo b, mientras que $p(0, 1) = 1$ y $p(0, 2) = 0$: de suerte que no se satisface A2, pero sí los demás axiomas.

Podemos hacer intuitiva esta interpretación escribiendo la matriz no conmutativa del modo siguiente:

ab	0	1	2	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
1	0	1	2	0
2	0	1	2	0

$p(0, 2) = 0$;
en todos los demás casos,
$p(a, b) = 1$

Vamos a poner en claro que A3 es independiente: como en la primera demostración de compatibilidad, tomamos $S = \{0, 1\}$, y los productos y complementos lógicos iguales a los aritméticos. Definimos $p(1, 1) = 1$, y, en todos los demás casos, $p(a, b) = 0$: A3 falla porque $p(1, 1) \neq p(0, 0)$ (mientras que se satisfacen los demás axiomas).

Para patentizar la independencia de B1, podemos adoptar $S = \{-1, 0, +1\}$; admitimos, además, que ab es el producto aritmético de a y b, así como $\bar{a} = -a$ y $p(a, b) = a.(1 - |b|)$. Entonces se satisfacen todos los axiomas, salvo B1, que no se cumple para $a = -1$, $b \neq +1$ y $c = 0$. Las matrices pueden escribirse así:

ab	-1	0	$+1$	$\bar{a}$
-1	$+1$	0	-1	$+1$
0	0	0	0	0
$+1$	-1	0	$+1$	-1

$p(a, b)$	-1	0	$+1$
-1	0	-1	0
0	0	0	0
$+1$	0	$+1$	0

Este mismo ejemplo demuestra la independencia de A4′ (cf. la nota 6 anterior). Un segundo ejemplo, con el que se hace ver que B1 es independiente (y también que B1′ lo es), se basa en la siguiente matriz no conmutativa;

ab	0	1	2	$\bar{a}$
0	0	1	0	2
1	0	1	1	0
2	0	1	2	0

$p(0, 2) = 0$;
en todos los demás casos,
$p(a, b) = 1$

B1 deja de cumplirse para $a = 0$, $b = 1$ y $c = 2$.

Para demostrar la independencia de B2 tomamos el mismo S que utilizamos con respecto a A3, y definimos: $p(0, 1) = 0$, y en los casos restantes $p(a, b) = 2$. B2 no se cumple, ya que $2 = p(1.1, 1) \neq \neq p(1, 1.1)p(1, 1) = 4$, pero los demás axiomas sí.

(Podemos tener otro ejemplo que haga visible la independencia de B2 si consideramos que este último axioma se necesita para demostrar «$p(ba, c) \leqslant p(a, c)$», es decir, el dual de B1; esto nos sugiere que es posible adoptar el segundo ejemplo de B1, sin más que pasar el valor de 1.0 de 0 a 1, y el de 0.1 da 1 a 0; entonces B2 no se cumple para $a = 1$, $b = 0$ y $c = 2$. (*Véase también la nota* *2 de la página 299, ejemplo correspondiente a A1; y puede asimismo utilizarse el ejemplo para A2.)

Finalmente, con objeto de poner de manifiesto que C es independiente, tomamos de nuevo el último S adoptado, pero suponemos que $\bar{a} = a$. Si hacemos ahora $p(0, 1) = 0$, y en los casos restantes $p(a, b) = 1$, entonces falla C, ya que $p(\bar{0}, 1) \neq p(1, 1)$, a la vez que se cumplen los demás axiomas.

De este modo se terminan las demostraciones de la independencia de los *axiomas* operativos.

En cuanto a la parte no operativa de los *postulados*, hemos dado ya una demostración de la independencia del postulado 1 (al comentarlo).

En su parte no operativa, el postulado 2 exige que siempre que a y b pertenezcan a S, $p(a, b)$ sea un número real. Para hacer ver la independencia de esta condición —a la que podemos referirnos sucintamente llamándola «postulado 2»— consideramos, en primer lugar, una *interpretación booleana no numérica* de S. Con este fin, interpretamos S como un álgebra booleana no numérica y —como máximo— numerable (tal como un conjunto de enunciados, en el que «a», «b», etc., sean *nombres de enunciados* variables); estipulamos que «$\bar{x}$» denote, si x es un número, lo mismo que «$-x$», y si x es un elemento booleano (digamos, un enunciado), el complemento booleano (negación) de x; y determinamos que «xy», «$x + y$», «$x = y$», «$x \neq y$» y «$x \leqslant y$» tengan su sentido aritmético acostumbrado cuando x e y sean números, y su sentido booleano perfectamente conocido siempre que x e y sean elementos booleanos (si son enunciados, habría que interpretar «$x \leqslant y$» como «x entraña y»). Para demostrar la independencia del postulado 2 basta añadir meramente un requisito más: interpretamos «$p(a, b)$» como nuevo nombre del elemento booleano $a + \bar{b}$. Entonces se viene abajo el postulado 2, mientras que A1, A2, A3 y todos los demás axiomas y postulados se convierten en teoremas muy conocidos del álgebra booleana [11].

Las demostraciones de la independencia de las partes existenciales de los postulados 3 y 4 son casi triviales. Introducimos primeramente un sistema auxiliar, $S' = \{0, 1, 2, 3\}$, y definimos el producto, el complemento y la probabilidad absoluta por medio de la matriz:

ab	0	1	2	3	$\bar{a}$	$p(a)$
0	0	0	0	0	3	0
1	0	1	0	1	2	1/2
2	0	0	2	2	1	1/2
3	0	1	2	3	0	1

Se define la probabilidad relativa por

$$p(a, b) = 1 \quad \text{siempre que} \quad p(b) = 0$$
$$p(a, b) = p(ab)/p(b) \quad \text{siempre que} \quad p(b) \neq 0.$$

Este sistema S′ satisface todos nuestros axiomas y postulados. Para hacer patente la independencia de la parte existencial del postulado 3 adoptamos ahora un S que esté confinado a los elementos 1 y 2 de S′, y no alteramos en nada lo demás: es evidente que no se cumple el postulado 3, ya que el producto de los elementos 1 y 2 no pertenece a S. Podemos demostrar de un modo semejante la independencia del postulado 4, sin más que reducir S a los elementos 0 y 1 de S′ (podríamos elegir, asimismo, 2 y 3, o cualquier combinación formada con tres elementos de los cuatro de S′, exceptuada la consistente en 1, 2 y 3).

La demostración de la independencia del postulado PA es todavía más trivial: sólo necesitamos interpretar S y $p(a, b)$ en el sentido de nuestra primera demostración de compatibilidad, y hacer $p(a) =$ $=$ *constante* (por ejemplo, 0, 1/2, 1 ó 2), para llegar a una interpretación en la que falla dicho postulado.

Así pues, hemos demostrado que cada una de las aserciones que hemos hecho en nuestro sistema axiomático es independiente. (No ha llegado a mi conocimiento que se hayan publicado antes demostraciones de independencia para sistemas axiomáticos de la probabilidad: supongo que la razón es que los sistemas conocidos no son independientes, y eso en el supuesto de que sean satisfactorios por lo demás.)

---

[11] Una leve variante de esta interpretación transforma todos los axiomas en tautologías del cálculo proposicional, que satisfacen todos los postulados, salvo el 2.

La redundancia de los sistemas usuales se debe al hecho de que todos ellos postulan, implícita o explícitamente, la validez de algunas o de todas las reglas del álgebra booleana para los elementos de S; pero —como demostraremos al final del apéndice *V— todas estas reglas son deductibles de nuestro sistema si definimos la equivalencia booleana, «$a = b$», por la fórmula

(*) $a = b$ si y sólo si $p(a, c) = p(b, c)$ para todo c perteneciente a S.

Puede preguntarse si resultaría superfluo alguno de nuestros axiomas si *postulásemos* que ab fuera un producto booleano y $\bar{a}$ un complemento booleano, que ambos obedecieran a todas las leyes del álgebra booleana y que (*) fuese válida. A ello hay que responder que ninguno se convertiría en superfluo, excepto B1′; solamente en el caso de que, además, postulásemos que *en el segundo argumento* de la función p pudieran substituirse mutuamente dos elementos cualesquiera para los que cupiese demostrar la equivalencia booleana, se haría superfluo A2, cuya finalidad es precisamente la misma que la de semejante postulado suplementario. Puede verse que nuestros axiomas continuarían sin ser superfluos advirtiendo que es posible demostrar su independencia (excepto la de A2, desde luego), por medio de ejemplos que satisfagan al álgebra booleana: así he hecho para todos ellos, con la excepción de B1 y C, para los que he presentado ejemplos más sencillos; y doy a continuación un álgebra booleana que manifiesta la independencia de B1 —y de A4′—: este ejemplo es esencialmente el mismo que el último presentado:

ab	—1	0	1	2	$\bar{a}$
—1	—1	0	—1	0	2
0	0	0	0	0	1
1	—1	0	1	2	0
2	0	0	2	2	—1

$p(a) = a$;
$pa, (0) = 1$;
en todos los demás casos,
$p(a, b) = p(ab)/p(b) = ab/b$

B1 queda violado, ya que $2 = p(1.2, 1) > p(1, 1) = 1$.

Para demostrar la independencia de C tomamos el mismo ejemplo, pero en el que sea $p(a, b) = 0$ siempre que $ab = 0 \neq b$ (y sea $p(a, b) = 1$ en los demás casos); o podemos también adoptar el ejemplo de la página anterior, en el que se tenga $p(1) = p(2) = 0$, o bien $p(1) = p(2) = 1$.

Cabe expresar el hecho de que nuestro sistema permanezca independiente incluso si postulamos el álgebra booleana y (*), diciendo que es «autónomamente independiente» (como es natural, si sustituimos nuestro axioma B1 por A4′ y B1′ —véase la nota 6 anterior— deja de poseer esta característica). Me parece que la independencia autónoma es una propiedad interesante (y deseable) de los sistemas axiomáticos para el cálculo de probabilidades [12].

Como conclusión, quiero definir un «sistema admisible» S y un «*campo boreliano de probabilidades*» S, a base de las nociones «autónomas» —esto es, probabilísticas— de nuestra teoría. El segundo sentido de S lo he expresado con un término de Kolmogorov, al cual doy, sin embargo, un significado algo más amplio que el suyo: estudiaré con cierto detalle la diferencia existente entre el modo de tratar el asunto de Kolmogorov y el mío, pues me parece que es reveladora.

Defino primeramente en términos probabilísticos qué es lo que quiero mentar cuando digo que a es un superelemento de b (y más amplio, o bien igual a b), o que b es un subelemento de a (y lógicamente más fuerte o igual que a). La definición es como sigue (véase también el apéndice *V, *D*3, pág. 331):

a es un superelemento de b, o b es un subelemento de a —con símbolos, $a \geqslant b$— si y sólo si $p(a, x) \geqslant p(b, x)$ para todo elemento x de S.

Ahora voy a definir lo que quiero decir con el elemento producto, a, de una sucesión infinita, A $= a_1, a_2, ...,$ tal que todos sus miembros, a_n, sean elementos de S.

Ordenemos algunos de los elementos de S —o quizá todos— en una *sucesión infinita* A $= a_1, a_2, ...,$ en la que se permita a todo elemento de S aparecer más de una vez. Por ejemplo, si S consta sólo de los dos elementos 0 y 1, tanto A = 0, 1, 0, 1, ..., como B = 0, 0, 0, ..., serán sucesiones infinitas de elementos de S en el sentido a que ahora nos referimos; pero el caso más importante, naturalmente, es el de una sucesión infinita A tal que todos sus miembros (o casi todos) sean elementos *diferentes* de S; que, por tanto, contendrá un número infinito de elementos.

Un caso que tiene especial interés es el de una *sucesión infinita decreciente* (o, mejor dicho, no creciente), o sea, una sucesión A $= a_1, a_2, ...,$ en la que $a_n \geqslant a_{n+1}$ para toda pareja de miembros consecutivos de ella.

Podemos definir ya el *elemento producto* (booleano, en vez de correspondiente a la teoría de conjuntos), a, de la sucesión infinita A $= a_1, a_2, ...,$ como el más amplio de todos los elementos de S que sean subelementos de todo elemento a_n perteneciente a la sucesión A. O, en símbolos:

$a = \pi\, a_n$ si y sólo si a satisface las dos condiciones siguientes:

I) $p(a_n, x) \geqslant p(a, x)$ para todos los elementos a_n de A y para todo elemento a de S.

II) $p(a, x) \geqslant p(b, x)$ para todos los elementos x de S y para todo elemento b de S que satisfaga la condición $p(a_n, y) \geqslant p(b, y)$ para todos los elementos a_n y para todo elemento y de S.

[12] En el apéndice *V estudiamos lo que ocurre cuando se pide algo mucho más enérgico que la *independencia autónoma*: a saber, que el sistema sea «completamente *métrico*».

Con objeto de poner de manifiesto la diferencia existente entre nuestro elemento producto (booleano), a, de A, y el producto —o encuentro— (interno) de teoría de conjuntos (también de A), vamos a limitar ahora nuestra discusión a ejemplos S que satisfagan nuestros postulados 2 a 5 y cuyos elementos x, y, z, ..., sean conjuntos, de suerte que xy sea su producto de teoría de conjuntos.

Nuestro ejemplo principal, al cual me referiré como «el ejemplo del semi-intervalo omitido», es el siguiente:

S_1 es un sistema de ciertos subintervalos semiabiertos del intervalo universal $u = (0, 1]$, y contiene precisamente, *a)* la sucesión decreciente A tal que $a_n = (0, \frac{1}{2} + 2^{-n}]$, y, además, *b)* los productos de teoría de conjuntos de dos cualesquiera de sus elementos y los complementos de teoría de conjuntos de cualesquiera elementos suyos.

Así pues, S_1 no contiene el «semi-intervalo» $s = (0, \frac{1}{2}]$, ni tampoco ningún subintervalo no vacío de s.

Puesto que el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$ es el producto de teoría de conjuntos de la sucesión A, es evidente que S_1 no contiene semejante producto. Pero contiene, en cambio, el «elemento producto» (booleano) de A, tal como lo hemos definido: pues el intervalo vacío satisface de un modo trivial la condición I), y por ser el intervalo más amplio que la satisface, también satisface II).

Es, asimismo, obvio que si añadimos a S_1, digamos, uno cualquiera de los intervalos $b_1 = (0, {}^1/_8]$, $b_2 = (0, {}^3/_{16}]$, etc., el mayor de ellos será el elemento producto de A, en el sentido (booleano) de nuestra definición, aun cuando ninguno será el producto de teoría de conjuntos de A.

Podría pensarse por un momento que, debido a la presencia de un elemento vacío en todo S, cada S habría de contener —del mismo modo que S_1— un elemento producto (en el sentido de nuestra definición) de cualquier A de S: pues, en caso de que no contenga un elemento más amplio que satisfaga I), el elemento vacío podría cumplir siempre ese papel. Pero puede verse que no ocurre así por medio de un ejemplo, S_2, que contenga, además de los elementos de S_1, los de la sucesión $B = b_1, b_2, ...$, en donde $b_n = (0, (2^n - 1)/2^{n+2}]$ (y, aún más: los productos de teoría de conjuntos de dos elementos cualesquiera, y el complemento de teoría de conjuntos de cualquier elemento): se observa fácilmente que, aunque todo b_n satisface la condición I) para el elemento producto de A, ninguno de ellos cumple la II), de suerte que —en realidad— *no existe en S_2 un elemento más amplio que cualquier otro,* que satisfaga la condición I) para el elemento producto de A.

Así pues, S_2 no contiene ni el producto de teoría de conjuntos de A ni un elemento producto en el sentido (booleano) que empleamos nosotros. Pero tanto S_1 como todos los sistemas que se obtienen añadiendo a S_1 un número finito de intervalos nuevos (más los productos y complementos), *contendrán un elemento producto de A* en nuestro sentido, si bien no en el de teoría de conjuntos —a menos, ciertamente, que añadamos a S_1 el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$.

Es posible definir ahora como sigue un «sistema admisible S» y un «campo boreliano de probabilidades S».

I) Se dice que un sistema S que satisface los postulados 2 a 4 es un *sistema admisible*, si y sólo si S cumple —además de nuestro conjunto de postulados— la siguiente *condición definitoria:*

Sea $bA = a_1b, a_2b, ...$, una sucesión decreciente cualquiera de elementos de S (decimos, en este caso, que $A = a_1, a_2, ...$, «decrece con respecto a b»); entonces, si el elemento producto ab de esta sucesión pertenece a S [13],

$$\text{lím}\, p(a_n, b) = p(a, b).$$

II) Se dice que un sistema admisible S es un *campo boreliano de probabilidades* si y sólo si en S se encuentra un elemento producto de cualquier sucesión decreciente (absoluta o relativamente) de elementos de S.

De estas dos definiciones, la I) corresponde exactamente al llamado «axioma de continuidad» de Kolmogorov, mientras que la II) desempeña en nuestro sistema un papel análogo a la definición kolmogoroviana de campos borelianos de probabilidad.

Puede ponerse ahora de manifiesto que *siempre que* S *sea un campo boreliano de probabilidades en el sentido de Kolmogorov, también lo será en el sentido que aquí hemos definido, y la probabilidad será una función de medida computablemente aditiva de los conjuntos que constituyen los elementos de* S.

Las definiciones de sistema admisible y de campo boreliano de probabilidades están estructuradas de tal modo que todos los sistemas S que satisfacen nuestros postulados y que contienen no más de un número finito de elementos diferentes son sistemas admisibles y campos borelianos; y, por tanto, nuestras definiciones tienen interés solamente en lo que se refiere a sistemas S *que contengan un número infinito de elementos diferentes:* estos sistemas infinitos pueden satisfacer o no una condición definitoria, o la otra, o ambas; o, dicho de otro modo, las condiciones mencionadas no son redundantes —o sea, son independientes— para sistemas infinitos.

Valiéndose del ejemplo, S_1, del semi-intervalo omitido —que hemos dado más arriba— puede demostrarse esta no redundancia con la máxima facilidad, en lo que se refiere a I) —dada en la forma indicada en la nota 13 a pie de página—. Todo lo que hay que hacer es definir la probabilidad, $p(x)$, haciéndola igual a $l(x)$, es decir,

---

[13] Podría haber añadido, «y si $p(\bar{a}\bar{b}, ab) \neq 0$, de modo que ab sea vacío»: con ello, mi formulación se hubiese acercado aún más a la de Kolmogorov; pero no es necesaria esta condición. Quiero señalar aquí que me ha alentado mucho la lectura del interesantísimo trabajo de A. Rényi «On a New Axiomatic Theory of Probability», en *Acta Mathematica Acad. Scient. Hungariae* **6**, 1955, págs. 286-335: aun cuando hace varios años que me había dado cuenta de que era menester relativizar el sistema de Kolmogorov, y aunque había señalado en varias ocasiones algunas de las ventajas matemáticas de un sistema relativizado, sólo me he percatado de hasta qué punto podría ser fértil dicha relativización gracias al trabajo de Rényi.

a la longitud del intervalo x: entonces queda transgredida nuestra primera definición I), ya que lím $p(a_n) = \frac{1}{2}$, mientras que el elemento producto de A (en S) es $p(a) = 0$. Y el ejemplo S_2 viola la definición II), aun cuando satisface (de un modo vacío) la primera.

Si bien el primero de estos ejemplos asienta la independencia —o, con mayor precisión, la no superfluencia— de nuestra primera definición (al transgredirla), en la forma que le hemos dado no hace lo mismo con la independencia del «axioma de continuidad» de Kolmogorov, al cual es evidente que satisface: pues el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$, esté en S o no, es el único producto de teoría de conjuntos de A, de modo que para la teoría de conjuntos $a = s$ es verdadera (pertenezca o no a a S); y a una con $a = s$ tenemos lím $p(a_n) = p(a)$. Así pues, se satisface el axioma de Kolmogorov (incluso si omitimos la condición $p(\bar{a}, a) \neq 0$: cf. la nota 13).

En este orden de cosas conviene mencionar que, aunque Kolmogorov pretende que su «axioma de continuidad» es independiente, en su libro no logra presentar ninguna demostración de tal cosa. Pero cabe reestructurar nuestra prueba de independencia de suerte que se haga aplicable al axioma de Kolmogorov y a su planteamiento dentro de la teoría de conjuntos: lo cual puede hacerse eligiendo —en vez de nuestro S_1— un sistema S_3 de intervalos exactamente como el S_1, pero que esté basado en una sucesión $C = c_1, c_2, \ldots$, definida por medio de $c_n = (0, 2^{-n}]$, en lugar de estarlo en la sucesión $A = a_1, a_2, \ldots$, que tiene $a_n = (0, \frac{1}{2} + 2^{-n}]$. Podemos mostrar ahora la independencia del axioma de Kolmogorov definiendo las probabilidades de los elementos de la sucesión C del modo que sigue:

$$p(c_n) = l(c_n) + \frac{1}{2} = p(a_n)$$

en donde $l(c_n)$ es la longitud del intervalo c_n. Esta definición es notablemente anti-intuitiva, ya que —por ejemplo— asigna la probabilidad uno a cada uno de los dos intervalos $(0, \frac{1}{2}]$ y $(0, 1]$, y, por tanto, la probabilidad cero al intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$; y el hecho de que viole el axioma de Kolmogorov (con lo cual establece su independencia) está estrechamente relacionado con aquel carácter anti-intuitivo: pues lo viola por ser lím $p(c_n) = \frac{1}{2}$ aun cuando $p(c) = 0$. Debido al carácter mencionado, la *compatibilidad* de este ejemplo dista mucho de ser evidente, de modo que surge la necesidad de demostrarla si se quiere asentar la validez de la prueba de la independencia del axioma de Kolmogorov.

Mas no ofrece dificultad demostrar tal compatabilidad si tenemos en cuenta nuestra demostración anterior de independencia —esto es, la de nuestra propia definición valiéndonos del ejemplo S_1. Pues las probabilidades $p(a_n)$ y $p(c_n)$ de los dos ejemplos S_1 y S_3 coinciden; y como al hacerse corresponder las dos sucesiones A y C podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de S_1 y S_3, la compatibilidad del primer sistema demuestra la del último.

No cabe duda de que *cualquier* ejemplo que demuestre la independencia del axioma de Kolmogorov ha de ser igualmente anti-intuitivo, de modo que su compatibilidad necesitará siempre ser demostrada por un método parecido al nuestro. Dicho de otra forma: la demostración de la independencia del axioma de Kolmogorov tendrá que emplear un ejemplo que se encuentre basado, en lo esencial, en una definición (booleana) de producto como la nuestra, en lugar de estarlo en una definición de teoría de conjuntos.

Aun cuando todo campo boreliano de probabilidades en el sentido de Kolmogorov lo es también en el nuestro, no ocurre a la inversa. Pues podemos construir un sistema, S_4, que sea exactamente como S_1, en el que también esté omitido $s = (a, \frac{1}{2}]$ y que contenga, en su lugar, el intervalo *abierto* $g = (a, \frac{1}{2})$, con $p(g) = \frac{1}{2}$; algo arbitrariamente, definimos ahora $\bar{g} = u - g = (\frac{1}{2}, 1]$ y $u - (g + \bar{g}) = u\bar{u}$ (en vez del punto $\frac{1}{2}$). Se ve fácilmente que S_4 es un campo boreliano en nuestro sentido, con g como elemento producto de A; pero no en el sentido de Kolmogorov, ya que no contiene el producto de teoría de conjuntos de A: luego nuestra definición permite una *interpretación por un sistema de conjuntos* que no sea un sistema boreliano, y en el que el producto y el complemento no sean exactamente el producto y el complemento de teoría de conjuntos. Así pues, nuestra definición es más amplia que la de Kolmogorov.

Nuestras demostraciones de independencia de I) y II) arrojan alguna luz, según me parece, sobre la función que desempeñan estas definiciones. I) sirve para excluir sistemas tales como el S_1, con objeto de asegurar que el producto (o límite) de una sucesión decreciente es adecuado desde el punto de vista de la teoría de la medida: el límite de las medidas ha de ser igual a la medida del límite. Y el papel de II) es el de excluir sistemas tales como el S_2, que poseen sucesiones crecientes sin límites: asegura que toda sucesión decreciente tiene en S un producto, y toda sucesión creciente una suma.

Deducciones dentro de la teoría formal de la probabilidad

Me propongo dar en este apéndice las deducciones más importantes del sistema de postulados que se ha expuesto en el apéndice *IV. Voy a mostrar cómo se obtienen las leyes de los extremos superior e inferior, las de idempotencia, conmutación, asociación y distribución, así como una definición más sencilla de la probabilidad absoluta; e indicaré también de qué forma es deductible dentro de este sistema el álgebra booleana. En otro lugar se estudiará todo ello más a fondo.

Emplearé una flecha, «... $\rightarrow$...», como abreviación de «si ..., entonces ...», una doble flecha, «...$\longleftrightarrow$...», para «... si y sólo si ...», «&» en substitución de «y», «(Ea) ...» en lugar de «existe en S un a tal que ...», y «(a) ...» remplazando a «para todo a de S, ...».

Primeramente, enuncio de nuevo el postulado 2 y los seis axiomas operativos que citaremos en las demostraciones (los demás postulados se utilizarán sólo implícitamente: incluso el postulado 2 se empleará nada más que una vez, en la demostración de 5). Al leer los axiomas A3 y C debe tenerse en cuenta una relación que demostraré pronto (véase la fórmula 23): $p(a, a) = 1$.

Postulado 2. Si a y b pertenecen a S, entonces $p(a, b)$ es un número real.

A1 $\qquad (\mathrm{E}c)(\mathrm{E}d)\, p(a, b) \neq p(c, d).$

A2 $\qquad ((c)(p(a, c) = p(b, c)) \rightarrow p(d, a) = p(d, b).$

A3 $\qquad p(a, a) = p(b, b).$

B1 $\qquad p(ab, c) \leqslant p(a, c).$

B2 $\qquad p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c).$

C $\qquad p(a, a) \neq p(b, a) \rightarrow p(a, a) = p(c, a) + p(\bar{c}, a).$

Procedo ahora a realizar las deducciones.

(1)	$p(a, a) = p(b, b) = k$	Abreviación basada en A3
(2)	$p((aa)a, a) \leqslant p(aa, a) \leqslant p(a, a) = k$	B1, 1
(3)	$p((aa)a, a) = p(aa, aa)p(a, a) = k^2$	B2, 1
(4)	$k^2 \leqslant k$	2, 3
(5)	$0 \leqslant k \leqslant 1$	4 (y postulado 2)
(6)	$k \neq p(a, b) \rightarrow k = k + p(\bar{b}, b)$	C, 1
(7)	$k \neq p(a, b) \rightarrow p(\bar{b}, b) = 0$	6

(8)	$p(a\bar{b}, b) = p(a, \bar{b}b)p(\bar{b}, b)$	B2
(9)	$k \neq p(a, b) \rightarrow 0 = p(a\bar{b}, b) \leqslant p(a, b)$	7, 8, B1
(10)	$k \neq p(a, b) \rightarrow 0 \leqslant p(a, b)$	9
(11)	$k = p(a, b) \rightarrow 0 \leqslant p(a, b)$	5
(12)	$0 \leqslant p(a, b)$	11
(13)	$0 \leqslant p(\bar{a}, b)$	12
(14)	$k \neq p(a, b) \rightarrow k \geqslant p(a, b)$	C, 1, 13
(15)	$p(a, b) \leqslant k \leqslant 1$	14, 5
(16)	$0 \leqslant p(a, b) \leqslant k \leqslant 1$	12, 15
(17)	$k = p(aa, aa) \leqslant p(a, aa) \leqslant k$	1, B1, 15
(18)	$k = p(a(aa), a(aa)) \leqslant p(a, a(aa)) \leqslant k$	1, B1, 15
(19)	$k = p(aa, aa) = p(a, a(aa))p(a, aa) = k^2$	1, B2, 17, 18
(20)	$k = k^2$	19
(21)	$(\mathrm{E}a)\,(\mathrm{E}b)\,p(a, b) \neq 0 \rightarrow k = 1$	16, 20
(22)	$(\mathrm{E}a)\,(\mathrm{E}b)\,p(a, b) \neq 0$	A1
(23)	$p(a, a) = k = 1$	1, 21, 22
(24)	$(\mathrm{E}b)\,(\mathrm{E}a)\,p(b, a) \neq k$	A1, 1
(25)	$(\mathrm{E}a)\,p(\bar{a}, a) = 0$	7, 24

Con esto hemos estatuido todas las leyes de los extremos superior e inferior: las fórmulas (12) y (15), resumidas en (16), hacen ver que las probabilidades tienen por extremos 0 y 1; y las (23) y (25) ponen de manifiesto que ambos extremos son accesibles.

(26)	$0 \leqslant p(a, bc) \leqslant 1$	16
(27)	$p(ab, c) \leqslant p(b, c)$	B2, 26

Esta es la segunda ley de monotonía, análoga a la B1.

(28)	$1 = p(ba, ba) \leqslant p(a, ba) = 1$	23, 27, 15
(29)	$p(ab, a) = p(b, a)$	B2, 28

Esta es una forma de la «ley de redundancia» (Cf. 29^+, en la página 328). Volvámonos ahora a la deducción de las leyes «algebraicas» (contrapuestas a las «métricas»), o sea, a las que ordinariamente se toman del álgebra booleana.

(30)	$1 = p(ab, ab) \leqslant p(a, ab) = 1$	23, B1, 15
(31)	$p(aa, b) = p(a, ab)p(a, b)$	B2
(32)	$p(aa, b) = p(a, b)$	30, 31

Esta es, pues, la ley de idempotencia, llamada algunas veces «ley de tautología». Deduzcamos ahora la ley de conmutación.

(33)	$p(a(bc), a(bc)) = 1$	23
(34)	$p(bc, a(bc)) = 1$	33, 27, 15

(35)	$p(b, a(bc)) = 1$	34, B1, 15
(36)	$p(ba, bc) = p(ab, c)$	35, B2
(37)	$p((ba)b, c) = p(ab, c)$	36, B2
(38)	$p(ba, c) \geqslant p(ab, c)$	37, B1
(39)	$p(ab, c) \geqslant p(ba, c)$	38 (subst.)
(40)	$p(ab, c) = p(ba, c)$	38, 39

Con lo cual tenemos ya la ley de conmutación para el primer argumento (para extenderla al segundo tendríamos que emplear A2), que hemos deducido a partir de (23) sin más que emplear las dos leyes de monotonía (B1 y 27) y B2. Dediquémonos ahora a la deducción de la ley de asociación.

(41)	$p(ab, d((ab)c)) = 1$	35 (subst.)
(42)	$p(a, d((ab)c)) = 1 = p(b, d((ab)c))$	41, B1, 15, 27
(43)	$p(a, (bc)((ab)c)) = 1$	42 (subst.)
(44)	$p(a(bc), (ab)c) = p(bc, (ab)c)$	43, B2
(45)	$p(bc, (ab)c) = p(b, c((ab)c))p(c, (ab)c)$	B2
(46)	$p(b, c((ab)c)) = 1$	42 (subst.)
(47)	$p(c, (ab)c) = 1$	23, 27, 15
(48)	$p(a(bc), (ab)c) = 1$	44 a 47

Esta es una forma preliminar de la ley que buscamos; de ella se sigue (62) en virtud de A2+ (y de B2), pero siempre que es posible evito emplear A2 y A2+.

(49)	$p(a(b(cd)), d) = p(cd, b(ad))p(b, ad)p(a, d)$	40, B2
(50)	$p(a(bc), d) = p(c, b(ad))p(b, ad)p(a, d)$	40, B2
(51)	$p(a(bc), d) \geqslant p(a(b(cd)), d)$	49, 50, B1

Tenemos así una especie de generalización débil de la primera ley de monotonía, B1.

(52)	$p(a(b(cd)), (ab)(cd)) = 1$	48 (subst.)
(53)	$p((a(b(cd))(ab), cd) = p(ab, cd)$	52, B2
(54)	$p(a(b(cd)), cd) \geqslant p(ab, cd)$	53, B1
(55)	$p((a(b(cd)))c, d) \geqslant p((ab)c, d)$	54, B2
(56)	$p(a(b(cd)), d) \geqslant p((ab)c, d)$	55, B1
(57)	$p(a(bc), d) \geqslant p((ab)c, d)$	51, 56

He aquí media ley de asociación.

(58)	$p((bc)a, d) \geqslant p((ab)c, d)$	57, 40
(59)	$p((ab)c, d) \geqslant p(b(ca), d)$	58 (subst.), 40
(60)	$p((bc)a, d) \geqslant p(b(ca), d)$	58, 59
(61)	$p((ab)c, d) \geqslant p(a(bc), d)$	60 (subst.)

Y ésta es la segunda mitad de dicha ley.

(62)	$p((ab)c, d) = p(a(bc), d)$	57, 61

Tenemos, con esto, la forma completa de la ley de asociación para el primer argumento (véase, asimismo, la fórmula (g), al comienzo del apéndice *IV). La ley correspondiente al segundo argumento puede obtenerse aplicando A2 (si se aplica B2 dos veces a cada miembro de (62) se llega únicamente a una forma condicional cuyo antecedente es «$p(bc, d) \neq 0 \rightarrow$ »).

Voy a ocuparme ahora de generalizar el axioma de complementación, C (y seré un poco más conciso en mis deducciones de ahora en adelante).

(63) $p(\bar{b}, b) \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad p(c, b) = 1$ 7, 23

(64) $p(a, b) + p(\bar{a}, b) = 1 + p(\bar{b}, b)$ C, 23, 63

Hemos obtenido una forma no condicional del principio de complementación, C, que voy ahora a generalizar.

Teniendo en cuenta que (64) está incondicionado, y que «a» no aparece en su segundo miembro, podemos colocar «c» en lugar de «a» y afirmar:

(65) $p(a, b) + p(\bar{a}, b) = p(c, b) + p(\bar{c}, b)$ 64

(66) $p(a, bd) + p(\bar{a}, bd) = p(c, bd) + p(\bar{c}, bd)$ 65

Multiplicando por $p(b, d)$, obtenemos

(67) $p(ab, d) + p(\bar{a}b, d) = p(cb, d) + p(\bar{c}b, d)$. B2, 66

que es una generalización de (65). Por substitución llegamos a

(68) $p(ab, c) + p(\bar{a}b, c) = p(cb, c) + p(\bar{c}b, c)$ 67

Teniendo en cuenta

(69) $p(\bar{c}b, c) = p(\bar{c}, c)$, 7, B1, 23, 63

podemos escribir (68) más sucintamente, por analogía con (64):

(70) $p(ab, c) + p(\bar{a}b, c) = p(b, c) + p(\bar{c}, c)$. 68, 69, 29

Que es una generalización de la forma incondicionada de C, o sea, de la fórmula (64)[1].

---

[1] Para deducir (70) necesitamos la fórmula (29) en la forma siguiente:

$$p(cb, c) = p(b, c),$$

Apliquemos ahora (40), con lo que obtenemos

(29′) $p(ab, b) = p(a, b)$ 29, 40

Se trata de otra forma de la ley de redundancia, cuya forma más general es

(29+) $p(b, c) = 1 \rightarrow p(a\bar{b}, c) = p(\bar{c}, c)$, y por tanto $p(ab,c) = p(a,c)$ 64, 70, 40

A éstas podemos añadir la ley de idempotencia para el segundo argumento:

(30′) $p(ab, b) = p(a, bb) = p(a, b)$. B2, 25, 29′

Además, a partir de (30) obtenemos, por substitución,

(31′) $p(a, a\bar{a}) = 1$ 30

y, análogamente, de (28′):

(32′) $p(\bar{a}, a\bar{a})$ 28

Esto nos consigue,

(33′) $p(a, b\bar{b}) = 1$ 31′ 32′, C

Tenemos, por tanto,

(34′) $(\mathrm{E}b)(a)\, p(a, b) = 1$ 33′

(71) $p(aa, b) + p(\bar{a}a, b) = p(a, b) + p(\bar{b}, b)$ 70
(72) $p(\bar{a}a, b) = p(a\bar{a}, b) = p(\bar{b}, b)$ 40, 71, 32
(73) $p(\bar{a}a, b) + p(\overline{\bar{a}a}, b) = p(a\bar{a}, b) + p(\overline{a\bar{a}}, b) = 1 + p(\bar{b}, b)$ 64
(74) $p(\overline{\bar{a}a}, b) = 1 = p(\overline{a\bar{a}}, b)$ 72, 73

De este modo se establece que podemos satisfacer la condición del postulado PA si hacemos $b = \overline{a\bar{a}}$; y obtenemos, de acuerdo con ello,

(75) $p(a) = p(a, \overline{a\bar{a}}) = p(a, \overline{\bar{a}a}) = p(a\, \overline{\bar{b}b}) = p(a, \overline{\bar{b}b})$; 23, 74, PA

esto es, una definición de probabilidad absoluta en una forma más manejable.

Deducimos luego la ley general de adición:

(76) $p(a\bar{b}, c) = p(a, c) - p(ab, c) + p(\bar{c}, c)$ 70, 40
(77) $p(\bar{a}\bar{b}, c) = p(\bar{a}, c) - p(\bar{a}b, c) + p(\bar{c}, c)$ 76
(78) $p(\bar{a}\bar{b}, c) = 1 - p(a, c) - p(b, c) + p(ab, c) + p(\bar{c}, c)$ 77, 76, 64, 40
(79) $p(\overline{\bar{a}\bar{b}}, c) = p(a, c) + p(b, c) - p(ab, c)$ 78, 64

Puede verse fácilmente que se trata de una forma de dicha ley si se recuerda que en nuestro sistema «$\overline{\bar{a}\bar{b}}$» significa lo mismo que «$a + b$» en el sentido booleano. Merece la pena mencionar que (79) tiene la forma usual: es incondicionada y carece de la parte «$+\ p(\bar{c}, c)$», tan desusada; procedamos a generalizarla aún más.

(80) $p(\overline{\bar{b}\bar{c}}, ad) = p(b, ad) + p(c, ad) - p(bc, ad)$ 79
(81) $p(a\, \overline{\bar{b}\bar{c}}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p(a(bc), d)$ 80, B2, 40

Hemos llegado, efectivamente, a una generalización de (79).

Vamos a deducir ahora la ley de distribución: puede obtenerse a partir de (79), (81) y un lema muy sencillo, (84), al cual propongo llamar «lema de distribución», que es una generalización de (32) y (62):

(82) $p(a(bc), d) = p(a, (bc)d)p(bc, d) = p((aa)(bc), d)$ B2, 32
(83) $p(((aa)b)c, d) = p(a(ab), cd)p(c, d) = p(((ab)a)c, d)$ B2, 62, 40
(84) $p(a(bc), d) = p((ab)(ac), d)$ 82, 83, 62

Este es el «lema de distribución».

(85) $p(\overline{\overline{ab}\,\overline{ac}}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p((ab)(ac), d)$ 79 (subst.)

Podemos aplicar el «lema de distribución» a esta última fórmula y a (81), con lo que tenemos:

(86) $p(a\, \overline{\bar{b}\bar{c}}, d) = p(\overline{\overline{ab}\,\overline{ac}}, d)$ 81, 85, 84

Henos, pues, con una forma de la primera ley de distribución, que puede aplicarse al primer miembro de la fórmula siguiente,

---

(35′) (Ea) $p(\bar{a}, a) = 1$ 34′

Véase también (25). Las fórmulas (31′) a (35′) *no pertenecen a los teoremas de los sistemas al uso.*

(87) $p(\overline{\bar{b}\,\bar{\bar{b}}}a, c) = p(\overline{\bar{b}\,\bar{\bar{b}}}, ac)p(a, c) = p(a, c)$ B2 74

Llegamos así a

(88) $p(\overline{\overline{ab}\,\overline{a\bar{b}}}, c) = p(a, c)$. 86, 87, 40

Puede advertirse que

(89) $p(\bar{\bar{a}}b, c) = p(ab, c)$, 68 (subst.)
(90) $p(a, c) = p(b, c) \rightarrow p(\bar{a}, c) = p(\bar{b}, c)$ 64

Y, en consecuencia,

(91) $p(\overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}}}\,\bar{c}, d) = p(\bar{a}\,\overline{\overline{\bar{b}\,\bar{c}}}, d)$ 62, 89, 40

(92) $p(\overline{\overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}}}\,\bar{c}}, d) = p(\overline{\bar{a}\,\overline{\overline{\bar{b}\,\bar{c}}}}, d)$ 90,91

Esta es la ley de asociación para la suma booleana. Sustituyendo en (40) los complementos de *a* y *b*, hallamos

(93) $p(\overline{\bar{a}\,\bar{b}}, c) = p(\overline{\bar{b}\,\bar{a}}, c)$ 40, 90

que es la ley de conmutación para la suma booleana. Del mismo modo obtenemos

(94) $p(\overline{\bar{a}\,\bar{a}}, b) = p(a, b)$ 30, 89, 90

que es la ley de idempotencia de la suma booleana. A partir de (87) obtenemos:

(95) $p(a, b) = p(a, b\overline{c\bar{c}})$, 87, 40, A2
(96) $p(a, b)p(b) = p(ab)$ 95, B2, 75

La última puede escribirse también:

(97) $p(b) \neq 0 \rightarrow p(a, b) = p(ab)/p(b)$ 96

Esta última fórmula hace patente que nuestro concepto generalizado de probabilidad relativa coincide —para $p(b) \neq 0$— con el usual, y que nuestro cálculo es una generalización del cálculo acostumbrado. Y es posible cerciorarse de que ésta es legítima, mediante los ejemplos que hemos dado en el apéndice anterior, *IV, que muestran la compatibilidad de nuestro sistema con la fórmula siguiente,

(E) $(\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b)(\mathrm{E}c)\ p(a, b) = 1$ y $p(a, bc) = 0$

(que no tiene validez en muchas interpretaciones finitas de nuestro S, pero es válida en sus interpretaciones infinitas normales).

Para demostrar que S ha de ser un álgebra booleana en toda interpretación compatible (o coherente), paremos mientes en que

(98) $((x)p(a, x) = p(b, x)) \rightarrow p(ay, z) = p(by, z)$ B2
(99) $((x)p(a, x) = p(b, x)) \rightarrow p(y, az) = p(y, bz)$ 98, A2

Es digno de notarse que (99) necesita A2: no se sigue de 98, 40 y B2, ya que es posible que $p(a, z) = p(b, z) = 0$ (tal sería el caso, por ejemplo, si fuese $\bar{a} = z \neq x\bar{x}$).

(100) $((x)(p(a, x) = p(b, x) \; \& \; p(c, x) = p(d, x))) \rightarrow p(ac, y) = p(bd, y)$ 99, B2

Valiéndose de (90), (100) y A2, puede ponerse ahora de manifiesto con toda facilidad que siempre que se satisface la condición

(*) $p(a, x) = p(b, x)$ para todo x perteneciente a S,

es posible sustituir algunas o todas las apariciones de los nombres del elemento b en cualquier fórmula bien formada del cálculo por un nombre cualquiera del elemento a, y que en tal substitución no cambia el valor veritativo de aquélla; o, dicho de otro modo, que la condición (*) garantiza la *equivalencia en la sustitución* de a y b.

A la vista de este resultado, podemos definir la equivalencia booleana de dos elementos, a y b, del modo siguiente:

($D1$) $a = b \longleftrightarrow (x)p(a, x) = p(b,x)$

Y de esta definición llegamos inmediatamente a las fórmulas

(A) $a = a$
(B) $a = b \rightarrow b = a$
(C) $(a = \& \; b = c) \rightarrow a = c$
(D) $a = b \rightarrow a$ puede remplazar a b en algunos o en todos los lugares de una fórmula cualquiera sin que tal cosa afecte a su valor veritativo. A2, 90, 100.

Podemos introducir también una segunda definición:

($D2$) $a = b + c \longleftrightarrow a = \overline{\bar{b}\,\bar{c}}$

Obtenemos, entonces,

($D3$) $a = bc \longleftrightarrow a = \overline{\bar{b} + \bar{c}}$

(I) Si a y b pertenecen a S, entonces $a + b$ pertenece a S (postulado 3, $D2$, $D1$, 90, 100).
(II) Si a pertenece a S, entonces $\bar{a}$ pertenece a S (postulado 4)
(III) $a + b = b + a$ 93, $D2$
(IV) $(a + b) + c = a + (b + c)$ 92, $D2$
(V) $a + a = a$ 94, $D2$
(VI) $ab + a\bar{b} = a$ 88, $D2$
(VII) $(\text{E}a)(\text{E}b) \; a \neq b$ 25, 74. 90, $D1$

Ahora bien, el sistema formado por (A) a ($D2$) y (I) a (VI) es un sistema axiomático del álgebra booleana perfectamente conocido, que se debe a Huntington [2]; y es sabido que de él son deductibles todas las fórmulas válidas de dicho álgebra.

[2] Cf. E. V. Huntington, *Transactions Am. Math. Soc.* **35**, 1933, págs. 274-304 El sistema formado por (I) a (IV) es el «cuarto conjunto» de Huntington, descrito

Por tanto, S es un álgebra booleana; y dado que cabe interpretar éste como una lógica deductiva, podemos afirmar que *el cálculo de probabilidades, en su interpretación lógica, es una generalización legítima de la lógica deductiva.*

Más en especial, podemos admitir que «$a \geqslant b$», definible por

$$(D4) \qquad a \geqslant b \longleftrightarrow ab = b,$$

signifique, en interpretación lógica, «a se sigue de b» (o «b entraña a»); y puede demostrarse fácilmente que

$$(+) \qquad a \geqslant b \rightarrow p(a, b) = 1$$

Esta es una fórmula importante [3], propuesta por muchos autores, pero que no tiene validez, no obstante tal cosa, en la mayoría de los sistemas —supuesto que sean compatibles—. Para que sea válida es preciso admitir [4]

$$p(a, a\bar{a}) + p(\bar{a}, a\bar{a}) = 2,$$

aun cuando también tenemos

$$p(a + \bar{a}, a\bar{a}) = 1$$

Es decir, no han de aseverarse incondicionalmente en un sistema fórmulas tales como $p(a + \bar{a}, b) = p(a, b) + p(\bar{a}, b)$ (cf. nuestro axioma C).

La fórmula inversa de (+), o sea, «$p(a, b) = 1 \rightarrow a \geqslant b$» *no* debe ser demostrable, desde luego, como hacen ver nuestros ejemplos segundo y tercero de la demostración de compatibilidad —cf., asimismo, la fórmula (E) en las págs. 314 y 330—. por tanto, «$p(a, b) = 1$» debe interpretarse como «al menos casi seguro»; o, en interpretación lógica, como «a por lo menos casi se sigue de b».

Pero en nuestro sistema existen otras equivalencias válidas, tales como

$$(\ddagger) \qquad \begin{array}{lcl} a \geqslant b & \longleftrightarrow & p(a, \bar{a}b) \neq 0 \\ a \geqslant b & \longleftrightarrow & p(a, \bar{a}b) = 1 \end{array}$$

---

en la pág. 280, y en esta misma se encuentran los (A) a (D) y (*D*3). La fórmula (V) es superflua, como Huntington hizo ver en las págs. 557 y sig. del mismo volumen. También asume la (VII).

[3] H. Jeffreys, por ejemplo, la propone en su *Theory of Probability*, § 1.2, «Convention 3»; pero en cuanto se acepta, su teorema 4 es contradictorio, ya que se le afirma sin una condición semejante a nuestra «$p(b) \neq 0$». En la 2.ª ed., de 1948, Jeffreys ha mejorado a este respecto la formulación del teorema 2; pero el 4 (y otros muchos) hacen ver que su sistema sigue siendo incompatible (aunque ha reconocido en dicha ed., pág. 35, que dos proposiciones contradictorias entrañan cualquier otra; cf. la nota *2 del apartado 23 y mi réplica a Jeffreys en *Mind* **52**, 1943, págs. 47 y siguientes).

[4] Véanse las fórmulas 31′ y sigs. en la nota anterior 1.

Ninguna de ellas puede cumplirse en los sistemas al uso, en los que $p(a, b)$ no está definido más que cuando $p(b) \neq 0$. Parece estar bastante claro, pues, que los sistemas acostumbrados de la teoría de la probabilidad se caracterizan de un modo erróneo cuando se los llama generalizaciones de la lógica: son formalmente inadecuados para este fin, ya que ni siquiera entrañan el álgebra booleana.

El carácter formal de nuestro sistema hace posible interpretarlo, por ejemplo, como una lógica proposicional polivalente (con cuantos valores nos plazca elegir, ya sean discretos, densos o continuos), o como un sistema de lógica modal; y, en realidad, podemos hacerlo de muchas maneras: por ejemplo, cabe definir «a implica necesariamente b» por medio de «$p(b, a\bar{b}) \neq 0$» —como se acaba de indicar— o bien definir «a es lógicamente necesario» por «$p(a, \bar{a}) = 1$». Incluso el problema de si un enunciado necesario es necesariamente necesario tiene su lugar natural en la teoría probabilitaria, ya que se encuentra unido estrechamente a la relación entre los enunciados probabilitarios primarios y secundarios, que desempeña un papel muy importante en la teoría de la probabilidad (como se muestra en el apéndice *IX, punto *13 de la «tercera nota»); esquemáticamente: si escribimos «$\vdash x$» en lugar de «x es necesario (en el sentido de demostrable)», y «h» en vez de «$p(a, \bar{a}) = 1$», podemos escribir algo parecido a

$$\vdash a \quad \rightarrow \quad \vdash «p(h, \bar{h}) = 1» ,$$

lo cual cabe considerar que significa: $\vdash a$ entraña que a es necesariamente necesario; mas puesto que esto último quiere decir algo así como

$$\vdash a \quad \rightarrow \quad \vdash «p(«p(a, \bar{a}) = 1», \overline{«p(a, \bar{a}) = 1»}) = 1»$$

hemos conseguido tener enunciados probabilitarios (secundarios) acerca de enunciados probabilitarios (primarios).

Pero, como es natural, hay otros modos —y mejores— de interpretar la relación existente entre un enunciado de probabilidad primario y uno secundario. (Ciertas interpretaciones nos impedirán que los tratemos como si perteneciesen al mismo nivel lingüístico, o incluso al mismo lenguaje.)

Sobre desorden objetivo o aleatoriedad

Para una teoría objetiva de la probabilidad, y para su aplicación a conceptos tales como el de entropia (o desorden molecular), es esencial dar una caracterización objetiva de *desorden o aleatoriedad como un tipo de orden.*

Pretendo indicar brevemente en este apéndice algunos de los problemas generales que dicha caracterización puede ayudar a resolver, y el modo en que cabe abordarla.

1) Se supone que la distribución de velocidades entre las moléculas de un gas en equilibrio es (muy aproximadamente) *aleatoria.* Análogamente, la distribución de las nebulosas en el universo parece ser *aleatoria,* de suerte que la densidad media de ellas es constante. También es *aleatoria* la caída de lluvia los domingos: en plazos muy dilatados, cada día de la semana recibe iguales cantidades de lluvia, y el hecho de que haya llovido un miércoles puede no servirnos para predecir si lloverá o no el domingo.

2) Tenemos ciertas *contrastaciones* estadísticas de aleatoriedad.

3) Podríamos describir la aleatoriedad diciendo que es la «ausencia de regularidad». Pero, como veremos más adelante, esto nos sirve de poco: pues no cabe someter a contraste la presencia o ausencia de regularidad en general, sino solamente las de una regularidad *concreta* que se haya dado o propuesto. Así pues, nuestras contrastaciones de aleatoriedad nunca excluyen la presencia de toda regularidad: podemos contrastar si existe o no una correlación significativa entre la lluvia y los domingos, o si cierta fórmula dada para predecir la lluvia en domingo —tal como, «por lo menos una vez cada tres semanas»— da buen resultado; pero, aunque es posible rechazar esta fórmula teniendo en cuenta las contrastaciones a que se la han sometido, éstas no pueden determinar si existe o no otra fórmula mejor.

4) En estas circunstancias, resulta tentador decir que la aleatoriedad o desorden no es un tipo de orden que pueda describirse objetivamente, y que es menester interpretarlo como *nuestra falta de conocimiento* del orden vigente —si es que lo hay—. A mi juicio, hemos de resistir a esta tentación, y, además, podemos elaborar una teoría que nos permite realmente la construcción de tipos ideales de desorden (y, naturalmente, asimismo, la de tipos ideales de orden, y de todos los grados intermedios entre estos extremos).

5) El problema más sencillo de este campo —y el que, según creo, he resuelto— es el de la construcción de *un tipo ideal unidimensional de desorden,* o sea, una sucesión idealmente desordenada.

El problema de construir una sucesión de esta índole surge inmediatamente en una teoría frecuencial de la probabilidad que trabaje con sucesiones infinitas, como puede verse por lo que sigue.

6) Según Von Mises, una sucesión de ceros y de unos con equidistribución es aleatoria cuando no admite *ningún sistema de jugar*, es decir, ningún sistema que nos permitiera seleccionar por adelantado una subsucesión en que la distribución fuese desigual. Desde luego, Von Mises admite que cualquier sistema de jugar puede dar buen resultado durante algún tiempo, «accidentalmente»: lo único que postula es que fallará *a largo plazo* (o, con más precisión, en un número infinito de ensayos).

Por tanto, un colectivo de Von Mises puede ser enormemente regular *en su segmento inicial:* con tal de que al final se hagan irregulares, la regla de este autor es incapaz de excluir colectivos que empiecen con gran regularidad, digamos del modo siguiente:

00 11 00 11 00 11. . . .

y así sucesivamente durante los primeros quinientos millones de cifras.

7) Es obvio que no podemos someter a contraste *este* tipo de aleatoriedad demorada; y también lo es que siempre que contrastamos la aleatoriedad de una sucesión estamos pensando en otro tipo de dicha característica: nos referimos a sucesiones que *desde el principio* se comporten de una forma «razonablemente aleatorizada».

Pero la expresión «desde el principio» da origen a un problema propio. ¿Está aleatorizada la sucesión 010110? Es evidente que es *demasiado corta* para que digamos sí o no; ahora bien, si se pretende que necesitamos una *sucesión larga* para decidir una cuestión de este tipo, parece entonces que nos desdecimos de lo que habíamos afirmado antes, o sea, que nos retractamos de la expresión «desde el principio».

8) La solución de esta dificultad reside en construir una *sucesión idealmente aleatoria*, o sea, una en la que cualquier segmento inicial —ya sea corto o largo— sea todo lo aleatorio que su longitud permita; dicho de otra forma: una sucesión cuyo grado *n* de aleatoriedad (es decir, su libertad-*n* de secuelas) aumente con su longitud todo lo rápidamente que sea posible desde el punto de vista matemático.

En el apéndice IV de este libro hemos mostrado cómo se construye una sucesión de este tipo (véase, especialmente, la nota *1 del apéndice IV, que hace referencia a un trabajo aún no publicado del doctor L. R. B. Elton y de mí mismo).

9) El conjunto infinito de todas las sucesiones que se conforman con tal descripción puede ser llamado *el tipo ideal de alternativas aleatorias* con equidistribución.

10) Aunque lo único que se postula acerca de estas sucesiones es que sean «fuertemente aleatorias» —en el sentido de que los segmentos iniciales finitos pasen todas las contrastaciones de aleatoriedad— es *fácil poner de manifiesto que tienen límites frecuenciales*, en el sentido que suelen pedir las teorías de la frecuencia. De esta

forma se resuelve de un modo sencillo uno de los problemas centrales del capítulo sobre la probabilidad, la eliminación del problema del límite: y ello gracias a reducir el comportamiento que es propio de una sucesión limitada al que es propio de sus segmentos finitos aleatorizados.

11) Es sumamente fácil extender esta construcción en las dos direcciones opuestas del caso unidimensional, sin más que coordinar los elementos que dentro de la serie de los puestos impares ocupan el primero, segundo, ..., lugar con los lugares primero, segundo, ..., de la dirección positiva, y los que en la serie de los puestos pares ocupan el primero, segundo, ..., lugar con los puestos primero, segundo, ..., de la dirección negativa. Y por otros métodos tan sabidos como éste, es posible extender nuestra forma de construcción a las celdillas de un espacio n-dimensional.

12) Aunque otros teóricos de la frecuencia —especialmente Von Mises, Copeland, Wald y Church— estaban interesados, principalmente, en definir sucesiones aleatorias del modo más exigente, para lo cual excluían «todos» los sistemas de jugar en el sentido más amplio posible de la palabra «todos» (o sea, en el sentido más amplio compatible con una demostración de que existan semejantes sucesiones aleatorias), mi meta ha sido enteramente diversa. Desde un principio he querido responder a la objeción de que la aleatoriedad es compatible con *cualquier segmento inicial finito:* he querido describir sucesiones que surjan a partir de *sucesiones aleatorizadas finitas* por un paso al infinito. Por este método he creído que podía lograr dos cosas: aferrarme al tipo de sucesión que pasaría las contrastaciones estadísticas de aleatoriedad y *demostrar* el teorema del límite. He conseguido ambos objetivos valiéndome de la construcción dada en mi antiguo apéndice IV, como acabo de indicar en el parágrafo 8); pero, mientras tanto, he encontrado que para abordar la probabilidad es preferible el «punto de vista de la teoría de la medida» a la interpretación frecuencial (véase mi *Postscript*, capítulo *III), tanto por razones matemáticas como filosóficas (el punto decisivo está relacionado con la interpretación de propensiones de la probabilidad, que debato a fondo en el *Postscript)*, por lo cual ya no pienso que tenga gran importancia eliminar el axioma del límite de la teoría frecuencial. Pero puede seguirse haciendo: podemos estructurar esta teoría desde sus comienzos sirviéndonos del tipo ideal de sucesiones aleatorias que hemos construido en el apéndice IV, y cabe que llamemos aleatoria a una sucesión empírica en la medida en que las contrastaciones hagan ver su semejanza estadística con una sucesión ideal.

Las sucesiones admitidas por Von Mises, Copeland, Wald y Church no son necesariamente de este tipo (como ya hemos hecho observar más arriba); y, por otro lado, es innegable que cualquier sucesión que se haya rechazado —en virtud de contrastaciones estadísticas— como no aleatoria, puede convertirse posteriormente en una sucesión aleatoria admisible en el sentido de estos autores.

13) Actualmente, al cabo de varios años de haber resuelto los antiguos problemas de una forma que me hubiera satisfecho en 1934, ya no creo del todo en la importancia de construir una teoría frecuencial que se encuentre libre de todas aquellas dificultades. Pero continúo creyendo en la importancia de que la aleatoriedad o desorden pueda considerarse como un tipo de orden, y de que quepa construir modelos objetivos de ella.

Probabilidad nula y estructura fina de la probabilidad y del contenido

Hemos distinguido netamente en el libro entre la idea de *probabilidad* de una hipótesis y su *grado de corroboración*. Hemos afirmado que si decimos de una hipótesis que está bien corroborada, con ello no afirmamos sino que ha sido sometida a contrastaciones muy exigentes (tiene que tratarse, por ello, de una hipótesis con un grado de contrastabilidad elevado) y que hasta el momento ha salido sin daño de ellas. Hemos aseverado, asimismo, que *el grado de corroboración no puede ser una probabilidad,* ya que no puede satisfacer las leyes del cálculo de probabilidades: pues éstas piden que de dos hipótesis dadas, la que sea *lógicamente de más peso, o más informativa, o más* contrastable —y, por tanto, la que pueda *corroborarse mejor*— sea siempre la *menos probable* (teniendo en cuenta los datos de que se disponga). (Véanse, en particular, los apartados 82 y 83.)

Así pues, en general, un grado más elevado de corroboración estará acompañado por uno inferior de probabilidad; lo cual no sólo nos hace ver que hemos de distinguir de un modo tajante entre probabilidad (en el sentido del cálculo de probabilidades) y grado de corroboración o confirmación, sino también que *la teoría probabilística de la inducción —o idea de una probabilidad inductiva— es insostenible.*

En el texto se pone de manifiesto la imposibilidad citada (apartados 80, 81 y 83) en la discusión que se lleva a cabo de ciertas ideas de Reichenbach, Keynes y Kaila. Uno de los resultados de este estudio es que *la probabilidad de una ley universal cualquiera (no tautológica) es cero en un universo infinito* (ya lo sea por el número de los objetos discernibles, ya por el de las regiones espacio-temporales).

(Otro resultado a que hemos llegado ha sido el de que no hemos de asumir de modo no crítico que los científicos procuren nunca que sus teorías tengan un grado de probabilidad muy elevado: tienen que elegir entre gran probabilidad y gran contenido informativo, pues *por razones lógicas no pueden tener ambas cosas;* y enfrentados con la elección, hasta ahora han preferido siempre lo último —con tal de que la teoría haya salido indemne de las contrastaciones.)

Con la palabra «probabilidad» me refiero ahora, bien a la probabilidad lógica *absoluta* de la ley universal, bien a su probabilidad *relativa a unos datos determinados:* esto es, a un enunciado singular o a una conyunción finita de éstos. Así pues, si a es la ley de que hablamos y b cualesquiera datos o pruebas empíricos, afirmo que

(1) $$p(a) = 0$$

y también que

(2) $$p(a, b) = 0$$

Vamos a discutir estas fórmulas en el presente apéndice.

(1) y (2) son equivalentes. Pues, como Jeffreys y Keynes han observado, si la probabilidad «previa» (la probabilidad lógica absoluta) de un enunciado a es cero, lo mismo ha de serlo su probabilidad relativa a cualesquiera datos b finitos, ya que podemos asumir que cuando b tiene este significado se cumple $p(b) \neq 0$; pues $p(a) = 0$ entraña $p(ab) = 0$, y como $p(a, b) = p(ab)/p(b)$, obtenemos (2) a partir de (1). Por otra parte, de (2) podemos llegar a (1): pues si aquella fórmula es válida para unos datos b cualesquiera, por leves o «tautológicos» que sean, cabe suponer que se cumple también para los datos nulos, es decir, para la tautología $t = \overline{b\bar{b}}$ y podemos definir $p(a)$ como igual a $p(a, t)$.

Existen muchos argumentos en favor de (1) y (2). En primer lugar, se puede considerar la definición clásica de probabilidad como el número de posibilidades *favorables* dividido por el de *todas* las posibilidades (iguales). Podemos deducir (2), por ejemplo, si identificamos las posibilidades favorables con los datos favorables: es evidente que, en este caso $p(a, b) = 0$, ya que los datos favorables sólo cabe que sean finitos, mientras que las posibilidades existentes en un universo infinito han de ser, sin duda alguna, infinitas. (En este razonamiento no nos apoyamos sobre la «infinitud», ya que cualquier universo suficientemente grande nos dará el mismo resultado, con el grado de aproximación que queramos; y sabemos que nuestro universo es enormemente grande comparado con la cantidad de datos que están a nuestro alcance.)

Esta sencilla consideración es quizá algo vaga, pero cabe fortalecerla considerablemente si lo que tratamos de deducir de la definición clásica no es (2), sino (1). Podemos, con tal objeto, interpretar el enunciado universal a como si entrañase un producto infinito de enunciados singulares, cada uno de ellos dotado de una probabilidad que, desde luego, tiene que ser menor que la unidad. En el caso más sencillo se puede interpretar el mismo a como semejante producto infinito: es decir, podemos hacer a = «cualquier cosa que tenga la propiedad A», o —en símbolos— «$(x)Ax$» (que puede leerse: «para cualquier valor de x que escojamos, x tiene la propiedad A»[1]): y en este

[1] Aquí «x» es una variable que abarca el universo (infinito) del discurso: podemos elegir, por ejemplo, a = «todos los cisnes son blancos» = «para cualquier valor de x que escojamos, x tiene la propiedad A», en donde «A» estaría definido como «ser blanco o no ser un cisne». Es posible expresar lo mismo de un modo algo diferente, sin más que suponer que x abarca las regiones espacio-temporales del universo, y que «A» se define como «no habitada por un cisne no blanco». Cabe, incluso, escribir del mismo modo, «$(x)Ax$», leyes de forma más complicada; digamos, de la forma «$(x)(y)\ (xRy \rightarrow xSy)$»: basta que definamos «A» por

$$Ax \leftrightarrow (y)(xRy \rightarrow xSy).$$

Tal vez sea posible llegar a la conclusión de que las leyes naturales tienen una forma distinta de la que acabamos de indicar (cf. el apéndice *X): es decir, que caso, pues, es posible interpretar a como el producto infinito $a = a_1 a_2 a_3 \ldots$, en donde $a_i = Ak_i$ (siendo k_i el nombre del i-ésimo individuo de nuestro infinito universo del discurso).

Podemos introducir ahora el nombre «a^n» para el producto de los n primeros enunciados singulares, $a_1 a_2 \ldots a_n$, de suerte que quepa escribir a así:

$$a = \lim_{n \to \infty} a^n$$

y (véase la pág. 322)

$$p(a) = p\,(\lim_{n \to \infty} a^n) = \lim_{n \to \infty} p(a^n) \tag{3}$$

Evidentemente, podemos interpretar a^n como la aserción de que en la sucesión finita de elementos $k_1, k_2, \ldots, k_n$, todos ellos tienen la propiedad A. De este modo, es fácil aplicar la definición clásica a la evaluación de $p(a^n)$: existe solamente *una posibilidad favorable* a la aserción a^n: la de que todos los n individuos k_i, sin excepción, posean la propiedad A en lugar de la propiedad no A; pero el número total de posibilidades es 2^n, ya que hemos de suponer que todo individuo k_i pueda tener una cualquier de las dos propiedades, A o no A. En consecuencia, la teoría clásica nos da

$$p(a^n) = 1/2^n \tag{4^c}$$

Pero, a partir de (3) y (4^c), obtenemos inmediatamente (1).

El razonamiento «clásico» que lleva a (4^c) no es adecuado del todo, aun cuando creo que en lo esencial es correcto.

Su inadecuación reside únicamente en asumir que A y no A sean igualmente probables: pues cabe objetar —correctamente, según me parece— que, puesto que se supone que a describe una ley de la Naturaleza, los distintos a_i son enunciados ejemplificadores, y, por ello, más probables que sus negaciones, que son posibles falsadores (cf. la nota *1 del apartado 28). Sin embargo, esta objeción se refiere a un aspecto del argumento que es secundario: pues cualquiera que sea la probabilidad que atribuyamos a A —salvo la unidad—, el producto infinito a tendrá la probabilidad cero (si suponemos que hay independencia, de lo cual nos ocuparemos más adelante). En realidad, nos hemos topado con un caso especialmente trivial de *la ley de la probabilidad uno o cero* (que, aludiendo a la neurofisiología, podemos llamar también «el principio de todo o nada»), que —en este caso— puede formularse así: si a es el producto infinito de $a_1, a_2, \ldots$, (en don-

---

desde un punto de vista lógico son *más exigentes* de lo que hemos supuesto; y que si se las fuerza a acomodarse en una forma tal como la «$(x)Ax$», el predicado A se convierte en algo por esencia no observable (cf. las notas *1 y *2 de la «tercera nota», reproducida en el apéndice *IX), aunque, desde luego, contrastable deductivamente. Pero, en este caso, nuestras consideraciones continúan siendo válidas *a fortiori.*

de $p(a_i) = p(a_j)$ y, además, cada a_i sea independiente de los demás), se cumple lo siguiente:

(4) $p(a) = \lim_{n \to \infty} p(a^n) = 0$, a menos que $p(a) = p(a^n) = 1$

Pero es evidente que $p(a) = 1$ es inaceptable (no sólo desde mi punto de vista, sino, asimismo, desde el de mis contradictores inductivistas, que es obvio no pueden aceptar la consecuencia de que la probabilidad de una ley universal no sea capaz de aumentar debido a la experiencia): pues «todos los cisnes son negros» tendría la probabilidad 1, exactamente igual que «todos los cisnes son blancos» (y análogamente para todos los colores), de forma que «existe un cisne negro», «existe un cisne blanco», etc., tendrían todos probabilidad nula, pese a su debilidad lógica intuitiva. Dicho de otro modo, $p(a) = 1$ equivaldría a afirmar por razones puramente lógicas que el universo está vacío con probabilidad 1.

Así pues, en virtud de (4) queda estatuida (1).

Aunque creo que este argumento (incluyendo la suposición de independencia, que discutiremos más abajo) es incontestable, existen otros más débiles, que no asumen la independencia y llevan, sin embargo, a (1). Podemos razonar, por ejemplo, del modo siguiente.

En nuestra deducción habíamos supuesto que para todo k_i es lógicamente posible que tenga la propiedad A, y, asimismo, que tenga la no A; y, de este modo, se llega fundamentalmente a (4). Pero podría quizá asumirse que no hemos de considerar como posibilidades fundamentales las propiedades posibles de todo individuo del campo de n individuos, sino las posibles proporciones en que las propiedades A y no A pueden aparecer en una muestra de individuos; si ésta consta de n individuos, las proporciones posibles con que puede darse A son, 0, $1/n$, ..., n/n; y si consideramos como posibilidades fundamentales las apariciones de cualesquiera de estas proporciones, y las tratamos, pues, como igualmente probables («distribución de Laplace» [2]), hemos de remplazar (4) por

(5) $$p(a^n) = 1/n; \text{ de modo que } \lim p(a^n) = 0.$$

Aun cuando, desde el punto de vista de la deducción de (1), la fórmula (5) es mucho más débil que (4), con todo nos permite deducir (1): y ello sin que hayamos de identificar los casos observados con los favorables o de suponer un número finito de los primeros.

Otra argumentación muy parecida que conduce, asimismo, a (1) sería la siguiente. Podemos parar mientes en el hecho de que toda ley universal, a, *entraña* una hipótesis estadística h de la forma

---

[2] Es el supuesto que subyace a la deducción laplaciana de su famosa «regla de sucesión», y, por ello, lo llamo «distribución de Laplace»; se trata de un supuesto adecuado cuando se trae entre manos un *mero muestreo*, mas parece no serlo si nos ocupamos (como le pasaba a Laplace) de una sucesión de eventos individuales. Véanse también el apéndice *IX, puntos 7 y sigs. de la «tercera nota», y la nota 10 del apéndice *VIII.

$p(x, y) = 1$» (y, por tanto, es, como máximo, tan probable como ésta), y en que la probabilidad absoluta de h puede calcularse valiéndose de la distribución de Laplace, lo cual da el resultado $p(h) = 0$ (cf. el apéndice *IX, «Tercera nota», especialmente *13). Pero como a entraña h, se sigue que $p(a) = 0$, es decir, se obtiene (1).

A mi entender, ésta es la demostración que parece más sencilla y convincente: permite mantener (4) y (5), sin más que suponer que (4) se aplica a a y (5) a h.

Hasta el momento, nuestras consideraciones se han basado en la definición clásica de la probabilidad. Pero llegamos al mismo resultado si en lugar de ello adoptamos como fundamento la interpretación lógica del cálculo de probabilidades formal: entonces, el problema se convierte en uno de dependencia o independencia de enunciados.

Si miramos a, de nuevo, como el producto lógico de los enunciados singulares a_1, a_2, ..., la única suposición razonable parece ser la de que —en ausencia de toda información (que no sea tautológica)— hemos de considerar que todos estos enunciados son mutuamente *independientes*, de suerte que a_i pueda estar seguido por a_j o por su negación, $\bar{a}_j$ con las probabilidades

$$p(a_j, a_i) = p(a_j)$$
$$p(\bar{a}_j, a_i) = p(\bar{a}_j) = 1 - p(a_j).$$

Cualquier otra suposición equivaldría a postular *ad hoc* que se produjese algún tipo de secuelas, o sea, a postular que hubiera algo así como una conexión causal entre a_i y a_j; pero es palmario que se trataría de una suposición no lógica, sino sintética, que habría de formularse como hipótesis: y que, por tanto, no puede formar parte de una teoría puramente lógica de la probabilidad.

Podemos expresar lo mismo de un modo algo diferente como sigue: cuando hay una hipótesis, digamos h, podemos tener, desde luego,

(6) $$p(a_j, a_i h) > p(a_j, h)$$

ya que h puede informarnos de la existencia de cierto tipo de secuela; y, por consiguiente, tendríamos también

(7) $$p(a_i a_j, h) > p(a_i, h)p(a_j, h),$$

ya que (7) es equivalente a (6). Pero, ya sea que h no exista o que sea tautológica, o —dicho de otra forma— que nos ocupemos de probabilidades lógicas absolutas, habremos de remplazar (7) por

(8) $$p(a_i a_j) = p(a_i)p(a_j)$$

cuyo significado es que a_i y a_j son *independientes*, y equivale a

(9) $$p(a_j, a_i) = p(a_j).$$

Pero la suposición de independencia mutua —juntamente con $p(a_i) < 1$— lleva a $p(a) = 0$, como antes; es decir, a (1).

Así pues, (8) —esto es, la asunción de que los enunciados singulares a_i sean independientes entre sí— conduce a (1); y ésta es, principalmente, la razón por la que algunos autores han rechazado aquella fórmula, directa o indirectamente. Invariablemente, el argumento ha consistido en decir que (8) tiene que ser falsa, pues si fuese verdadera *no podríamos sacar enseñanzas de la experiencia*, o sea, que el conocimiento empírico sería imposible. Pero esto es inexacto; la experiencia nos puede enseñar, aun cuando $p(a) = p(a, b) = 0$: por ejemplo, a pesar de ello, $C(a, b)$ —es decir, el grado de corroboración de a por las contrastaciones b— puede aumentar en virtud de nuevas contrastaciones. Por tanto, este argumento «trascendental» no hiere en el blanco; o, en todo caso, no en mi teoría[3].

Pero consideremos ahora la tesis de que (8) sea falsa, o —expresado de otro modo— que

$$p(a_i a_j) > p(a_i)p(a_j)$$

sea válida, y que, por consiguiente, lo sea

$$p(a_j, a_i) > p(a_j),$$

y esta otra

$$(+) \qquad p(a_n, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) > p(a_n)$$

Esta tesis afirma que, una vez que hemos encontrado que cierto k_i tiene la propiedad A, aumenta la probabilidad de que otro k_j tenga la misma propiedad; y aún más, si hemos encontrado la propiedad mentada en varios casos. Dicho con la terminología de Hume, (+) asevera «*que los casos*» (por ejemplo, k_n) «*de que no tenemos experencia, es probable que se parezcan a aquéllos de los que la tenemos*».

Esta cita —excepto las palabras «es probable que» [y el modo del verbo «parecer», en castellano *(T.)*]— está tomada de la crítica de la inducción hecha por Hume[4]; la cual se aplica enteramente a (+) y a su formulación lingüística, que hemos transcrito en

---

[3] Cabe llamar «argumento trascendental» (aludiendo a Kant) a todo el que apele al hecho de que tenemos conocimientos o de que podemos sacar enseñanzas de la experiencia, y que concluya de ello que han de ser posibles los conocimientos o el sacar enseñanzas de la experiencia, y, además, que toda teoría que entrañe la imposibilidad de unos o de otro tiene que ser falsa. Creo, ciertamente, que un argumento trascendental puede ser válido si se emplea críticamente: esto es, contra una teoría que entrañe lo que hemos dicho más arriba; pero es preciso poner sumo cuidado en su utilización. *En cierto sentido* de la palabra «conocimiento» existe un conocimiento empírico; pero no es así en otros sentidos de la misma —por ejemplo, en el de un conocimiento *seguro*, o en el de *demostrable*—, y de ahí que no debamos suponer, de un modo no crítico, que tenemos un conocimiento «probable»: es decir, un conocimiento que sea probable en el sentido del cálculo de probabilidades. Yo entiendo que no tenemos conocimiento probable en este sentido; pues creo que lo que llamamos «conocimiento empírico» —incluyendo el «conocimiento científico»— consiste en conjeturas o barruntos, y que muchos de éstos no son probables (o tienen probabilidad nula), aun cuando puedan estar muy bien corroborados. Véase también mi *Postscript*, apartados *28 y *32.

[4] *Treatise of Human Nature*, 1739-40, lib. I, III parte, apartado VI (la cursiva es de Hume). Véase también mi *Postscript*, nota 1 del apartado *2 y nota 2 del apartado *50.

cursiva: pues, según arguye Hume, «*incluso después de observar que se da frecuentemente una conjunción constante de objetos, carecemos de razones para extraer inferencia alguna acerca de ningún objeto que trascienda aquellos de los que hemos tenido experiencia*» [5]. Si alguien sugiriese que nuestra experiencia nos autoriza a sacar inferencias por las que pasemos de objetos observados a no observados, dice Hume, «reiteraría mi pregunta de *por qué a partir de dicha experiencia formamos conclusión alguna que vaya más allá de los casos de que hemos tenido anteriormente experiencia*». Dicho de otro modo: Hume señala que quedamos cogidos en una regresión infinita si apelamos a la experiencia a fin de justificar una conclusión *cualquiera* acerca de casos no observados, *ni siquiera las conclusiones más probables*, añade en su *Abstract;* pues leemos aquí: «Es evidente que Adán, con toda su ciencia, nunca hubiera sido capaz de *demostrar* que el curso de la Naturaleza continuaría uniformemente el mismo... Digo más, y sobre esto añado que no podía ni tan siquiera probar, valido de ningún argumento *probable*, que el futuro se conformaría al pasado. Todos los argumentos probables constrúyense en la suposición de que hay conformidad entre un futuro y un pasado, y de ahí que jamás puedan probarlo» [6]. Así pues, (+) no puede justificarse por la experiencia; mas para ser lógicamente válida habría de tener el carácter de tautología, que sería válida en todo universo lógicamente posible. Ahora bien; es obvio que éste no es el caso.

Por tanto, si (+) fuese verdadera, tendría el carácter lógico de un *principio a priori* de inducción, y no el de una aserción analítica o lógica. Pero tampoco basta tal cosa como principio de inducción: pues (+) podría ser verdadera, pero $p(a) = 0$ seguiría siendo válida. Tenemos un ejemplo de una teoría que acepta (+) como válida *a priori* (aunque ésta, como hemos visto, tiene que ser sintética) y admite, al mismo tiempo, $p(a) = 0$, en la de Carnap [7].

Un principio de inducción probabilístico eficaz tendría que ser más exigente incluso que (+): habría de permitirnos —por lo menos— concluir que, para unos datos singulares apropiados, b, podamos obtener $p(a, b) > 1/2$; o, expresado lingüísticamente: que por

[5] *Loc. cit.*, apartado XII (la cursiva es de Hume); y la cita siguiente, de *loc. cit.*, apartado VI.

[6] Cf. *An abstract of a Book lately published entitled A Treatise of Human Nature*, 1740, ed. por J. M. Keynes y P. Sraffa, 1938, pág. 15. Cf. la nota 2 del apartado 81. (La cursiva es de Hume.)

[7] El requisito que impone Carnap de que su «lambda» (que, según he puesto de manifiesto, es recíproca de una medida de dependencia) sea finita, entraña nuestra (+); cf. su *Continuum of Inductive Methods*, 1952. Sin embargo, este autor acepta que $p(a) = 0$, lo cual, según Jeffreys, entrañaría la imposibilidad de sacar enseñanzas de la experiencia; y, sin embargo, Carnap basa su condición de que «lambda» ha de ser finita —y, por tanto, de que (+) sea válida— precisamente en el mismo argumento trascendental a que apela Jeffreys: a saber, en que de otro modo no podríamos sacar enseñanzas de la experiencia. Véanse su *Logical Foundations of Probability*, 1950, pág. 565, y mi colaboración en el volumen dedicado a Carnap (aun no aparecido) de la *Library of Living Philosophers*, ed. por P. A. Schilpp, especialmente la nota 87.

medio de los datos que acumulemos en su favor, a pueda llegar a hacerse más probable que su negación. Ahora bien, sólo es posible tal cosa si (1) es falsa, es decir, si tenemos $p(a) > 0$.

Mediante un argumento que da Jeffreys en su *Theory of Probability*, § 1.6 [8], puede llegarse a una demostración de (2) y una contrademostración de (+) aún más directas. Este autor discute en el lugar citado una fórmula —que designa con (3)— cuyo significado equivale a lo que podemos expresar con nuestro simbolismo del modo siguiente: que, supuesto que $p([b_i, a) = 1$ para todo $i \leqslant n$ (de modo que $p(ab^n) = p(a)$) ha de cumplirse la fórmula

$$(10) \qquad p(a, b^n) = p(a)/p(b^n) = p(a)/p(b^1)p(b^2, b^1)\ldots p(b^n, b^{n-1})$$

En la discusión de ésta, Jeffreys dice (sigo empleando mis símbolos en lugar de los suyos): «Así pues, si se dispone de un número suficiente de verificaciones, ha de ocurrir una de estas tres cosas: 1) la probabilidad de a teniendo en cuenta la información disponible excede de 1; 2) dicha probabilidad es siempre 0; 3) $p(b_n, b^{n-1})$ tenderá a 1». A esto añade que el caso 1) es imposible (lo cual es una verdad trivial), de suerte que sólo quedan 2) y 3). Pues bien, mantengo que la suposición de que se cumpla universalmente el caso 3) —por algunas obscuras razones lógicas (y sería menester que se cumpliese universalmente, y aún más, *a priori*, para que pudiera ser utilizado en la inducción)— puede refutarse fácilmente: pues la única condición que se precisa para deducir (10) —aparte de $0 < p(b_i) < 1$— es la de que *exista* algún enunciado a tal que $p(b^n, a) = 1$. Mas para toda sucesión de enunciados b_i, esta condición puede satisfacerse *siempre*. Pues supongamos que los b_i son informes acerca de tiradas de una perra chica; entonces siempre será posible construir una ley universal, a, que entrañe los informes de todas las n—1 tiradas observadas y que nos permita predecir todas las tiradas siguientes (aunque, probablemente, de un modo inexacto) [9]; así pues, existe siempre la a pedida, y existe, asimismo, otra ley, a', que nos da los mismos n—1 primeros resultados, pero predice lo contrario que la a para la tirada

---

[8] Traduzco los símbolos de Jeffreys a los míos, y omito su H, ya que no hay nada en este razonamiento que nos impida considerarla tautológica, o, al menos, intrascendente; en todo caso, es posible formular de nuevo mi argumentación sin prescindir de la H de este autor.

[9] Obsérvese que entre las condiciones bajo las que se deduce (10) no existe nada que nos exija que las b_i tuvieran la forma «B(k_i)» —con un predicado común, «B»—, y, por tanto, nada que nos impida suponer, como hemos hecho, que b_i = «k_i es cara» y b_j = «k_j es cruz». No obstante tal cosa, podemos construir un predicado «B» tal que todo b_i tenga la forma «B(k_i)»: es posible definir B como «tener la propiedad cara o cruz, respectivamente, si y sólo si el elemento correspondiente de la sucesión determinada por la ley matemática a es 0 ó 1, respectivamente». (Puede advertirse que solamente cabe definir un predicado de este tipo con respecto a un universo de individuos que estén *ordenados* —o que puedan estarlo—; pero, naturalmente, éste es el único caso que tiene interés si nos preocupamos por las aplicaciones a los problemas de la ciencia. (Cf. mi prefacio de 1958 y la nota 2 del apartado *49 de mi *Postscript.*)

n-ésima. Sería paradójico, por tanto, aceptar el caso (3) de Jeffreys, ya que cuando n sea suficientemente grande obtendremos siempre una $p(b_n, b^{n-1})$ muy próxima a 1, y, al mismo tiempo, también una $p(\bar{b}_n, b^{n-1})$ muy cercana a 1 (en virtud de la otra ley, a'). Por consiguiente, el argumento de Jeffreys, que matemáticamente es irrefutable, puede emplearse para demostrar su caso 2), que resulta coincidir con mi propia fórmula (2), tal y como la enuncié al comienzo de este apéndice [10].

Podemos resumir nuestra crítica de (+) del modo que sigue. Algunos creen que la probabilidad de que la próxima cosa que nos encontremos sea roja aumentará, en general, con el número de cosas rojas que hayamos visto anteriormente, y ello por razones puramente lógicas. Pero se trata de una creencia en algo mágico, a saber, en la magia del lenguaje humano: pues «rojo» no es más que un predicado, y han de existir siempre predicados A y B que se apliquen simultáneamente a todas las cosas observadas hasta el momento y lleven, sin embargo, a predicciones probabilísticas con respecto a la próxima cosa que sean incompatibles entre sí; es posible que estos predicados no se encuentren en los lenguajes naturales, pero pueden siempre construirse (por extraño que parezca, la creencia mágica de que aquí hablamos se encuentra entre los que construyen modelos artificiales de lenguaje, en vez de entre los analistas de los lenguajes ordinarios). Así, pues, cuando critico (+) estoy defendiendo, desde luego, el principio de la *independencia* (lógica absoluta) de cada a_n respecto de cualquier combinación de a_i, a_j, ...; es decir, mi crítica equivale a defender (4) y (1).

Existen también otras demostraciones de (1). Una de ellas se debe, fundamentalmente, a una idea de Jeffreys y Wrinch [11] que discutiré más a fondo en el apéndice *VIII, pero cuyo núcleo principal es (con leves reajustes) el siguiente.

Sea e un *explicandum*, o —con más precisión— un conjunto de hechos singulares o datos que tratamos de explicar valiéndonos de una ley universal. En general, existirá un número infinito de explicaciones posibles (mutuamente *excluyentes*, supuestos los datos e), y tales que la suma de sus probabilidades (supuesto e) no puede exceder de la unidad. Pero esto quiere decir que la probabilidad de casi todas ellas tiene que ser cero; a menos, ciertamente, que podamos ordenar todas las posibles leyes en una sucesión infinita y podamos atribuir a cada una una probabilidad positiva de forma que su suma converja y no sea mayor que la unidad; y quiere decir, además, que (en general) habrá de atribuirse una probabilidad mayor a las leyes que aparezcan primero en la sucesión mencionada que a las posteriores. Tenemos que asegurarnos, pues, que se cumple la importante *condición de compatibilidad* que sigue.

El método que adoptemos para ordenar las leyes no debe colocar

[10] En cuanto a Jeffreys, saca la conclusión opuesta, ya que adopta como válida la posibilidad enunciada en el caso 3).

[11] *Philos. Magazine* **42**, 1921, págs. 369 y sigs.

jamás una ley determinada delante de otra asimismo determinada si es posible demostrar que la segunda tiene una probabilidad mayor que la primera.

Jeffreys y Wrinch tienen ciertas razones intuitivas para creer que puede encontrarse un método de ordenar dichas leyes que satisfaga la condición de compatibilidad: en efecto, han propuesto ordenar las teorías explicativas de acuerdo con un grado decreciente de sencillez («postulado de sencillez») o un grado creciente de complejidad (en que ésta se mida por el número de parámetros ajustables de la ley). Pero puede hacerse ver —y así haremos en el apéndice *VIII— que este método de ordenación, y cualquier otro posible, viola la condición de compatibilidad.

Así pues, obtenemos $p(a, e) = 0$ para todas las hipótesis explicativas, cualesquiera que sean los datos e: es decir, obtenemos (2), y, por tanto, indirectamente, (1).

(Un aspecto interesante de la última demostración es el de ser válida incluso en un universo finito, con tal de que nuestras hipótesis explicativas estén formuladas en un lenguaje matemático que permita una infinidad de hipótesis (mutuamente excluyentes). Podemos construir, por ejemplo, el universo siguiente [12]: se colocan pequeños discos o piezas del juego de damas en un tablero de ajedrez muy prolongado en ambas direcciones, haciéndolo de acuerdo con la regla siguiente: existe una función —o curva— *definida matemáticamente*, conocida por el que coloca las piezas, pero no por nosotros, y los discos pueden depositarse solamente en escaques que se encuentren sobre la curva; pero, por lo demás, se colocarán al azar. Tenemos que observar la colocación de los discos y encontrar una «teoría explicativa», es decir, la curva matemática desconocida, si es posible, o una que sea muy próxima a ella. Es evidente que habrá una infinidad de posibles soluciones matemáticamente incompatibles, aun cuando algunas serán indiscernibles con respecto a los discos colocados en el tablero; y cualquiera de ellas —como es natural— puede quedar «refutada» por los discos que se coloquen después de haberse propuesto. Aunque puede hacerse que el «universo» —el de las posiciones posibles— sea finito, habrá, sin embargo, una infinidad de teorías matemáticas explicativas incompatibles. Sé perfectamente, desde luego, que los instrumentalistas u operacionistas podrán decir que las diferencias entre dos teorías que determinan las mismas casillas «carecen de sentido»; pero —aparte de que *este ejemplo no forma parte de mi argumentación*, de suerte que no necesito realmente contestar a esta objeción— debe advertirse lo siguiente: en muchos casos será posible dar «sentido» a estas diferencias «sin sentido» haciendo suficientemente apretada la red, esto es, subdividiendo los escaques.)

En el apéndice *VIII se encontrará una discusión detallada del hecho de que no es posible satisfacer la condición de compatibilidad

---

[12] En el apéndice *VIII, texto correspondiente a la nota 2, utilizo un ejemplo parecido.

que he planteado. Y voy a dejar ya el problema de la validez de las fórmulas (1) y (2) con objeto de pasar al estudio de los problemas formales que surgen del hecho de que estas fórmulas son válidas, por lo cual todas las teorías universales, cualquiera que sea su contenido, tienen probabilidad nula.

No puede dudarse de que los contenidos o pesos lógicos de dos *teorías universales* pueden ser *sumamente distintos*. Consideremos las dos leyes, a_1 = «todos los planetas se mueven en circunferencias» y a_2 = «todos los planetas se mueven en elipses». Debido al hecho de que todas las circunferencias son elipses (de excentricidad cero), a_1 entraña a_2, pero no viceversa: el contenido de a_1 es bastante mayor que el de a_2 (por supuesto, existen otras teorías, y lógicamente más exigentes —o de mayor peso— que a_1: por ejemplo, «todos los planetas se mueven en circunferencias concéntricas alrededor del sol»).

El que a_1 exceda desde el punto de vista del contenido a a_2 tiene *la máxima importancia para todos nuestros problemas*. Por ejemplo, ciertas *contrastaciones* de a_1 —es decir, intentos de refutar a_1 descubriendo alguna desviación de la circularidad— no lo serían de a_2; pero no pueden existir contrastaciones auténticas de a_2 que no constituyan simultáneamente un intento de refutar a_1. Así pues, esta última puede someterse a contrastaciones más exigentes que la primera, o sea que tiene un grado de contrastabilidad mayor; y si sale indemne de tales contrastaciones alcanzará un grado de corroboración más elevado que el que puede conseguir a_2.

También entre dos teorías, a_1 y a_2, *tales que* a_1 *no entrañe lógicamente* a_2, pueden encontrarse relaciones parecidas, si es que a_1 entraña una teoría de la cual a_2 es una buena aproximación. (Así, a_1 puede ser la dinámica newtoniana y a_2 las leyes de Kepler, que no se siguen de la teoría de Newton, sino que meramente «se siguen con una buena aproximación»; véase también el apartado *15 de mi *Postscript*. También en este caso la teoría de Newton es más contrastable, pues tiene mayor contenido [13].)

[13] Cualquiera que sea el sentido en que C. G. Hempel habla de «datos confirmadores» [en ingl., *confirming evidence (T.)*] de una teoría, es evidente que no puede aludir a los resultados de contrastaciones que corroboren aquélla. Pues, en sus trabajos acerca de este asunto *(Journal of Symbolic Logic* 8, 1943, págs. 122 y sigs., y, especialmente, en *Mind* 54, 1945, pág. 1 y sigs., y 97 y sigs., y 55, 1946, págs. 79 y sigs.), enuncia *(Mind* 54, págs. 102 y sigs.) entre sus condiciones para la adecuación la que sigue (8.3): si d son los datos confirmadores de varias hipótesis —digamos, h_1 y h_2—, entonces h_1, h_2 y d han de formar un conjunto de enunciados compatible.

Pero los casos más típicos e interesantes se encuentran en contra. Sean h_1 y h_2 las teorías de la gravitación de Einstein y Newton, respectivamente: estas teorías llevan a resultados incompatibles en los casos de campos gravitatorios fuertes y de cuerpos que se mueven a gran velocidad, y, por tanto, se contradicen mutuamente; y, sin embargo, todos los datos conocidos que apoyan la teoría de Newton apoyan también la de Einstein y corroboran ambas. La situación es muy parecida en lo que se refiere a las teorías de Newton y de Kepler, o a las de Newton y de Galileo. (Del mismo modo, todos los intentos infructuosos de encontrar un cisne rojo o uno amarillo corroboran, a la vez, las dos teorías siguientes —que se contradicen entre sí en

Ahora bien; nuestra demostración de (1) hace ver que no es posible expresar de un modo directo estas diferencias de contenido y de contrastabilidad a base de la probabilidad lógica absoluta de las teorías a_1 y a_2, ya que $p(a_1) = p(a_2) = 0$. Y si definimos una medida del contenido, $C(a)$, por $C(a) = 1 - p(a)$, según se ha indicado en el texto, obtenemos de nuevo $C(a_1) = C(a_2)$, de modo que las diferencias de contenido que nos interesan siguen sin ponerse de manifiesto por medio de semejante medida (y, de parecida manera, no puede expresarse la diferencia entre un enunciado contradictorio, $a\bar{a}$, y una teoría universal, a, ya que $p(a\bar{a}) = p(a) = 0$, y $C(a\bar{a}) = C(a) = 1$ [14]).

Todo esto no quiere decir que nos sea imposible expresar la diferencia de contenido entre a_1 y a_2 en términos probabilitarios, al menos en algunos casos. Por ejemplo, el que a_1 entrañe a_2, pero no viceversa, da origen a

$$p(a_1, a_2) = 0\,;\, p(a_2, a_1) = 1$$

---

presencia del enunciado «existe algún cisne»—: I, «todos los cisnes son blancos», y II, «*todos los cisnes son negros*».)

De un modo enteramente general, sea h una hipótesis corroborada por el resultado d de contrastaciones exigentes, y sean h_1 y h_2 dos teorías incompatibles cada una de las cuales entrañe h (h_1 podría ser ah, y h_2 ser $\bar{a}h$); en este caso, cualquier contrastación de h lo es a la vez de h_1 y de h_2, ya que todo intento logrado de refutar h refutaría simultáneamente h_1 y h_2; y si d es el informe de las tentativas infructuosas de refutar h, d corroborará tanto a h_1 como a h_2 (si bien podemos, naturalmente, tratar de encontrar contrastaciones cruciales entre h_1 y h_2). La cosa es distinta en lo que respecta a «verificaciones» y «ejemplificaciones», pero unas y otras no necesitan tener nada que ver con *contrastaciones.*

Independientemente de esta crítica, debería pararse mientes en que no es posible expresar la identidad en el modelo de lenguaje de Hempel: véanse, especialmente, su página 143 (línea 5 a partir del final del trabajo) y mi segundo prefacio, de 1958. Para una sencilla *definición* («semántica») *de ejemplificación*, véase la última nota a pie de página de mi nota en *Mind* 64, 1955, pág. 391.

[14] Siempre que se aplique a un infinito universo del discurso, *en cualquier teoría probabilitaria es inevitable* que un enunciado contradictorio tenga la misma probabilidad que un enunciado sintético coherente: pues se trata de una consecuencia sencilla de la ley de multiplicación, que exige que $p(a_1 a_2 \ldots a_n)$ tienda a cero en caso de que las a_i sean mutuamente independientes. Así pues, la probabilidad de sacar n caras sucesivas es —según *todas* las teorías de la probabilidad— $1/2^n$, que se hace nula si el número de tiradas se hace infinito.

Otro problema parecido de la teoría probabilitaria es el siguiente. Métanse en una urna n bolas marcadas con los números 1 a n, y entremézclense bien; entonces, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola marcada con un número primo? La solución de este problema, perfectamente conocida, tiende a cero cuando n tiende a infinito, *como ocurría en el caso anterior: lo cual quiere decir que la probabilidad de* extraer una bola marcada con un número compuesto se hace 1 para $n \to \infty$, aunque existe un número infinito de bolas en la urna que no están marcadas con un número compuesto. Este mismo resultado ha de obtenerse en *cualquier* teoría de la probabilidad que sea adecuada; y, por tanto, no debe entresacarse una de ellas en particular —tal como la teoría frecuencial— y criticarla titulándola de «por lo menos moderadamente paradójica» debido a que conduce a este resultado perfectamente correcto (en *Probability and Induction*, 1949, pág. 156, de W. Kneale, se encontrará una crítica de esta índole). Teniendo a la vista nuestro último «problema de la teoría probabilitaria» —el de extraer bolas numeradas—, el ataque que hace Jeffreys a los que hablan de la «distribución probabilitaria de los números primos» me parece igualmente injustificado (cf. *Theory of Probability*, 2.ª ed., pág. 38, nota).

aun cuando tengamos al mismo tiempo que

$$p(a_1) = p(a_2) = 0.$$

Así, pues, se cumpliría

$$p(a_1, a_2) < p(a_2, a_1)$$

lo cual indicaría que a_1 tiene mayor contenido.

Cabe expresar el hecho de que existan estas diferencias de contenido y de probabilidad lógica absoluta —que no pueden traducirse de un modo inmediato en las medidas correspondientes— diciendo que hay una «*estructura fina*» del contenido, y de la probabilidad lógica, que nos puede permitir la discriminación entre contenidos —y probabilidades absolutas— mayores y menores incluso en casos en que las medidas $C(a)$ y $p(a)$ sean demasiado toscas, y, por ello, insensibles a tales diferencias. Podemos representar la estructura fina por medio de los símbolos «$\succ$» («es mayor») y «$\prec$» («es menor») en lugar de los símbolos acostumbrados «$>$» y «$<$» (y podemos emplear también «$\succeq$» —o sea, «es mayor o igual»— y «$\preceq$»), y regular su utilización por medio de las reglas siguientes:

(1) «$C(a) \succ C(b)$» —y, con ello, su equivalente «$p(a) \prec p(b)$»— puede emplearse para enunciar que el contenido de *a* es mayor que el de *b* —*por lo menos* en el sentido de la estructura fina del contenido—. Hemos de suponer, pues, que $C(a) \succ C(b)$ entraña $C(a) \succeq C(b)$, y que esta fórmula entraña, a su vez, $C(a) \geqslant C(b)$, esto es, la falsedad de $C(a) < C(b)$; pero no se cumplen las relaciones de entrañamiento opuestas.

(2) $C(a) \succeq C(b)$ juntamente con $C(a) \preceq C(b)$ entrañan $C(a) = C(b)$, pero $C(a) = C(b)$ es compatible con $C(a) \succ C(b)$ y con $C(a) \prec C(b)$ (y, naturalmente, también con $C(a) \succeq C(b)$ y con $C(a) \preceq C(b)$).

(3) $C(a) > C(b)$ entraña siempre $C(a) \succ C(b)$.

(4) Para $p(a) \succ p(b)$, etc., se cumplen las reglas correspondientes.

Surge ahora el problema de determinar en qué casos podemos decir que $C(a) \succ C(b)$ aunque se tenga $C(a) = C(b)$. Hay una serie de ellos que son bastante claros: por ejemplo, aquellos en que hay entrañamiento unilateral de *b* por *a*; pero, de un modo más general, propongo la regla siguiente.

Si para todos los universos *finitos* suficientemente grandes (esto es, para todos los universos que tienen más de N miembros, siendo N suficientemente grande) tenemos $C(a) > C(b)$ —y, por tanto, y de acuerdo con la regla (3), tenemos $C(a) \succ C(b)$—, entonces mantenemos que $C(a) \succ C(b)$ en un universo infinito (incluso si se cumple $C(a) = C(b)$ para un universo infinito).

Parece que esta regla abarca la mayoría de los casos que ofrecen interés, si bien quizá no todos [15].

Nuestra regla es aplicable al problema de a_1 = «todos los planetas se mueven en circunferencias» y a_2 = «todos los planetas se mueven en elipses», y lo mismo ocurre cuando se comparan a_1 y a_2 con a_3 = «todos los planetas se mueven en elipses de excentricidad no nula»: pues $p(a_3) > p(a_1)$ se cumplirá en todos los universos finitos suficientemente grandes (digamos, de posibles observaciones), en el sencillo sentido de que hay más posibilidades compatibles con a_3 que con a_1.

La estructura fina del contenido y de la probabilidad que hemos discutido no afecta solamente a los límites, 0 y 1, del intervalo probabilitario, sino —en principio— a todas las probabilidades comprendidas entre estos valores. Pues, sean a_1 y a_2 leyes universales tales que $p(a_2) = 0$ y $p(a_1) \prec p(a_2)$, como antes; supongamos que b no está entrañado por a_1, por a_2, ni por las negaciones de éstas, y que $0 < p(b) = r < 1$; tenemos entonces,

$$p(a_1 \vee b) = p(a_2 \vee b) = r$$

y, al mismo tiempo,

$$p(a_1 \vee b) \prec p(a_2 \vee b).$$

Tenemos, análogamente,

$$p(\bar{a}_1 b) = p(\bar{a}_2 b) = r$$

y, a la vez,

$$p(\bar{a}_1 b) \succ p(\bar{a}_2 b),$$

ya que $p(\bar{a}_1) \succ p(\bar{a}_2)$, aun cuando —desde luego— $p(\bar{a}_1) = p(\bar{a}_2) = 1$. Por tanto, para todo b tal que $p(b) = r$ podemos tener un c_1 tal que $p(c_1) = p(b)$ y $p(c_1) \prec p(b)$, y, asimismo, un c_2 tal que $p(c_2) = p(b)$ y $p(c_2) \succ p(b)$.

La situación que acabamos de debatir tiene mucha importancia para el modo en que se haya de tratar la *sencillez o la dimensión de una teoría:* problema del que nos ocuparemos ulteriormente en el próximo apéndice.

---

[15] En el trabajo de JOHN KEMENY, tan sugerente, «A Logical Measure Function», en *Journal of Symb. Logic* 18, 1953, págs. 289 y sigs., se debaten detalladamente otros problemas relacionados con éstos. El modelo de lenguaje de Kemeny es el segundo de los tres a que aludo en mi segundo prefacio, y —en mi opinión— el más interesante de todos ellos, con mucho; mas, como él mismo hace ver en la página 294, es tal, que los teoremas infinitísticos —por ejemplo, el principio de que todo número tiene un sucesivo— no pueden ser demostrables en dicho lenguaje: y de ahí que no pueda contener el sistema usual de la aritmética.

Contenido, sencillez y dimensión

Como he indicado en el libro [1], no tengo fe en la imposición de cortapisas al lenguaje científico, o sea, en que se logre nada impidiendo que el científico emplee con entera libertad, siempre que lo estime conveniente, ideas o predicados nuevos, conceptos «ocultos» o cualquier otra cosa. Por esta razón, no puedo soportar los diversos intentos recientes de introducir en la filosofía de la ciencia el método de los cálculos artificiales o «sistemas lingüísticos» —que se supone son modelos de un «lenguaje de la ciencia» simplificado—. No sólo creo que tales tentativas han sido inútiles hasta el momento, sino que han contribuido incluso a engendrar la obscuridad y la confusión que hoy prevalecen en la filosofía de la ciencia.

Hemos explicado sucintamente en el apartado 38 y en el apéndice I que, en caso de que tuviésemos a nuestra disposición enunciados (absolutamente) atómicos —o, lo cual equivale a lo anterior, *predicados* (absolutamente) *atómicos*—, podríamos introducir el recíproco del número mínimo de *enunciados atómicos* que se necesitan para refutar una teoría como medida del *contenido* de la misma. Pues, dado que el grado de contenido de una teoría es el mismo que su grado de contrastabilidad o refutabilidad, la teoría que sea refutable por medio de menor número de enunciados atómicos será la más fácilmente refutable o contrastable, y, por eso, la que tenga mayor contenido. (En resumen: cuanto menor sea el número de enunciados atómicos necesarios para componer un posible falsador, mayor será el contenido de la teoría.)

Pero no es mi deseo trabajar ni con unos enunciados atómicos ficticios ni con un sistema lingüístico artificial en el que dispongamos de tales enunciados, pues me parece obvio que en la ciencia no contamos con predicados atómicos «naturales». Para ciertos lógicos antiguos, los predicados «hombre» y «mortal» han ofrecido, al parecer, el aspecto de ejemplos de algo así como predicados atómicos; y Carnap emplea en los ejemplos «azul» o «caliente», tal vez porque «hombre» y «mortal» son ideas muy complejas que —así pueden pensar algunos— es posible definir valiéndose de otras más sencillas, del tipo de «azul» o «caliente». Pero es muy característico de los debates científicos que ni estos predicados ni ningunos otros se tratan como (absolutamente) atómicos: según el problema bajo consideración, pue-

[1] Véanse el apartado 38, en especial el texto que sigue a la llamada de la nota 2, y el apéndice I; y también mi segundo prefacio, de 1958.

den tratarse como sumamente complejos no sólo «hombre» y «mortal», sino también «azul» y «caliente»; así, «azul» puede entenderse como el color del cielo, que sería explicable a partir de la teoría atómica; e incluso el término fenoménico «azul» puede ser considerado (en determinados contextos) como definible —como un carácter de imágenes visuales que está coordinado a ciertos estímulos fisiológicos—. Las discusiones científicas se caracterizan por producirse libremente; y el intento de privarlas de su libertad —atándolas al lecho de Procusto de un sistema lingüístico preestablecido— significaría, de lograrse, el fin de la ciencia.

Por estas razones, he rechazado anticipadamente la idea de emplear enunciados atómicos con el propósito de medir el grado de *contenido o sencillez* de una teoría, y he sugerido que podríamos utilizar, en lugar suyo, la idea de *enunciados relativamente atómicos;* y además, la de un *campo de enunciados* relativamente atómicos con respecto a una teoría o conjunto de teorías (para cuya contrastación son pertinentes): al cual cabría interpretar como *campo de aplicación* de la teoría o conjunto de teorías mentados.

Si tomamos, una vez más, el ejemplo que ya hemos recogido en el apéndice anterior, es decir, el de las dos teorías a_1 = «todos los planetas se mueven en circunferencias» y a_2 = «todos los planetas se mueven en elipses», podemos adoptar como campo el de todos los enunciados de la forma «en el instante *x* el planeta *y* estaba en la posición *z*», que serán nuestros enunciados relativamente atómicos. Y si suponemos que se sabe ya que la trayectoria del planeta es una curva plana, podemos suponer que un papel cuadriculado representa dicho campo y marcar en él las distintas posiciones, indicando en cada caso el instante y el nombre del planeta en cuestión, de suerte que cada punto represente uno de los enunciados relativamente atómicos. (Desde luego, podemos realizar una representación tridimensional marcando la posición con un alfiler cuya longitud represente el tiempo —medido a partir de cierto instante que suponemos inicial— y haciendo que el color de la cabeza del mismo indique el nombre del planeta de que se trate.)

Hemos explicado, principalmente en los apartados 40 a 46 y en mi antiguo apéndice I, que el número mínimo de enunciados relativamente atómicos que se precisan para refutar una teoría determinada puede emplearse como medida de la complejidad de la misma. Y se puso de manifiesto que la *sencillez formal* de una teoría podría medirse por la *parvedad de sus parámetros* —con tal de que tal escasez en parámetros fuese resultado de una reducción «formal» de su número, en vez de «material» (cf., especialmente, los apartados 40, 44 y sigs., y el apéndice I).

Ahora bien, es evidente que todas estas comparaciones de sencillez de teorías —o de sus contenidos— equivalen a comparaciones de la «estructura fina» de dichos contenidos (en el sentido expuesto en el apéndice precedente), puesto que sus probabilidades absolutas serán todas iguales (esto es, iguales a cero). Quiero ahora hacer ver, en primer término, que, en realidad, puede interpretarse el número de parámetros de una teoría (con respecto a un campo de aplicación) como medida de la estructura fina de su contenido.

Sólo preciso mostrar con este objeto que, *para un universo finito suficientemente grande, la teoría que tenga mayor número de parámetros será siempre más probable —en el sentido clásico— que la que lo tenga menor.*

Lo cual puede ponerse de manifiesto del modo siguiente. En el caso de un campo de aplicación geométrico y continuo, nuestro universo de eventos posibles —cada uno descrito por un enunciado relativamente atómico— es, desde luego, infinito, como hemos indicado en los apartados 38 y sigs. En esta situación, podemos comparar dos teorías con respecto a la *dimensión* de las posibilidades que permiten —esto es, de las que son favorables a cada una de ellas—, en lugar de hacerlo con respecto al *número* de tales posibilidades; y la dimensión de éstas resulta ser igual al número de parámetros. Reemplazamos ahora el universo infinito de enunciados relativamente atómicos por otro *finito* de los mismos (aunque muy grande), que corresponderá al ejemplo del tablero de ajedrez presentado en el apéndice anterior [2]. Es decir, suponemos que cada enunciado relativamente atómico se refiere a un *cuadrado* —cuyo lado ϵ marca la posición del planeta— en lugar de a un punto del plano, y que las posiciones posibles no se solapan [3]; y, variando algo el ejemplo del precedente apéndice, remplazamos las diversas *curvas* que acostumbran representar geométricamente a nuestras teorías por «casi curvas» (de ancho aproximadamente igual a ϵ), esto es, por conjuntos —o cadenas— de cuadrados. El resultado de todo esto es que el número de teorías posibles se convierte en finito.

Consideramos ahora la representación de una teoría con d parámetros, que en el caso de continuidad quedaba representado por un continuo d-dimensional, cada uno de cuyos puntos (acervos-d) representaba una curva. Vemos que es posible emplear un procedimiento de esta índole, salvo que aquel continuo d-dimensional estará remplazado por una formación de «cubos» d-dimensionales (de arista ϵ); cada uno de éstos representa ahora una «casi curva», y, por ello, una de las posibilidades favorables a nuestra teoría; y la formación d-dimensional representará el conjunto de «casi curvas» compatible con la teoría —o, favorable a ella.

Mas ahora podemos decir que la curva con menos parámetros —es decir, el *conjunto* de casi curvas que está representado por una formación de menos dimensiones— no solamente tendrá menos de éstas,

---

[2] Cf. el apéndice *VII, texto correspondiente a la nota 12.

[3] Asumimos que no existe tal solapamiento para simplificar la exposición. Podríamos, asimismo, haber supuesto que dos escaques cualesquiera adyacentes se solapan parcialmente (en una cuarta parte de su área, por ejemplo), o bien podríamos haberlos remplazado por círculos que se recubran mutuamente (lo suficiente para que pueda cubrirse con ellos todo el área); y esta última suposición estaría más cercana a una interpretación de las «posiciones» como los resultados —jamás enteramente netos— de las posibles *mediciones* de posición.

sino que contendrá menor número de «cubos», esto es, de posibilidades favorables.

Así pues, estamos justificados en la aplicación de los resultados del apartado anterior: si a_1 tiene menos parámetros que a_2, podemos aseverar que —en un universo suficientemente grande, pero finito— tendremos:

$$p(a_1) < p(a_2)$$

y, por tanto,

$$(*) \qquad p(a_1) \prec p(a_2).$$

Pero como la fórmula (*) sigue siendo válida cuando suponemos que ϵ tiende a cero (lo cual, en el límite, equivale a remplazar el universo finito por uno infinito), llegaremos al siguiente *teorema.*

1) Si el número de parámetros de a_1 es más pequeño que el de a_2, entonces el supuesto de

$$p(a_1) < p(a_2)$$

contradice las leyes del cálculo de probabilidades.

Si escribimos «d_C (a), o —más sencillamente— «$d(a)$», para designar la dimensión de la teoría a (con respecto al campo de aplicación C), podemos formular el teorema anterior como sigue:

$$(1) \qquad \text{Si } d(a_1) > d(a_2), \text{ entonces, } p(a_1) \prec p(a_2);$$

y, en consecuencia, «$p(a_1) > p(a_2)$» es incompatible con «$d(a_1) < d(a_2)$».

Conviene recordar este teorema (que está implicado por lo que se ha dicho en el texto del libro) juntamente con las consideraciones siguientes. Una teoría a requiere un mínimo de $d(a) + 1$ enunciados relativamente atómicos para su refutación: sus «*falsadores más débiles*», como podemos llamarlos, consisten en la conyunción de $d(a) + 1$ enunciados relativamente atómicos; lo cual quiere decir que si $n \leqslant d(a)$, *ninguna* conyunción de n enunciados de este tipo tendrá la suficiente fuerza lógica para que de ella se pueda deducir $\bar{a}$, o sea, la negación de a. Según esto, puede medirse la fuerza o contenido de a por medio de $d(a) + 1$, ya que a será más fuerte que cualquier conyunción de $d(a)$ enunciados relativamente atómicos; pero, ciertamente, no más que algunas conyunciones de $d(a) + 1$ enunciados de esta índole. Pero, teniendo en cuenta la regla probabilitaria

$$p(\bar{a}) = 1 - p(a)$$

sabemos que la probabilidad de una teoría a disminuye al aumentar la probabilidad de su negación, $\bar{a}$, y viceversa, y que se cumplen las mismas relaciones entre los contenidos de a y $\bar{a}$. A partir de lo cual obtenemos, una vez más, que $d(a_1) < d(a_2)$ significa que el contenido de a_1 es mayor que el de a_2, de modo que $d(a_1) < d(a_2)$ entraña $p(a_1) \prec p(a_2)$, y es *incompatible*, por tanto, con $p(a_1) > p(a_2)$; pero este resultado no es más que el teorema (1), que habíamos deducido más arriba.

Hemos deducido nuestro teorema tomando en consideración universos finitos, si bien es, en verdad, totalmente independiente del paso a universos infinitos. Por lo cual, es independiente de las fórmulas (1) y (2) del apéndice anterior, o sea, del hecho de que en un universo infinito tengamos, para cualquier ley universal a y cualesquiera datos finitos d',

$$(2) \qquad p(a) = p(a,d') = 0.$$

Por tanto, es posible emplear legítimamente (1) para deducir de otro modo (2): cosa que podemos llevar a cabo realmente si sacamos partido de una idea debida a Dorothy Wrinch y Harold Jeffreys.

Como hemos indicado sucintamente en el apéndice anterior [4], Wrinch y Jeffreys han observado que si tenemos una infinitud de teorías mutuamente incompatibles o excluyentes, la suma de las probabilidades de todas ellas no puede exceder de la unidad, de modo que casi todas tienen que tener probabilidad nula —a menos que ordenemos las teorías en una sucesión y asignemos a cada una, como probabilidad, un valor tomado de una serie de fracciones convergente cuya suma no sea mayor que la unidad—. Podemos realizar la atribución aludida del modo siguiente: asignaríamos el valor $1/2$ a la primera teoría, $1/2^2$ a la segunda, y, en general, $1/2^n$ a la n-ésima; pero podríamos, asimismo, atribuir a cada una de las 25 primeras teorías el valor $1/50$, esto es, $1/(2.25)$, a cada una de las 10 siguientes, digamos, el valor $1/400$ —o sea, $1/(2^2.100)$—, etc.

Cualquiera que sea el modo en que ordenemos las teorías, y la forma en que les atribuyamos probabilidades, habrá siempre cierto valor probabilitario *máximo*, al que podemos llamar P (así, en nuestros ejemplos, $1/2$ ó $1/50$), con el cual quedarán afectadas n teorías a lo más (en donde n es un número finito y $n.P < 1$). Por otra parte, cada una de estas n teorías tendrá cierta *dimensión*, y supongamos que D es la mayor de todas éstas, y que a_1 es una de las teorías a las que se atribuye D, de modo que $d(a_1) = D$; es evidente, por lo que acabamos de decir, que ninguna teoría cuya dimensión sea superior a D se encontrará entre las n que tienen máxima probabilidad. Sea ahora a_2 una teoría cuya dimensión sea mayor que D, de suerte que $d(a_2) > D = d(a_1)$; la atribución mencionada conduce entonces a

$$(—) \qquad d(a_1) < d(a_2); \text{ y } p(a_1) > p(a_2).$$

Resultado que pone de manifiesto una transgresión de nuestro teorema (1). Ahora bien, es inevitable realizar una atribución de este tipo —que conduce a tal resultado— si queremos evitar que haya que asignar la misma probabilidad —esto es, cero— a todas las teorías. En consecuencia, nuestro teorema (1) entraña la atribución de probabilidad cero a todas las teorías.

Por su parte, Wrinch y Jeffreys han llegado a un resultado muy distinto. Creen que la posibilidad del conocimiento empírico exige la

[4] Cf. el apéndice *VII, texto correspondiente a la nota 11.

posibilidad de aumentar la probabilidad de una ley acumulando datos en favor suyo; y de ello concluyen que (2) tiene que ser falsa, y, además, que ha de existir un método legítimo de atribuir probabilidades no nulas a una sucesión infinita de teorías explicativas. Así pues, estos autores han sacado conclusiones sumamente positivas del argumento «trascendental» (según lo he llamado en el apéndice anterior) [5]: al creer, como lo hacen, que un aumento de la probabilidad significa un aumento del conocimiento (de modo que el obtener una probabilidad elevada se convierte en un objetivo de la ciencia), no han considerado la posibilidad de que *a partir de la experiencia podamos sacar cada vez más enseñanzas acerca de leyes universales, sin que su probabilidad aumente lo más mínimo:* la de que podamos contrastar y corroborar algunas de ellas cada vez más, con lo cual aumentemos su *grado de corroboración*, sin alterar, por ello, su *probabilidad*, cuyo valor sigue siendo cero.

Jeffreys y Wrinch no han descrito nunca de un modo suficientemente claro la sucesión de teorías mencionadas, ni la atribución de valores probabilitarios. Su idea fundamental, a la que llaman el «postulado de sencillez» [6], es que las teorías deberían ordenarse de modo que su complejidad —o el número de sus parámetros— fuese aumentando, a la vez que disminuyese la probabilidad que ellos asignan a cada una; lo cual, incidentalmente, significaría que *dos* teorías *cualesquiera* de tal sucesión violarían nuestro teorema (1). Pero semejante ordenación no es factible, como el mismo Jeffreys ha advertido, ya que pueden existir varias teorías con *el mismo número* de parámetros: este autor nos indica como ejemplos $y = ax$ e $y = ax^2$, y dice de ellas, «podemos admitir que las leyes que tienen igual número de parámetros poseerán la misma probabilidad previa» [7]. Mas el número de leyes que tendrán igual probabilidad previa es infinito, ya que los propios ejemplos de Jeffreys pueden prolongarse infinitamente: $y = ax^3$, $y = ax^4$, ..., $y = ax^n$, etc., con $n \to \infty$; así, pues, para cada número de parámetros reaparecería el mismo problema que para la totalidad de la sucesión.

Aún más: el mismo Jeffreys reconoce —en el parágrafo de antes, § 3.0 [8]— que es posible obtener una ley, digamos a_1, a partir de otra ley a_2 con un parámetro suplementario, sin más que suponer que éste es igual a cero; y entonces $p(a_1) < p(a_2)$, ya que a_1 es un *caso especial* de a_2, de suerte que a a_1 corresponden menos posibilidades [9]. Por

[5] Cf. la nota 3 del apéndice *VII.

[6] En su *Theory of Probability*, § 3.0, Jeffreys dice del «postulado de sencillez» que «no es... un postulado separado, sino una aplicación inmediata de la regla 5». Pero todo lo que contiene esta regla es una forma vaguísima del principio «trascendental», en forma de referencia a la regla 4 (ambas reglas están formuladas en el § 1.1); así pues, esto no afecta a nuestra argumentación.

[7] *Theory of Probability*, § 3.0 (1.ª ed., pág. 95; 2.ª ed., pág. 100).

[8] *Op. cit.*, 1.ª ed., pág. 96; 2.ª ed., pág. 101.

[9] JEFFREYS, *loc. cit.*, observa que «la mitad de la probabilidad previa [de a_2] está concentrada en $\alpha_{m+1} = 0$», lo cual me parece querer decir que $p(a_1) = p(a_2)/2$; pero esta regla puede llevar a contradicciones si el número de parámetros de a_2 es mayor que 2.

tanto, en este caso particular reconoce que una teoría que tenga menos *parámetros será menos probable que otra que tenga más*, lo cual está de acuerdo con nuestro teorema (1); pero admite este hecho solamente para esta situación especial, y no hace comentarios sobre la contradicción en que pueden muy bien estar su postulado de sencillez y tal caso. En conjunto, no trata en parte alguna de hacer ver que el postulado de sencillez sea compatible con su sistema axiomático; pero teniendo en cuenta el caso mencionado (que, desde luego, se sigue de tal sistema) es claro que hubiera sido absolutamente menester una demostración de compatibilidad.

Nuestras propias consideraciones ponen de manifiesto que no es posible dar dicha demostración, y que el «postulado de sencillez» ha de contradecir todo sistema axiomático probabilitario adecuado, ya que tiene que transgredir nuestro teorema (1).

Para terminar este apéndice quiero intentar algo así como una explicación de por qué Wrinch y Jeffreys pueden haber considerado inofensivo su «postulado de sencillez», es decir, incapaz de originar disgustos.

Es *preciso recordar* que *ellos fueron los primeros en igualar* la sencillez y la parvedad de parámetros (yo no las igualo simplemente, sino que distingo entre una reducción formal del número de parámetros y otra material —cf. los apartados 40, 44 y 45—, de forma que la sencillez en sentido intuitivo se convierte en algo parecido a la sencillez formal; pero, por lo demás, mi teoría de la sencillez está de acuerdo con la de Wrinch y Jeffreys en este punto). También vieron claramente que la sencillez es una de las cosas a que tienden los científicos, es decir, que prefieren una teoría sencilla a otra más complicada, y que, por tanto, prueban primero con las teorías más sencillas. En todas estas cuestiones Wrinch y Jeffreys tenían razón; y también la tenían al creer que el número de teorías sencillas es relativamente escaso, mientras que hay muchas complicadas, cuyo número aumenta con el de sus parámetros.

Este último hecho puede haberles conducido a creer que las teorías complejas son las menos probables (ya que la probabilidad de que se dispone en total tiene que dividirse de alguna forma entre todas las teorías). Y puesto que asumieron también que un grado elevado de probabilidad indica otro también elevado de conocimiento —y será, por tanto, uno de los objetivos del hombre de ciencia—, quizá han pensado que era intuitivamente evidente que la teoría más sencilla (y, por ello, más deseable) había de identificarse con la más probable (y, por consiguiente, más deseable): ya que de otro modo los objetivos a que tiende el científico serían incompatibles. Así pues, el postulado de sencillez parecía ser necesario por razones intuitivas, y, por tanto, compatible *a fortiori*.

Mas una vez que nos hemos dado cuenta de que el científico no tiene ni puede tener por objetivo un grado elevado de probabilidad, y de que la impresión opuesta se debe a haber confundido la idea intuitiva de probabilidad con otra también intuitiva (que aquí he titulado «grado de corroboración») [10], nos resultará claro que la sencillez —o la parvedad de parámetros— está ligada a la improbabilidad en lugar de a la probabilidad, y tiende a crecer con aquélla. Y llegaremos a ver también claramente que, sin embargo, está unido un alto grado de sencillez con otro también alto de corroboración: pues una contrastabilidad o corroborabilidad elevada es lo mismo que una improbabilidad previa —o sencillez— igualmente elevada.

En el apéndice siguiente seguiremos ocupándonos del problema de la corroboración.

---

[10] En el punto 8 de mi «Tercera nota» —reproducida aquí en el apéndice *IX— se hace ver que si h es una hipótesis estadística que afirma, «$p(a, b) = 1$», entonces su grado de corroboración después de haber pasado n contrastaciones exigentes será $(n - 1)/(n + 1) = 1 - 2/(n + 1)$. Esta fórmula tiene un parecido sorprendente con la «regla de sucesión» de Laplace, según la cual la probabilidad de que h sobrepase la contrastación siguiente es $(n + 1)/(n + 2) = 1 - 1/(n + 2)$; la proximidad numérica de estos resultados, juntamente con no haber llegado a distinguir entre probabilidad y corroboración, pueden explicar por qué han parecido intuitivamente satisfactorias la fórmula de Laplace y otras semejantes. Creo que el resultado obtenido por Laplace es erróneo, porque creo que sus suposiciones (me refiero a lo que yo llamo la «distribución laplaciana») no son aplicables a los casos que él tiene en cuenta; sin embargo, lo son a otros casos, y nos permiten estimar la probabilidad absoluta de un informe acerca de una muestra estadística. Cf. mi «tercera nota» (apéndice *IX).

Corroboración, peso de los datos y contrastes estadísticos

Las tres notas que reproduzco en el presente apéndice (págs. 368 y sigs.) se publicaron originalmente en *The British Journal for the Philosophy of Science*[1].

Incluso antes de publicar mi libro he tenido la sensación de que el problema del grado de corroboración era uno de los que deberían ser investigados más de lo que se había hecho. Con el nombre de «el problema del grado de corroboración» quiero decir el que consiste en, I) poner de manifiesto que existe una medida (que hay que llamar grado de corroboración) de la *dureza de las contrastaciones* a las que se ha sometido una teoría, y de la manera en que ésta las ha sobrepasado o ha sido incapaz de hacerlo; y II) hacer ver que *esta medida no puede ser una probabilidad:* o, con mayor precisión, que no satisface las leyes formales del cálculo de probabilidades.

En el libro está incluido un esquema de la solución de ambas tareas, en especial de la segunda; pero me ha parecido que se necesitaba algo más, pues no era suficiente mostrar el fracaso de las teorías existentes de la probabilidad: la de Keynes y la de Jeffreys, por ejemplo, o las de Kaila y Reichenbach, ninguna de las cuales ha podido ni siquiera demostrar su doctrina central, la de que una ley universal, o una teoría, puedan llegar a una probabilidad $> 1/2$ (hasta el extremo de que no han logrado ni demostrar que una ley universal —o una teoría— pueda tener nunca una probabilidad diferente de cero). Lo que se necesitaba era tratar la cuestión de un modo enteramente general; y, por ello, he pretendido construir un cálculo de probabilidades formal que pudiera interpretarse en varios sentidos: he tenido a la vista, I) el sentido lógico, bosquejado en mi libro como probabilidad lógica (absoluta) de enunciados; II) el de la probabilidad lógica relativa de enunciados o de proposiciones, según lo ha considerado Keynes; III) el de un cálculo de frecuencias relativas dentro de sucesiones, y IV) el de un cálculo de una medida de ámbitos, de predicados, de clases o de conjuntos.

El objetivo último era, desde luego, hacer patente que *el grado de corroboración no es una probabilidad*, es decir, que *no es una de las interpretaciones posibles del cálculo de probabilidades.* Pero más tarde me percaté de que la tarea de construir un cálculo formal no

[1] *B. J. P. S.* **5**, 1954, págs. 143 y sigs. (véanse también las correcciones en las páginas 334 y 359); **7**, 1957, págs. 350 y sigs., y **8**, 1958, págs. 294 y sigs.

solamente era necesaria para mis propósitos, sino que tenía interés por sí misma.

Esto condujo al trabajo que publiqué en *Mind* —reproducido aquí como apéndice *II—, y a otros estudios que han abarcado muchos años y se han encaminado a simplificar mi sistema axiomático y a conseguir un cálculo de probabilidades en el que $p(a, b)$ —la probabilidad de a supuesto b— pudiera tener valores definidos (y no $0/0$) aun cuando $p(b)$ fuese igual a cero. Este último problema surge, desde luego, porque la definición

$$p(a, b) = p(ab)/p(b)$$

falla si $p(b) = 0$.

Era menester una solución de este problema, porque muy pronto me encontré con que para definir $C(x, y)$ —el grado de corroboración de la teoría x por los datos y— tenía que trabajar con cierta $p(y, x)$, una probabilidad inversa que Fisher ha llamado «*verosimilitud* de x» (a la luz de los datos y, o dado y; y adviértase que tanto mi «corroboración» como la verosimilitud fisheriana pretenden medir la aceptabilidad de la hipótesis x: de suerte que lo importante es x, e y no representa sino los datos empíricos cambiantes, o —como yo prefiero decir— los informes de *los resultados de las contrastaciones)*. Ahora bien, me había convencido de que si x es una teoría, $p(x)=0$; y me di cuenta, por tanto, de que tenía que construir un nuevo cálculo de probabilidades en el que la verosimilitud, $p(y, x)$, pudiera ser un número definido —en vez de $0/0$— incluso cuando x fuese una teoría universal, con $p(x) = 0$.

Voy a explicar brevemente cómo surge el problema de $p(y, x)$, es decir, el de la verosimilitud de x.

Si se nos pidiese dar un criterio para saber si los datos y apoyan —o, corroboran, o confirman— el enunciado x, la respuesta más obvia es: «que y *aumente* la probabilidad de x». Lo cual puede escribirse simbólicamente con «$Co(x, y)$», en lugar de decir, «x está apoyado, corroborado o confirmado por x»; pues entonces podemos formular nuestro criterio del modo siguiente:

(1) $$Co(x, y) \text{ si y sólo si } p(x, y) > p(x)$$

Tenemos aquí un defecto, sin embargo. Pues si x es una teoría universal e y ciertos datos empíricos, tendremos entonces —como hemos visto en los dos apéndices anteriores— [2]

(2) $$p(x) = 0 = p(x, y).$$

Pero de ello se seguiría que, para una teoría x y unos datos y, $Co(x, y)$ sería siempre falsa; o, dicho de otro modo, que jamás podría estar apoyada, corroborada o confirmada una teoría universal por unos datos empíricos.

---

[2] Véanse, especialmente, el apéndice *VII, fórmulas (1) y (2), y el apéndice *VIII, fórmula (2).

(Esto no solamente se cumple para un universo infinito, sino también para uno enormemente grande, como el que nosotros hemos admitido: pues, en este caso, tanto $p(x, y)$ como $p(x)$ serían increíblemente pequeños, y, por ello, prácticamente iguales.)

Podemos superar esta dificultad, con todo, como sigue: siempre que $p(x) \neq 0 \neq p(y)$, tenemos

(3) $$p(x, y) > p(x) \text{ si y sólo si } p(y, x) > p(y),$$

de suerte que podemos transformar (1) en

(4) $$Co(x, y) \text{ si y sólo si } p(x, y) > p(x) \text{ o } p(y, x) > p(y).$$

Sea ahora x una vez más una *ley universal*, y sea y el conjunto de datos empíricos que, digamos, se siguen de x; en este caso —siempre que y se siga de x— diremos intuitivamente que $p(y, x) = 1$; y como y es empírico (de modo que, sin duda alguna, $p(y)$ será menor que 1) llegamos a que se puede aplicar (4), y a que la aserción $Co(x, y)$ será verdadera: esto equivale a decir que x puede quedar corroborada por y si es que y se sigue de x —con tal de que $p(y) < 1$. Así pues, (4) es perfectamente satisfactoria desde un punto de vista intuitivo, mas para que sea posible operar sin dificultades con ella hemos de tener un cálculo de probabilidades en el que $p(y, x)$ sea un número definido (en nuestro caso, 1) y no 0/0, incluso si $p(x) = 0$. Y como hemos explicado más arriba, para lograr tal cosa ha de disponerse de una generalización del cálculo usual.

Si bien me había ya dado cuenta de ello cuando apareció mi nota de *Mind* (cf. el apéndice *II), apremiado por otros trabajos que consideraba más urgentes no completé mis investigaciones en este campo. Hasta 1954 no publiqué mis resultados acerca del grado de corroboración (en la primera de las notas que aquí reproduzco); y transcurrieron aún seis meses más antes de publicar un sistema axiomático de probabilidad relativa [3] (equivalente al que se encuentra en el apéndice *IV, aunque menos sencillo que él) que satisficiera la condición de que $p(x, y)$ sea un número definido incluso si $p(y)$ es igual a cero. El estudio correspondiente proporcionaba todos los instrumentos técnicos que se requieren para definir satisfactoriamente la verosimilitud y el grado de corroboración o confirmación.

La primera nota, «Grado de confirmación», que se publicó en 1954 en el *B. J. P. S.*, contiene una refutación matemática de todas las teorías de la inducción que identifican el grado en que un enunciado está apoyado —o, confirmado, o corroborado— por contrastaciones empíricas con su grado de probabilidad (en el sentido del cálculo de probabilidades). La refutación consiste en mostrar que si identificamos grado de corroboración —o confirmación— con probabilidad, nos veremos forzados a adoptar cierto número de tesis paradójicas, entre ellas la siguiente aserción, sin duda alguna contradictoria:

(*) Hay casos en que x está fuertemente apoyado por z e y está

---

[3] Véase *B. J. P. S.* 6, 1955, págs. 56-57.

fuertemente quebrantado por z, mientras que, a la vez, x está confirmado por z en menor grado que lo está y.

En el punto 6 de la primera nota se encontrará un ejemplo sencillo que hace ver cómo se sigue esta consecuencia devastadora si identificamos la corroboración —o confirmación— con la probabilidad [4]. En vista de la brevedad de tal pasaje, pienso que podría quizá explicar la cuestión aquí también.

Consideremos la próxima tirada con un dado homogéneo, y sean: x el enunciado «saldrá un seis», y su negación —esto es, $y = \bar{x}$— y z la información «saldrá un número par».

Tenemos las probabilidades absolutas siguientes:

$$p(x) = 1/6\ ;\quad p(y) = 5/6\ ;\quad p(z) = 1/2.$$

Y además las siguientes, éstas relativas:

$$p(x, z) = 1/3\ ;\quad p(y, z) = 2/3.$$

Vemos que x se encuentra apoyado por la información z, ya que ésta eleva la probabilidad de aquél de $1/6$ a $2/6 = 1/3$; y también que y se ve quebrantado por z, ya que esta última rebaja la probabilidad de y en la misma cantidad: de $5/6$ a $4/6 = 2/3$; y, sin embargo, tenemos $p(x, z) < p(y, z)$. Este ejemplo demuestra el siguiente teorema:

(5) Existen enunciados, x, y y z, que satisfacen la fórmula

$$p(x, z) > p(x)\ \&\ p(y, z) < p(y)\ \&\ p(x, z) < p(y, z).$$

Es evidente que podemos remplazar aquí «$p(y, z) < p(y)$» por esta otra, más débil, «$p(y, z) \leqslant p(y)$».

Este teorema, desde luego, dista mucho de ser paradójico, y lo mismo ocurre con el corolario (6) que obtenemos sustituyendo las expresiones «$Co(x, z)$» y «$\sim Co(y, z)$» —es decir, «no $Co(y, z)$»— en lugar de «$p(x, z) > p(x)$» y «$p(y, z) \leqslant p(y)$», respectivamente, de acuerdo con la fórmula anterior (1):

(6) Existen enunciados, x, y, z, que satisfacen la fórmula

$$Co(x, z)\ \&\ \sim Co(y, z)\ \&\ p(x, z) < p(y, z).$$

De igual modo que (5), el teorema (6) expresa un hecho que hemos asentado por medio de nuestro ejemplo: que x puede estar apoyado por z, e y quebrantado por z, mientras que, sin embargo, x supuesta z puede ser menos probable que y supuesta z.

---

[4] Frente a lo que ocurre con el ejemplo que doy en el texto, los que indico en los puntos 5 y 6 de mi primera nota son lo más sencillos posible, es decir, operan con el mínimo número posible de propiedades mutuamente excluyentes y equiprobables; lo mismo ocurre con el que presento en la nota a pie de página correspondiente al punto 5. (En lo que se refiere al punto 5, me parece que hay un ejemplo equivalente, aunque más complicado, en la obra de CARNAP *Logical Foundations of Probability*, 1950, § 71; he sido incapaz de seguirlo hasta el final, debido a su complejidad. En cuanto al punto 6, ni en la obra mencionada ni en ninguna otra he encontrado ningún ejemplo correspondiente.)

Pero se origina inmediatamente una contradicción clara si identificamos ahora —en (6)— grado de confirmación y probabilidad. Dicho de otro modo, la fórmula

$$(**) \qquad Co(x, z) \,\&\, \sim Co(y, z) \,\&\, C(x, z) < C(y, z)$$

es evidentemente contradictoria, y, por tanto, no puede satisfacerla ningún conjunto de enunciados.

Hemos demostrado, pues, que la identificación entre el grado de corroboración —o de confirmación— y la probabilidad (o la «verosimilitud») es absurda, tanto por razones formales como intuitivas, ya que conduce a una contradicción.

Se puede tomar en este contexto «grado de corroboración o de confirmación» en un sentido más amplio que aquél a que normalmente nos referimos: mientras que habitualmente lo tomo por un sinónimo de «grado de dureza de las contrastaciones que ha sobrepasado una teoría», en este caso lo empleo únicamente como «grado en que un enunciado x está apoyado por el enunciado y».

Si nos fijamos en la demostración, veremos que depende exclusivamente de dos suposiciones:

(a) la fórmula (1);
(b) la asunción de que todo aserto de la forma que sigue es *contradictorio:*

(***) x tiene la propiedad P (por ejemplo, la propiedad «caliente»), y no tiene la propiedad P, e y tiene la propiedad P en mayor grado que x (por ejemplo, y está más caliente que x).

Un lector atento de mi nota primera —y, en particular, del ejemplo que se presenta en el punto 6— verá que todo esto está implicado allí —excepto, tal vez, la formulación general (***) de las contradicciones (*) y (**)—. Reconozco que aquí lo expongo de forma mucho más explícita, pero el propósito de la nota no era tanto el de criticar cuanto el de dar una definición de grado de corroboración.

La crítica contenida en mi nota se dirigía contra *todos* los que identifican, explícita o implícitamente, el grado de corroboración —o de confirmación, o de aceptabilidad— con la probabilidad; y pensaba al hacerlo en los siguiente filósofos: Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hossiasson y —más recientemente— Carnap.

En cuanto a este último, he escrito una nota crítica que, según creo, habla por sí misma. El motivo de su aparición ha sido que Carnap, al enunciar los criterios de adecuación para el grado de confirmación, habla del consenso de «prácticamente todas las teorías modernas del grado de confirmación», sin mencionar mi disentimiento —pese al hecho de que él ha introducido el término inglés «degree of confirmation» [*grado de confirmación*] traduciendo el mío «*Grad der Bewährung*» (cf. la nota a pie de página anterior al apartado 79)—. Además, quería señalar que su división de la probabilidad en probabilidad$_1$ (= su grado de confirmación) y probabilidad$_2$ (= frecuencia estadística) era insuficiente, es decir, que, aun restringiendo cuanto es posible, existen, al menos, dos interpretaciones del cálculo de probabilidades (la interpretación lógica y la estadística), y que, *además*, se tiene mi grado de corroboración, *que no es una probabilidad* (como acabo de hacer patente, y como hacía ver en mi nota).

Me parece que dicha nota a pie de página, con sus diez líneas, ha atraído más atención que el resto de la nota: ha dado origen a un estudio en el *B. J. P. S.* [5], en el que Bar-Hillel ha afirmado que mi crítica de lo que él llama «la teoría vigente de la confirmación» (esto es, la teoría de Carnap) era puramente verbal, y que todo lo que yo tenía que decir lo había dicho con anterioridad este filósofo; y también ha originado una recensión de mi trabajo en el *Journal of Symbolic Logic* [6], en la que Kemeny ha resumido mi nota con las siguientes palabras: «La tesis principal de este artículo es que las medidas de grado de confirmación propuestas por Carnap no son apropiadas para tal fin, como tampoco lo es ninguna otra atribución de probabilidad lógica».

Desde luego, ésa no era mi tesis principal. La nota era una continuación de otros trabajos míos publicados quince años antes de que se escribiera el libro de Carnap; y en lo que respecta a la crítica, el punto que se debatía —la identificación de la corroboración, confirmación o aceptabilidad con la probabilidad—, aunque es, sin duda, la tesis principal del libro de Carnap, dista mucho de ser una tesis original de este autor: pues en ella sigue la tradición de Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hossiasson y otros. Aún más: tanto Bar-Hillel como Kemeny sugieren que mi crítica —en lo que es aplicable a la teoría de Carnap— sería puramente verbal, y que no hay por qué abandonar tal teoría; y, por ello, me siento obligado a decir claramente que la teoría de Carnap es contradictoria, y que su contradicción no es algo de menor importancia, que pudiera repararse fácilmente, sino que se debe a errores en sus fundamentos lógicos.

En primer lugar, tanto la suposición (a) como la (b) —que, como hemos visto, bastan para demostrar que es preciso no identificar el grado de confirmación con la probabilidad— se afirman de un modo explícito en la teoría de Carnap: (a) —o sea, nuestra fórmula (1)— puede encontrarse en el libro de Carnap, en la página 464, con el nombre de fórmula (4) [7]; y en el mismo libro, página 73, se halla (b) —esto es, (***), o sea, la asunción de que nuestra (**) es contradictoria—, pues allí escribe Carnap: «Si la propiedad, caliente, y la relación, más caliente, se designan respectivamente por... digamos, «*P*»

---

[5] Véase *B. J. P. S.* 6, 1955, págs. 155 a 163, y 7, 1956, págs. 243 a 256.

[6] Véase *J. S. L.* 20, 1955, pág. 304. Doy a continuación un error material de la recensión de Kemeny: en la línea 16, en lugar de «medida del apoyo que y da a *x*» [*measure of support given by* y *to* x], debería leerse, «medida de la capacidad explicativa de *x* con respecto a y» [*measure of the explanatory power of* x *with respect to* y].

[7] Véase también la fórmula (6) de la pág. 464; la fórmula (4) de Carnap en la misma página está escrita en forma de equivalencia, pero ello no cambia nada. Obsérvese que Carnap escribe «*t*» en el sentido de tautología; este uso nos permitiría escribir $p(x, t)$ en lugar de $p(x)$.

y «R», entonces «$Pa. \sim Pb.Rba$» serán contradictorias; ahora bien, esto es nuestra (***). Como es natural, en cierto sentido carece enteramente de importancia para mi argumentación que hace ver el absurdo de la identificación de C y p, el que (a) y (b) estén admitidas explícitamente en un libro; pero ocurre que en el de Carnap lo están.

Además, la contradicción que aquí expongo es crucial para Carnap: al aceptar (1) —o, con mayor precisión, al definir en las páginas 463 y siguiente «x está confirmado por y» mediante «$p(x, y) > p(x)$» (expresándolo con nuestro simbolismo)— este autor hace ver que el sentido que da a «grado de confirmación» (su «*explicandum*») es, *aproximadamente*, el mismo que yo le doy: la idea intuitiva de grado de apoyo por los datos empíricos (Kemeny se equivoca —en *loc. cit.*— al indicar lo contrario: en realidad, «una lectura cuidadosa» de mi trabajo —y del libro de Carnap, añadiría yo— *no* «mostrará que Popper y Carnap se refieren a dos *explicanda* diferentes», sino que Carnap, sin darse cuenta, se refiere con su probabilidad$_1$ a dos «*explicanda*» diferentes e incompatibles, uno de ellos mi C y el otro mi p; y mostrará, asimismo, que he señalado repetidamente los peligros de esta confusión: por ejemplo, en el artículo cuya recensión hace Kemeny). Por tanto, todo cambio que se haga en la suposición (a) será *ad hoc;* no es mi crítica lo que es «puramente verbal», sino las tentativas de rescatar la «teoría vigente de la confirmación».

Para mayores detalles, he de remitir al estudio que apareció en el *B. J. P. S.* Tengo que decir que me decepcionó algo dicho estudio, y lo mismo la recensión de Kemeny en el *Journal of Symbolic Logic.* Desde un punto de vista racional, la situación me parece bastante seria: en nuestra época postrracionalista se escriben libros y más libros en lenguajes simbólicos, y se hace más y más difícil el ver por qué —qué es lo que se trata con todo ello, y por qué habría de ser necesario, o conveniente, permitir que le aburran a uno tomos y tomos de trivialidades simbólicas—. Parece como si el simbolismo se estuviese convirtiendo en un valor por sí mismo, que hubiera de reverenciar por su «exactitud» suprema: una nueva expresión de la antigua búsqueda de la certeza, un nuevo ritual simbólico, un nuevo sustituto de la religión. Y, con todo, el único valor de este tipo de cosas —la única excusa posible para su dudosa pretensión de exactitud— parece ser el siguiente: una vez que se ha acertado en una equivocación o una contradicción, no cabe evasión verbal; puede demostrarse, y ahí está (Frege no intentó maniobras evasivas cuando recibió la crítica de Russell). Así pues, si hay que soportar un montón de aburridos detalles técnicos y un formalismo de una complejidad innecesaria, al menos podría esperarse la compensación de que se aceptara en el acto una prueba palmaria de contradicción —esto es, una demostración que consiste en el más sencillo de los ejemplos en contra—. Decepciona verse respondido —por el contrario— con evasiones meramente verbales, combinadas con la aseveración de que la crítica hecha era «meramente verbal».

Pero no hay que ser impaciente. Desde el tiempo de Aristóteles, el enigma de la inducción ha llevado a muchos filósofos al irracionalismo (al escepticismo o al misticismo); y aunque la filosofía de la identidad de C y *p* parece haber capeado muchos temporales desde la época de Laplace, sigo pensando que terminará por ser abandonada. No puedo creer que los defensores de la fe vayan a estar satisfechos para siempre con el misticismo y el hegelismo, y a sostener que «C = *p*» es un axioma evidente, o el objeto deslumbrador de una intuición inductiva (digo «deslumbrador» porque parece ser un objeto cuyos contempladores están atacados de ceguera cuando se precipitan de rondón en sus contradicciones lógicas).

Quizá sea oportuno decir aquí que considero la doctrina de que *el grado de corroboración —o de aceptabilidad— no puede ser una probabilidad*, como uno de los hallazgos más interesantes de la filosofía del conocimiento. Y cabe exponerlo con gran sencillez del siguiente modo: *es posible resumir en una evaluación todo informe del* resultado de someter a contraste una teoría, evaluación que puede adoptar la forma de asignar a ésta cierto grado de corroboración, pero nunca un grado de probabilidad; pues *la probabilidad de un enunciado (dados ciertos enunciados de contraste), simplemente no expresa una evaluación de la dureza de las contrastaciones que dicha teoría ha pasado, ni de la manera en que lo ha hecho*; y la razón principal de esto reside en que es el *contenido* de una teoría —que es lo mismo que su *improbabilidad*— lo que determina su *contrastabilidad* y su *corroborabilidad.*

Creo que estas dos últimas ideas —las de *contenido* y *grado de corroboración*— constituyen las dos herramientas lógicas más importantes que he desarrollado en el libro [8].

Basta con lo dicho como introducción. He conservado en las tres notas que siguen la palabra «confirmación», aun cuando ahora escribiría solamente «corroboración»; y también he dejado «P(x)» en lu-

[8] Que yo sepa, ni el reconocimiento de la importancia del *contenido empírico* o capacidad asertiva de una teoría, ni la sugerencia de que este contenido aumenta al hacerlo la clase de los posibles falsadores de la teoría —es decir, las situaciones que ésta prohibe o excluye (véanse los apartados 23 y 31)—, ni la idea de que pueda medirse el contenido por la improbabilidad de una teoría, los he tomado de fuente alguna, sino que son «fruto de mi propio trabajo». Me sorprendió, por tanto, leer en el libro de Carnap, *Introduction to Semantics*, 1942, pág. 151, en relación con su definición de «contenido»: «... la capacidad asertiva de una cláusula consiste en que excluye ciertas situaciones (Wittgenstein): cuanto más excluye más afirma». Escribí a Carnap pidiéndole detalles y recordándole ciertos pasajes pertinentes de mi libro; en su respuesta me dijo que la referencia a Wittgenstein se había debido a que le había fallado la memoria, y que de lo que realmente se había acordado era de un pasaje de mi libro; y repitió la corrección en su *Logical Foundations of Probability*, 1950, pág. 406. Menciono aquí esto porque en cierto número de trabajos publicados a partir de 1942 se ha venido atribuyendo la idea de contenido —en el sentido de contenido empírico o informativo— a Wittgenstein o a Carnap, y, en ocasiones, a Wittgenstein y a mí (todo ello sin referencia definida). Pero no me gustaría que se pensase que he tomado ideas de Wittgenstein ni de nadie sin reconocerlas: como dedicado que estoy a la historia de las ideas, entiendo que es muy importante hacer referencia a las propias fuentes. (Véase también mi estudio —en el apartado 35— de la diferencia entre *contenido lógico* y *contenido empírico*, con referencias a Carnap en las notas a pie de página 1 y 2.)

gares en que actualmente acostumbro a poner «$p(x)$». Pero he corregido varias erratas[9] y añadido unas pocas notas a pie de página (precedidas por un asterisco), así como dos puntos más, el *13 y el *14, al final de la «tercera nota».

Grado de confirmación

1. La finalidad de esta nota es proponer y discutir una definición —en términos probabilitarios— del ***grado en que un enunciado* x *está confirmado por otro* y** (es evidente que puede considerarse esta cuestión idéntica a la de ***el grado en que un enunciado* y *confirma a otro* x**). Denotaré este grado con el símbolo «$C(x, y)$», que ha de leerse «el ***grado de confirmación de* x *por* y**». En ciertos casos particulares, x puede ser una hipótesis h, e y ciertos datos empíricos, d, en favor o en contra de h —o bien neutrales con respecto a ella—; pero $C(x, y)$ será aplicable también a casos menos típicos.

La definición se ha de hacer en términos probabilitarios. Emplearé tanto $P(x, y)$ —es decir, la probabilidad (relativa) de x dado y— como $P(x)$, o sea, la probabilidad (absoluta) de x[1]; pero una cualquiera de ellas bastaría.

2. Se suele suponer que el grado de confirmación de x por y tiene que ser lo mismo que la probabilidad (relativa) de x dado y: o sea, que tendríamos $C(x, y) = P(x, y)$. Pues bien, mi primera tarea es mostrar que se trata de una suposición inadecuada.

3. Considérense dos enunciados contingentes, x e y. Desde el punto de vista de la confirmación del primero por el segundo, existirán dos casos extremos: que x esté totalmente apoyado por y —o que x quede estatuido por y— en caso de que aquél se siga de éste; y que x resulte enteramente quebrantado, refutado o desestatuido por y, en caso de que $\bar{x}$ se siga de y. Hay un tercer caso que tiene una importancia especial: es el de la independencia —o intrascendencia— mutua, caracterizado por $P(x, y) = P(x)P(y)$; el valor correspondiente de $C(x, y)$ se encontrará por debajo del que sirve para estatuir y por encima del que llega a desestatuir.

Entre estos tres casos especiales —de estatuir, de ser independientes y de desestatuir— habrá otros intermedios. *Apoyo parcial* (cuando y entraña parte del contenido de x): por ejemplo, si nuestro enun-

[9] Como es natural, también he incorporado las correcciones mencionadas en el *B. J. P. S.* 5, págs. 334 y 359.

[1] Puede definirse «$P(x)$» a base de probabilidades relativas por medio del *definiens* «$P(x, \overline{z\bar{z}})$», o—más sencillamente— por «$P(x, \overline{x\bar{x}})$» (empleo siempre «$xy$» para denotar la conyunción de x e y, así como «$\bar{x}$» para denotar la negación de x). Puesto que tenemos, con toda generalidad, $P(x, y\overline{z\bar{z}}) = P(x, y)$ y $P(x, yz) = P(xy, z)/P(y, z)$, llegamos a $P(x, y) = P(xy)/P(y)$, que es una fórmula muy manejable para definir la probabilidad relativa a partir de la absoluta. (Véase mi nota de *Mind*, 1938, 47, págs. 275 y sig., en donde identificaba la probabilidad absoluta con lo que había llamado «probabilidad lógica» en mi *Logik der Forschung*, Viena, 1935 —especialmente, apartados 34 y sig. y 83—, ya que es preferible emplear el término «probabilidad lógica» para la «interpretación lógica» tanto de $P(x)$ como de $P(x, y)$, que se opone a su «interpretación estadística» —de la que podemos desentendernos aquí.)

ciado contingente y se sigue de x, pero no viceversa, entonces forma parte del contenido de x, y, por ello, entraña una parte del contenido de este último enunciado, por lo cual le apoya; y *quebrantamiento parcial* de x por y (cuando y apoya parcialmente a $\bar{x}$): por ejemplo, si y se sigue de $\bar{x}$. Diremos, pues, que y apoya o quebranta a x cuando $P(x, y)$ o $P(\bar{x}, y)$, respectivamente, exceden de los valores que tienen en el caso de independencia. (Es fácil ver que los tres casos de apoyo, quebrantamiento e independencia son exhaustivos y mutuamente excluyentes, debido a la definición dada.)

4. Consideremos ahora la conjetura de que haya tres enunciados, x_1, x_2 e y, tales que: I) lo mismo x_1 que x_2 sean independientes de y (o estén quebrantados por éste), y, a la vez, II) y apoye su conyunción x_1x_2. Es algo obvio que en esta situación habremos de decir que y confirma a x_1x_2 en mayor grado de lo que lo hace a x_1 y a x_2; o, simbólicamente,

$$C(x_1, y) < C(x_1x_2, y) > C(x_2, y) \tag{4.1}$$

Pero esto sería incompatible con la tesis de que $C(x, y)$ sea una probabilidad, es decir, con

$$C(x, y) = P(x, y) \tag{4.2}$$

ya que para las probabilidades tenemos la fórmula válida con toda generalidad

$$P(x_1, y) \geqslant P(x_1x_2, y) \leqslant P(x_2, y) \tag{4.3}$$

la cual, en presencia de (4.1), contradice a (4.2). Así pues, tendríamos que abandonar (4.2); pero (4.3) es una consecuencia inmediata del principio general de multiplicación para las probabilidades si se tiene en cuenta $0 \leqslant P(x, y) \leqslant 1$, de modo que habríamos de prescindir de dicho principio en lo que respecta al grado de confirmación. Y resulta, además, que sería preciso eliminar también el principio especial de adición: pues como $P(x, y) \geqslant 0$,

$$P(x_1x_2 \text{ o } x_1\bar{x}_2, y) \geqslant P(x_1x_2, y) \tag{4.4}$$

será una consecuencia de este principio; mas, por otra parte, esto no puede ser válido para $C(x, y)$, si caemos en la cuenta de que la alternativa x_1x_2 *o* $x_1\bar{x}_2$ ha de ser equivalente a x_1, de modo que llegamos por sustitución en el primer miembro de (4.1) a

$$C(x_1 x_2 \text{ o } x_1\bar{x}_2, y) < C(x_1x_2, y) \tag{4.5}$$

Y nos encontramos con que, en presencia de (4.4), (4.5) contradice a (4.2) [2].

---

[2] En su *Logical Foundations of Probability*, Chicago, 1950, pág. 285, Carnap emplea los principios de multiplicación y de adición como «*convenciones sobre adecuación*» *para el grado de confirmación*. El único argumento que presenta en favor de la adecuación de estos principios es el de que «gozan de aceptación general en todas las teorías modernas de la probabilidad, prácticamente»: es decir, las teorías

5. Estos resultados dependen de la conjetura de que existan unos enunciados x_1, x_2, y, tales que: I) tanto x_1 como x_2 sean independientes de y (o estén quebrantados por él), y, al mismo tiempo, II) y apoye a x_1x_2; conjetura que voy a probar con un ejemplo [3].

Supónganse fichas de colores, a las que llamamos «*a*», «*b*», ..., dotadas cada una con una de estas propiedades excluyentes entre sí e igualmente probables: azul, verde, rojo y amarillo. Sean, x_1 el enunciado «*a* es verde o roja», x_2 = «*a* es azul o roja», e y = «*a* es azul o amarilla»; entonces se satisfacen las condiciones impuestas (es palmario que y apoya a x_1x_2: aquel enunciado se sigue de éste, y la presencia de y eleva la probabilidad de x_1x_2 al doble del valor que tiene en ausencia de y).

6. Pero podemos construir incluso un ejemplo más sorprendente que ponga de manifiesto que identificar $C(x, y)$ con $P(x, y)$ es enteramente inadecuado. Elegimos x_1 de modo que esté apoyado fuertemente por y, y un x_2 tal que esté fuertemente quebrantado por y; en consecuencia, hemos de pedir que $C(x_1, y) > C(x_2, y)$. Pero cabe elegir x_1 y x_2 de suerte que $P(x_1, y) < P(x_2, y)$, como muestra el siguiente ejemplo: adoptemos x_1 = «*a* es azul», x_2 = «*a* no es roja», y = «*a* no es amarilla»; entonces, $P(x_1) = 1/4$, $P(x_2) = 3/4$ y $1/3 = P(x_1, y) < P(x_2, y) = 2/3$; en cuanto a que y apoya a x_1 y quebranta a x_2, es algo perfectamente claro a la vista de estas cifras y del hecho que y se siga de x_1 y también de $\bar{x}_2$ [*1].

7. ¿Por qué se han confundido tan persistentemente $C(x, y)$ y $P(x, y)$? ¿Por qué no se ha visto que es absurdo decir que ciertos datos y «confirman» fuertemente a x aun cuando x sea completamente independiente de aquéllos, y que y puede «confirmar» enérgicamente a x a pesar de quebrantarlo (y ello incluso si y es la totalidad de los datos de que se dispone)? No sé cuál es la respuesta a estas preguntas, pero puedo hacer algunas sugerencias. En primer lugar, hay una fuerte tendencia a pensar que todo aquello a que pueda llamarse «probabilidad» o «verosimilitud» de una hipótesis ha de ser una probabilidad en el sentido del cálculo de probabilidades. Hace veinte años que, para desenredar las varias cuestiones inclusas en todo esto, hice la distinción entre los que llamé entonces «grado de con-

---

de nuestro $P(x, y)$, que Carnap identifica con «grado de confirmación». Pero este término de «grado de confirmación» («*Grad de Bewährung*») había sido introducido por mí en los apartados 82 y sig. de mi *Logik der Forschung* (libro al que Carnap se refiere algunas veces), con objeto de hacer ver que tanto la probabilidad lógica como la estadística son *inadecuadas* para servir de grado de confirmación, ya que la confirmabilidad debe aumentar al par que la contrastabilidad y, por tanto, que la improbabilidad lógica (absoluta) y que el contenido. (Véase más abajo.)

[3] Este ejemplo satisface I) para la *independencia*, más bien que para el *quebrantamiento* (para obtener un ejemplo que valga en lo que respecta a este último, añádase un quinto color, naranja, y hágase y = «*a* es naranja, azul o amarilla»).

[*1] Este hecho —es decir, el de que $p(y, x_1) = p(y, \bar{x}_2) = 1$— quiere decir que la «verosimilitud» de Fisher de x_1 (y, por tanto, de $\bar{x}_2$) a la vista de y es máxima. Véase la introducción al presente apéndice, en la que se desarrolla el razonamiento esbozado en el texto.

firmación» y las probabilidades lógica y estadística; pero, desgraciadamente, otros autores empezaron prontamente a utilizar dicho término como un nuevo nombre aplicable a la probabilidad (lógica), y ello tal vez influidos por la errónea opinión de que la ciencia, incapaz de llegar a la certeza, debe apuntar a una especie de «*Ersatz*»: la máxima probabilidad alcanzable.

Otra sugerencia. Parece como si nunca se le hubiera dado la vuelta a la frase «el grado de confirmación de x por y», convirtiéndola en «el grado en que y confirma a x», o en «*la capacidad de* y *para apoyar a* x»; pero en estas formas hubiera sido evidente que, en caso de que y apoye a x_1 y quebrante a x_2, $C(x_1, y) < C(x_2, y)$ es absurdo, aun cuando $P(x_1, y) < P(x_2, y)$ puede ser irreprochable (lo cual indicaría que teníamos, por lo pronto, $P(x_1) < P(x_2)$). Además, todo indica que existe una tendencia a confundir las medidas *de* aumento o disminución con las medidas *que* aumentan o disminuyen (como hace ver la historia de los conceptos de velocidad, aceleración y fuerza); mas la capacidad de y para apoyar a x es esencialmente —como veremos— una *medida del aumento o disminución* de la probabilidad de x, debidos a y. Véase también, más abajo, 9 (VII).

8. Podrá decirse tal vez, como respuesta, que siempre es legítimo designar $P(x, y)$ con un nombre cualquiera, por ejemplo, el de «grado de confirmación». Pero la cuestión con que nos enfrentamos no es una cuestión verbal.

Se cuenta con que el grado de confirmación de la hipótesis x por los datos empíricos y se utilizará para estimar el grado en que x está *respaldada por la experiencia*. Ahora bien: $P(x, y)$ no sirve con este fin, ya que $P(x_1, y)$ puede ser mayor que $P(x_2, y)$, aunque x_1 y x_2 estén respectivamente quebrantada y apoyada por y; lo cual se debe al hecho de que $P(x, y)$ depende en grandísima medida de $P(x)$, es decir, de la probabilidad absoluta de x, que no tiene que ver lo más mínimo con los datos empíricos.

Aún más: se parte de que el grado de confirmación tiene cierta influencia sobre la cuestión de si deberíamos *aceptar* —o *elegir*— una hipótesis determinada, x, aunque sea sólo de un modo provisional: se supone que una hipótesis «buena» (o «aceptable») está caracterizada por un grado de confirmación elevado, mientras que otra que esté contraconfirmada sería «mala». Pero $P(x, y)$ no sirve para nada en esta esfera: *la ciencia no pretende alcanzar probabilidades elevadas, sino contenidos informativos elevados y bien respaldados por la experiencia; pero una hipótesis puede ser muy probable por el simple hecho de no decir nada, o muy poco.* Por lo tanto, un grado de probabilidad elevado no constituye una indicación de «bondad»: puede ser mero síntoma de un contenido informativo reducido. Por el contrario, es menester —y posible— definir $C(x, y)$ de suerte que solamente puedan llegar a tener un grado de confirmación elevado las hipótesis que posean un gran contenido informativo: la *confirmabilidad* de x (o sea, el grado máximo de confirmación que pueda alcanzar un enunciado x) habría de aumentar con $Ct(x)$, esto es, con la medida del contenido de x, que es igual a $P(\bar{x})$ —y, por ello, al *grado de contrastabilidad* de x—. Así pues, mientras que $\mathrm{P}(\overline{x\bar{x}}, y) = 1$, $\mathrm{C}(\overline{x\bar{x}}, y)$ tendría que ser nula.

9. Es posible dar una definición de $\mathrm{C}(x, y)$ que satisfaga estos y otros *desiderata* señalados en mi *Logik der Forschung*, y aún otros más exigentes, basándola en $\mathrm{E}(x, y)$, es decir, en una medida no aditiva de *la capacidad explicativa de* x *con respecto a* y que tenga como extremos inferior y superior —1 y 1, respectivamente; medida que se define del modo siguiente:

(9.1) sea x coherente[4], y sea $\mathrm{P}(y) \neq 0$; definimos entonces

$$\mathrm{E}(x, y) = \frac{\mathrm{P}(y, x) - \mathrm{P}(y)}{\mathrm{P}(y, x) + \mathrm{P}(y)}$$

Puede interpretarse también $\mathrm{E}(x, y)$ como una medida no aditiva de la dependencia de y con respecto a x, o del apoyo dado a y por x (y viceversa); esta magnitud satisface nuestros *desiderata* más importantes, pero no todos: por ejemplo, viola la condición (VIII, c) —que daremos más abajo—, y, en ciertos casos especiales, satisface (III) y (IV) sólo aproximadamente. Para remediar estos defectos, propongo que se defina $\mathrm{C}(x, y)$ del modo que sigue [*2].

(9.2) Sea x coherente, y téngase $\mathrm{P}(y) \neq 0$; definimos entonces

$$\mathrm{C}(x, y) = \mathrm{E}(x, y)(1 + \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(x, y))$$

Se trata de algo menos sencillo que, por ejemplo, $\mathrm{E}(x, y)\ (1 + \mathrm{P}(xy))$ —que satisface la mayoría de nuestros *desiderata*, pero viola (IV)—; mas para $\mathrm{C}(x, y)$ se cumple el teorema que afirma que cumple todos los *desiderata* siguientes:

(I) $\mathrm{C}(x, y) \gtreqless 0$, respectivamente, si y sólo si y apoya a x, o es independiente de ella o la quebranta.

(II) $-1 = \mathrm{C}(\bar{y}, y) \leqslant \mathrm{C}(x, y) \leqslant \mathrm{C}(x, x) \leqslant 1$

(III) $0 \leqslant \mathrm{C}(x, x) = \mathrm{Ct}(x) = \mathrm{P}(\bar{x}) \leqslant 1$

Obsérvese que $\mathrm{Ct}(x)$ —y, por tanto, también $\mathrm{C}(x, x)$— es una medida aditiva del contenido de x, que cabe definir por $\mathrm{P}(\bar{x})$, esto es, por la

---

[4] Puede omitirse esta condición si aceptamos el convenio general de que $\mathrm{P}(x, y) = 1$ siempre que y no sea coherente.

[*2] He aquí otra definición posible, algo más sencilla, que también satisface todas mis condiciones de adecuación o *desiderata* (la he enunciado por primera vez en el *B. J. P. S.* **5**, pág. 359):

$$(9.2^*) \qquad \mathrm{C}(x, y) = \frac{\mathrm{P}(y, x) - \mathrm{P}(y)}{\mathrm{P}(y, x) - \mathrm{P}(xy) + \mathrm{P}(y)}$$

Análogamente, hago ahora

$$(10.1^*) \qquad \mathrm{C}(x,y,z) = \frac{\mathrm{P}(y, xz) - \mathrm{P}(y, z)}{\mathrm{P}(y,xz) - \mathrm{P}(xy, z) + \mathrm{P}(y, z)}$$

probabilidad absoluta de que x sea falsa, o sea, la verosimilitud *a priori* de que x quede *refutada;* así pues, la *confirmabilidad* equivale a la *refutabilidad o contrastabilidad* [5].

(IV) Si y entraña x, entonces $C(x, y) = C(x, x) = Ct(x)$

(V) Si y entraña $\bar{x}$ entonces $C(x, y) = C(\bar{y}, y) = -1$

(VI) Tenga x un contenido elevado —de modo que $C(x, y)$ se acercará a $E(x, y)$— y ocurra que y apoya a x (podemos tomar para y, por ejemplo, la totalidad de los datos empíricos conocidos): *entonces, para cualquier* y *dado,* $C(x, y)$ *aumenta con la capacidad de* x *para explicar* y (es decir, para explicar más y más el contenido de y), y, por ello, con el *interés científico* de x.

(VII) Si $Ct(x) = Ct(y) \neq 1$, entonces $C(x, u) \gtreqless C(y, w)$, siempre que $P(x, u) \gtreqless P(y, w)$.[*3]

(VIII) Si x entraña y, entonces: (*a*) $C(x, y) \geqslant 0$, (*b*) para cualquier x dado, $C(x, y)$ y $Ct(y)$ aumentan a la vez, y (*c*) para cualquier y dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ también aumentan simultáneamente [6].

(IX) Si $\bar{x}$ es coherente y entraña y, entonces: (*a*) $C(x, y) \leqslant 0$, (*b*) para cualquier x dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ crecen al mismo tiempo, y (*c*) para cualquier y dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ crecen, asimismo, simultáneamente.

10. Es posible relativizar todas nuestras consideraciones, sin excepción, con respecto a cierta información inicial z: basta añadir en los lugares oportunos frases como «en presencia de z y suponiendo que $P(z, \overline{z\bar{z}}) \neq 0$». La definición relativizada del grado de confirmación resulta así,

$$C(x, y, z) = E(x, y, z)(1 + P(x, z)P(x, yz)) \tag{10.1}$$

en donde

$$E(x, y, z) = \frac{P(y, xz) - P(y, z)}{P(y, xz) + P(y, z)} \tag{10.2}$$

$E(x, y, z)$ es la capacidad explicativa de x con respecto a y, en presencia de z [7].

---

[5] Véase el apartado 83 de mi *L. d. F.*, que lleva el título de «Confirmabilidad, contrastabilidad y probabilidad lógica» (debería introducirse «absoluta» a continuación de «lógica», de acuerdo con la terminología de mi nota en *Mind, loc. cit.).*

[*3] Ni en el texto original ni en las correcciones a él luego publicadas se había estampado la condición « $\neq 1$».

[6] (VII) y (VIII) contienen los únicos *desiderata* importantes satisfechos por $P(x, y)$.

[7] Sean, x_1 la teoría gravitatoria de Einstein, x_2 la de Newton, y los datos empíricos de que disponemos actualmente (ya interpretados) —incluidas las leyes «aceptadas» (es indiferente que se cuenten aquí las dos teorías mencionadas, una de ellas o ninguna, con tal de que se satisfagan nuestras condiciones para y)— y z una parte

11. Existen, según creo, ciertos *desiderata* intuitivos que no pueden satisfacerse mediante ninguna definición formal: por ejemplo, una teoría está mejor confirmada cuanto más ingeniosas hayan sido nuestras tentativas infructuosas de refutarla. Mi definición incorpora parte de esta idea —si no todo lo que puede ser formalizado de ella—; pero no cabe formalizar totalmente la noción de un intento sincero e ingenioso [8].

Considero que carece de importancia el modo concreto en que he definido aquí $C(x, y)$: pero sí pueden tenerla los *desiderata* y *el hecho de que sea posible satisfacerlos todos.*

Segunda nota sobre grado de confirmación

1. El profesor Kemeny ha sugerido [1] (con referencia a mi definición de *contenido*), y —de un modo independiente— el doctor C. L. Hamblin lo mismo [2], que convendría medir el *contenido* de x

---

de y: por ejemplo, una selección de entre los datos de que se disponía hace un año. Como asumimos que x_1 explica más cosas de y que x_2, obtenemos $C(x_1, y, z) \geqslant C(x_2, y, z)$ para toda z, y $C(x_1, y, z) > C(x_2, y, z)$ para cualquier z apropiada que contenga algunas de las condiciones iniciales pertinentes (lo cual se sigue de (VI), *incluso en caso de que tengamos que asumir* que $P(x_1, yz) = P(x_2, yz) = P(x_1) = P(x_2) = 0$).

[8] Hay muchas maneras de llegar cerca de esta idea. Por ejemplo, podemos establecer una prima para los experimentos cruciales definiendo

$$C_{a,\,b}(h) = \Big(C(h, d_b)\prod_{i=1}^{n} C(h, c_i, d_a)\Big)^{1/(n+1)}$$

en donde $c_1, c_2, \ldots$, es la sucesión de experimentos realizados entre los instantes t_a y t_b (tenemos $t_a < t_1 \leqslant t_i \leqslant t_n = t_b$); d_a y d_b son los datos totales (que pueden incluir leyes) *aceptados*, respectivamente, en t_a y t_b. Postulamos $P(c_i, d_b) = 1$, y (para asegurarnos de que sólo se cuentan experimentos nuevos) $P(c_i, d_a) \neq 1$ y $P(c_i, Uc_j) \neq 1$ siempre que $j < i$ («Uc_j» *es la universalización espacio-temporal* de c_j).

* Actualmente me siento inclinado a tratar esta cuestión de un modo distinto. Podemos distinguir, con gran sencillez, entre la fórmula «$C(x, y)$» (o «$C(x, y, z)$») *y sus aplicaciones* a lo que mentamos intuitivamente por corroboración o aceptabilidad; basta entonces decir que $C(x, y)$ no ha de interpretarse como grado de corroboración —ni debe aplicarse a los problemas de la aceptabilidad— a menos que y represente (la totalidad de) los resultados de intentos sinceros para refutar x (véase también el punto *14 de mi «tercera nota», más adelante).

He puesto «la totalidad de» entre paréntesis, porque puede considerarse otra posibilidad: podemos confinar nuestras contrastaciones a cierto campo de aplicaciones, *CA* (cf. los apéndices I y *VIII), y relativizar entonces C escribiendo «$C_{CA}(x, y)$»; es posible decir que la corroboración total de una teoría es simplemente la suma de sus corroboraciones en sus distintos campos de aplicación (independientes).

[1] JOHN G. KEMENY, *Journal of Symbolic Logic*, 1953, **18**, pág. 297 (Kemeny se refiere a mi *Logik der Forschung).*

[2] C. L. Hamblin, «Language and the Theory of Information», tesis presentada en la Universidad de Londres en mayo de 1955 (no publicada): véase la pág. 62. El doctor Hamblin llegó a esta definición independientemente del trabajo del profesor Kemeny (al cual se refiere en su tesis).

que se denota por «$\mathrm{Ct}(x)$» por medio de $-\log_2 \mathrm{P}(x)$, en lugar de hacerlo por $1-\mathrm{P}(x)$, como yo había propuesto (empleo aquí mis propios símbolos). Si se acepta esta sugerencia, es preciso modificar ligeramente mis *desiderata* [3] para el *grado de confirmación* de x por y (que he denotado con «$\mathrm{C}(x, y)$»): hemos de remplazar ± 1 por $\pm\infty$ en (II) y en (V), y (III) se convierte en

$$\text{(III)} \quad 0 \leqslant \mathrm{C}(x, xy) = \mathrm{C}(x, x) = \mathrm{Ct}(x) = -\log_2 \mathrm{P}(x) \leqslant +\infty .$$

Los *desiderata* restantes permanecen inalterados.

El doctor Hamblin propone [4] que definamos el grado de confirmación por

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{C}(x, y) = \log_2(\mathrm{P}(xy)/\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y))$$

que para sistemas finitos (pero no necesariamente para infinitos) es lo mismo que

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{C}(x, y) = \log_2(\mathrm{P}(y, x)/\mathrm{P}(y)),$$

fórmula que tiene la ventaja de seguir estando determinada incluso si $\mathrm{P}(x) = 0$, como puede ocurrir en caso de que x sea una teoría universal. La fórmula relativizada correspondiente sería

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{C}(x, y, z) = \log_2(\mathrm{P}(y, xz)/\mathrm{P}(y, z)).$$

La definición (1), sin embargo, no satisface mi *desideratum* VIII (*c*), como hace observar el doctor Hamblin, y lo mismo ocurre con (2) y (3). Tampoco se satisfacen los *desiderata* IX (*b*) y (*c*).

Ahora bien, en mi opinión, VIII (*c*) marca la diferencia entre una medida de capacidad explicativa y una de confirmación. En efecto: la primera puede ser simétrica en x e y, pero la última no, pues en caso de que y se siga de x (y apoye a éste) y de que a no esté confirmado por y, no parece que sea satisfactorio decir que ax está siempre tan bien confirmado por y como lo está x (pero no parece existir razón alguna por la que ax y x no hayan de tener la misma capacidad explicativa con respecto a y, ya que éste está enteramente explicado por ambas). Y, por ello, me inclino a no abandonar VIII (*c*).

Por tanto, prefiero considerar (2) y (3) como definiciones sumamente adecuadas de la *capacidad explicativa* —es decir, de $\mathrm{E}(x, y)$ y $\mathrm{E}(x, y, z)$— en lugar de serlo del grado de confirmación. Este último puede definirse a partir de la capacidad explicativa de muchas

---

[3] «Grado de confirmación», en este *Journal*, 1954, **5**, págs. 143 y sigs.; véase también la pág. 334.

[4] L. C. HAMBLIN, *op. cit.*, pág. 83. En su recensión de mi «Grado de confirmación», el doctor I. J. Good hace una propuesta análoga (sin especificar 2, sin embargo, como base de los logaritmos); cf. *Mathematical Review*, 1955, **16**, pág. 376.

maneras diferentes que satisfagan VIII (*c*). Una de ellas es la siguiente (aunque creo que pueden encontrarse otras mejores):

(4) $$C(x, y) = E(x, y)/(1 + nP(x)P(\bar{x}, y))$$
(5) $$C(x, y, z) = E(x, y, z)/(1 + nP(x, z)P(\bar{x}, yz))$$

Podemos elegir aquí $n \geqslant 1$; y si queremos que VIII (c) tenga un efecto destacado haremos que n sea un número bastante grande.

En caso de que x sea una teoría universal con $P(x) = 0$, e y datos empíricos, la diferencia entre E y C desaparece, lo mismo que ocurre en mis definiciones originales y según pide el *desideratum* (VI); y también desaparece si x se sigue de y. Así pues, se conservan, por lo menos, algunas de las ventajas de manejar una medida logarítmica: según explica Hamblin, el concepto definido por (1) queda en una estrecha relación con la idea fundamental de la teoría de la información; acerca de lo cual Good hace también algunos comentarios (véase la nota 4).

El paso de las definiciones antiguas a las nuevas conserva el orden (y lo mismo ocurre con la capacidad explicativa, como implican las observaciones de Hamblin); de modo que la diferencia es únicamente métrica.

2. Desde luego, las definiciones de capacidad explicativa y —aún en mayor medida— de grado de confirmación (o corroboración, aceptabilidad, atestiguación, o cualquier nombre que elijamos para ello) dan el mayor peso al «*peso de datos*» (o «peso de un argumento», como Keynes lo llama en el capítulo VI) *[1]; y ello resulta obvio con la nueva definición —debida a la propuesta de Hamblin—, que parece tener ventajas considerables si por alguna razón nos interesan las cuestiones métricas.

3. Sin embargo, hemos de percatarnos de que la métrica de nuestro C dependerá enteramente de la de P; *mas no puede haber una métrica satisfactoria de* P: *es decir, no puede haber una métrica de la probabilidad lógica que se base sobre consideraciones puramente lógicas.* Para darnos cuenta de ello, consideremos la probabilidad lógica de una propiedad física medible cualquiera (que sea una variable aleatoria no discreta), tal como la longitud, por tomar el ejemplo más sencillo; asumimos —con lo que favorecemos a nuestros contradictores— que se nos dan ciertos límites superior e inferior de sus valores, *s* e *i*, respectivamente, los cuales son finitos y lógicamente necesarios; y suponemos también que se nos da una función de distribución de la probabilidad lógica de esta propiedad, por ejemplo, una función de equidistribución generalizada entre *s* e *i*. Podemos descubrir que un cambio en nuestras teorías que sea conveniente desde el punto de vista empírico lleve a una corrección no lineal de la *medida* de la propiedad física mentada (basada, digamos, en el metro de París); entonces, la «probabilidad lógica» ha de corregirse también, lo cual hace ver que su métrica depende de nuestros conocimientos em-

*[1] Véase, más adelante, la «Tercera nota».

píricos, y que no puede definirse *a priori,* en términos puramente lógicos. Dicho de otro modo: la métrica de la «probabilidad lógica» de una propiedad mensurable dependerá de esta misma propiedad; y como ésta se encuentra sujeta a correcciones basadas en teorías empíricas, no puede haber una medida de la probabilidad que sea puramente «lógica».

Es posible superar en gran parte estas dificultades —pero no completamente— haciendo uso de nuestros «conocimientos previos», *z*; mas aquéllas demuestran, según me parece, la importancia que tiene la manera topológica de abordar tanto el problema del grado de confirmación como el de la probabilidad lógica *[2].

Pero aun en caso de que vayamos a dejar a un lado todas las consideraciones métricas, creo que hemos de seguir aceptando el concepto de probabilidad que está definido implícitamente por los sistemas axiomáticos corrientes para la probabilidad. Estos sistemas conservan toda su significación, exactamente del mismo modo que la conserva la geometría métrica pura aun cuando seamos incapaces de definir una regla graduada a base de tal geometría. Lo cual tiene una importancia especial teniendo en cuenta la necesidad de *identificar la independencia lógica con la probabilística* (teorema especial de multiplicación): si asumimos un lenguaje tal como el de Kemeny (que, sin embargo, falla para propiedades continuas) o uno que tenga enunciados *relativamente atómicos* (como el que he señalado en el apéndice I de mi *Lógica de la investigación científica),* habremos de postular la independencia de las cláusulas atómicas o relativamente atómicas (naturalmente, con tal de que no sean «lógicamente dependientes» en el sentido de Kemeny); y *si nos apoyamos en una teoría probabilística de la inducción,* resulta entonces que *no podemos aprender* en caso de que identifiquemos las independencias lógica y probabilística del modo que hemos indicado. Mas en el sentido de mis funciones C *podemos aprender* perfectamente: esto es, podemos corroborar nuestras teorías.

Mencionemos dos puntos más a este respecto.

4. El primero es éste. Basándonos en mis sistemas axiomáticos para la probabilidad relativa [5], podemos considerar definida $P(x, y)$ para cualesquiera valores de x y de y, incluidos aquéllos para los que

---

*[2] Creo actualmente que he vencido estas dificultades en lo que se refiere a un sistema S (en el sentido del apéndice *IV) cuyos elementos sean *enunciados probabilitarios*, es decir, en cuanto a la métrica lógica de la *probabilidad de enunciados probabilitarios,* o —dicho de otro modo— a la métrica lógica de *probabilidades secundarias.* Y describo el método de tal solución en mi «Tercera nota», puntos 7 y sigs.: véase, en especial, el punto *13.

En lo referente a las propiedades primarias, creo no haber exagerado en modo alguno al describir las dificultades que menciono en el texto (como es natural, *z* puede facilitar las cosas cuando nos señale, o nos haga asumir, que en determinados casos nos enfrentamos con un conjunto finito de posibilidades iguales o simétricas).

[5] En este *Journal* 6, págs. 56 y sig. (véanse también las págs. 176 y 351). En *British Philosophy in the Mid-Century* (ed. por C. A. Mace), pág. 191, y en mi *Lógica de la investigación científica,* apéndice *IV, presentamos otras versiones simplificadas.

$P(y) = 0$; más en particular: en la interpretación lógica del sistema de que se trate, siempre que x se siga de y, $P(x, y) = 1$, incluso cuando $P(y) = 0$. Así pues, no hay razón alguna para dudar de que nuestra definición es válida para lenguajes que contengan tanto enunciados singulares como leyes universales, aunque todas estas últimas tengan probabilidad nula; como ocurre, por ejemplo, si empleamos la función de medida m de Kemeny, postulando que $P(x) = m(x)$. (En el caso de nuestras definiciones de E y C no existe la menor necesidad de partir de una atribución de igual peso a los «modelos»: cf. KEMENY, *op. cit.*, pág. 307; por el contrario, habría que considerar semejante punto de partida como una desviación de la interpretación *lógica*, ya que violaría la igualdad de las independencias lógica y probabilística que hemos exigido más arriba, en 3.)

5. He aquí el segundo punto. Entre los *desiderata* derivados, el que se indica a continuación no se satisface por todas las definiciones de «x está confirmado por y» que se han propuesto por otros autores, y, por ello, puede mencionársele por separado como décimo *desideratum* [6]:

(X) Si x está confirmado —o corroborado, o apoyado— por y, de suerte que $C(x, y) > 0$, entonces: *a)* $\bar{x}$ queda siempre quebrantado por y (es decir, $C(\bar{x}\, y) < 0$, y *b)* x queda siempre quebrantado por $\bar{y}$ (o sea, $C(x, \bar{y}) < 0$).

Me parece claro que este *desideratum* constituye una condición de adecuación indispensable, y que toda definición que se proponga y no lo satisfaga será paradójica desde un punto de vista intuitivo.

Tercera nota sobre grado de corroboración o confirmación

En esta nota quiero hacer diversos comentarios sobre el problema del *peso de los datos* y sobre las *contrastaciones estadísticas.*

1. La teoría de la corroboración —o «confirmación»— propuesta en las dos notas anteriores sobre «grado de confirmación» [1], es capaz de resolver fácilmente el llamado *problema del peso de datos.*

Quien primeramente suscitó este problema fue Peirce; Keynes lo ha discutido con algún detalle (este autor solía hablar de «peso de un argumento» o de «volumen de datos»), y hemos tomado el término «peso de datos» de J. M. Keynes e I. J. Good [2]. Cuando se considera

---

[6] Compárese la observación que hago en este *Journal*, 1954, **5**, fin del primer párrafo de la pág. 144.

[1] En este *Journal*, 1954, **5**, págs. 143, 324 y 359, y 1957, **7**, 350; véanse, asimismo, 1955. **6**, y 1956, **7**, págs. 244 y 249. En cuanto al primer párrafo de la «Segunda nota», es preciso añadir una referencia a un trabajo de R. CARNAP e Y. BAR-HILLEL, «Semantic Information», en este *Journal*, 1953, **4**, págs. 147 y sigs. Además, la primera frase de la nota 1 de la pág. 351 debe decir: «*Op. cit.*, pág. 83», en lugar de como lo hace actualmente, ya que me refiero a la tesis del doctor Hamblin. *(Esta última corrección se ha introducido en la versión que reproducimos en este libro.)

[2] Cf. C. S. PEIRCE, *Collected Papers*, 1932, t. II, pág. 421 (publicado por primera vez en 1878); J. M. KEYNES, *A Treatise on Probability*, 1921, págs. 71 a 78

el «peso de datos» dentro de la teoría subjetiva de la probabilidad se ve uno conducido a determinadas paradojas, que, en mi opinión, no se pueden resolver dentro del marco de dicha teoría.

2. Cuando hablo de teoría subjetiva de la probabilidad —o de la interpretación subjetiva del cálculo de probabilidades— me refiero a una teoría que interpreta la probabilidad como una medida de nuestra ignorancia, de nuestro conocimiento parcial o —digamos— del grado de racionalidad de nuestras creencias a la vista de los datos de que disponemos.

(Quizá sea oportuno indicar, entre paréntesis, que el término más corriente de «grado de creencia racional» puede ser síntoma de una ligera confusión, ya que lo que se pretende decir es «grado de racionalidad de una creencia». La confusión surge del modo siguiente: en *primer lugar*, se explica la probabilidad como una medida de la fuerza o intensidad de una creencia o convicción —medible, por ejemplo, por lo dispuestos que estemos a arrostrar los riesgos inherentes a una apuesta—; luego se cae en la cuenta de que, en realidad, la intensidad de nuestra creencia depende a menudo más de nuestros deseos o nuestros temores que de argumentos racionales: y, de este modo, en virtud de una leve modificación, se interpreta luego la probabilidad como la intensidad —o el grado— de una creencia *en la medida en que es justificable racionalmente;* pero, una vez en esta etapa, es patente que la referencia a la intensidad de una creencia —o a su grado— es superflua, de modo que debería remplazarse «grado de creencia» por «grado de racionalidad de una creencia». No deben tomarse estas observaciones como si quisieran decir que estoy dispuesto a aceptar *cualquier* forma de la interpretación subjetiva: véase, más adelante, el punto 12, así como el capítulo *II de mi *Postscript: After Twenty Years.)*

3. En aras de la concisión explicaré el problema del peso de los datos dando simplemente un ejemplo de las paradojas a que antes he aludido: ejemplo que puede llamarse la «*paradoja de los datos ideales*».

Sea z una moneda determinada, y sea a el enunciado «la tirada n-ésima (hasta el momento no observada) de z saldrá caras». En la teoría subjetiva puede suponerse que la probabilidad absoluta (o previa) del enunciado a es igual a 1/2, es decir, que

$$\text{(1)} \qquad P(a) = 1/2$$

Sean ahora d unos *datos estadísticos*, esto es, un *informe estadístico* basado en la observación de miles —o quizá millones— de tiradas de z; y admitamos que estos datos d sean *idealmente favorables* a la hipótesis de que z sea estrictamente simétrica —o sea, una «bue-

(véanse también las págs. 321 y sigs., «el volumen de datos», y el *Indice)*, e I. J. Good, *Probability and the Weight of Evidence*, 1950, págs. 62 y sig. Véanse también C. I. Lewis, *An Analysis of Knowlegde and Valuation*, 1946, págs. 292 y sig., y R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, 1950, págs. 554 y sigs.

na» moneda, con equidistribución—. (Adviértase que d no consiste en un informe completo y en detalle sobre los resultados de cada una de las tiradas —informe que podemos suponer que se ha perdido—, sino únicamente en un *resumen estadístico* de él: por ejemplo, d puede ser el siguiente enunciado, «entre un millón de tiradas de z observadas, han aparecido caras en 500.000 ± 20 casos». Teniendo en cuenta el punto 8, que se encuentra un poco más adelante, puede verse que unos datos d' con 500.000 ± 1.350 casos sería también ideal si se adoptan mis funciones C y E: y, en realidad, d es ideal precisamente porque entraña d'.) No tenemos ahora otra opción para $P(a, d)$ que suponer que

(2) $$P(a, d) = 1/2$$

Esto quiere decir que la probabilidad de sacar caras no se altera a la vista de los datos d: pues ahora tenemos:

(3) $$P(a) = P(a, d).$$

Pero esta fórmula ha de interpretarse como la afirmación de que, en conjunto, d es una información (absolutamente) *intrascendente* con respecto a a.

Ahora bien; esto es un poco sorprendente: pues quiere decir —expresándolo de un modo más explícito— que el llamado «*grado de creencia racional*» *en la hipótesis* a *no tendría que resultar afectado en modo alguno por el conocimiento proporcionado por los datos,* d, *que hemos acumulado:* que la ausencia de todo dato estadístico referente a z justifica precisamente el mismo «grado de creencia racional» que el peso de los datos suministrados por millones de observaciones que, *prima facie,* apoyan o confirman nuestra creencia.

4. A mi entender, esta paradoja no puede resolverse dentro del marco de la teoría subjetiva, y ello por la siguiente razón.

El *postulado fundamental de la teoría subjetiva* es el de que los grados de racionalidad de una creencia a la vista de unos datos se encuentran incluidos en un *orden lineal:* que pueden medirse sobre una escala unidimensional, como ocurre con los grados de temperatura. Pero todos los intentos de resolver el problema del peso de los datos dentro del marco de la teoría subjetiva, desde Peirce a Good, han procedido a introducir, además de la probabilidad, *otra medida de la racionalidad de una creencia a la vista de unos datos.* Carece totalmente de importancia el que llamemos a la nueva medida «otra dimensión de la probabilidad» o «peso de datos»; lo único que sí tiene importancia es la admisión implícita de que no cabe atribuir un orden lineal a los grados de racionalidad de las creencias a la vista de los datos, de que puede haber *más de una manera en que los datos afecten a la racionalidad de una creencia.* Y dicha admisión basta para echar abajo el postulado fundamental en que se basa la teoría subjetiva.

Así pues, la creencia ingenua en que existen realmente tipos de entidades intrínsecamente diferentes —tales que a uno se le llamaría quizá «grado de racionalidad de una creencia» y a otro «grado de confianza» o de «apoyo por los datos»— es tan incapaz de rescatar la teoría subjetiva como lo es la creencia igualmente ingenua en que estas diversas medidas «explican» diferentes «*explicanda*»: pues la pretensión de que exista en este caso un «*explicandum*» —así, el «grado de creencia racional»— susceptible de «explicación» en términos probabilitarios, ha de correr necesariamente la misma suerte que lo que he llamado «postulado fundamental».

5. Todas estas dificultades desaparecen en cuanto interpretamos *objetivamente* las probabilidades (en el contexto del presente trabajo es indiferente que la interpretación objetiva sea *puramente* estadística o una interpretación de propensiones[3]). De acuerdo con esta interpretación hemos de introducir b, o sea, el enunciado de las condiciones del experimento (estas condiciones definen la sucesión de experimentos de la que sacamos nuestro ejemplo); por ejemplo, b podría ser la información: «la tirada en cuestión será una tirada de z, que aleatorizaremos haciendo girar la moneda». Y, además, tenemos que introducir la hipótesis probabilística *objetiva* h, es decir, la hipótesis «$P(a, b) = 1/2$»[4].

Desde el punto de vista de la teoría objetiva, lo que más nos interesa es la hipótesis h, esto es, el enunciado

$$«P(a, b) = 1/2».$$

6. Si atendemos ahora a los datos estadísticos idealmente favorables, d, que condujeron a la «paradoja de los datos ideales», es evidente que —desde el punto de vista de la teoría objetiva— ha de considerarse d como los datos que importan para h (en lugar de importar para a): son idealmente favorables para h, pero enteramente neutros para a. En el supuesto de que las diversas tiradas sean *independientes* —o *aleatorias*— la teoría objetiva nos lleva de un modo completamente natural a $P(a, bd) = P(a, b)$: así pues, es cierto que d es intrascendente para a (en presencia de b).

Puesto que d son datos favorables a h, nuestro problema se convierte, naturalmente, en la cuestión acerca de cómo los datos d corroboran (o «confirman») h: la respuesta es que si d son los datos idealmente favorables, tanto $E(h, d)$ como $C(h, d)$ —esto es, el grado de corroboración de h dado d— se acercarán a la unidad, con tal

---

[3] Para la «interpretación de propensiones» de la probabilidad, véanse mis trabajos «Three Views Concerning Human Knowledge», «Philosophy of Science: A Personal Report» y «The Propensity Interpretation of Probability and the Quantum Theory», publicados, respectivamente, en *Contemporary British Philosophy*, ed. por H. D. Lewis; en *British Philosophy in the Mid-Century*, ed. por C. A. Mace, y en *Proceedings of the Ninth Symposion of the Colston Research Society*, 1957 *(The Colston Papers*, 9), ed. por S. Körner.

[4] Obsérvese que también es posible interpretar «b» de otro modo: no como nombre de un enunciado, sino como nombre de una sucesión de tiradas (en cuyo caso tendríamos que interpretar «a» como nombre de una clase de eventos en lugar de como nombre de un enunciado); pero, en cualquier caso, «h» continúa siendo el nombre de un enunciado.

de que el tamaño de la muestra en que se basa d tienda a infinito [5]. Vemos que los datos ideales dan lugar a un comportamiento ideal correspondiente en E y C; en consecuencia, no surge paradoja alguna, y podemos medir de forma muy natural *el peso de los datos* d *con respecto a la hipótesis* h, bien por $E(h, d)$, bien por $C(h, d)$, o también —para mantenernos más ceñidos a la idea de Keynes— por los valores absolutos de una cualquiera de estas funciones.

7. Si —como ocurre en nuestro caso— h es una hipótesis estadística y d el informe de los resultados de las contrastaciones estadísticas de h, entonces $C(h, d)$ es una medida del grado en que tales contrastaciones corroboran h, exactamente lo mismo que cuando se trata de una hipótesis no estadística.

Es conveniente mencionar, sin embargo, que, frente a lo que ocurre con una hipótesis del último tipo mencionado, en ocasiones puede ser sumamente fácil estimar los valores numéricos de $E(h, d)$ —e incluso de $C(h, d)$— si h es una hipótesis estadística [6] (indicaré brevemente en 8 cómo pueden llevarse a cabo los cálculos numéricos correspondientes, incluyendo, desde luego, el caso de $h =$ «$p(a, b) = 1$»).

La expresión

$$P(d, h) - P(d) \tag{4}$$

es crucial para las funciones $E(h, d)$ y $C(h, d)$: en realidad, estas funciones no son sino dos maneras diferentes de «normalizar» aquella expresión, y crecen o decrecen juntamente con (4). Esto quiere decir que para encontrar un *buen* enunciado de contraste (uno que en caso de ser verdadero sea sumamente favorable a h), hemos de construir un informe estadístico d tal que: I) d haga grande —esto es, casi igual a 1— a $P(d, h)$ (que es la «verosimilitud» de Fisher de h dado d), y II) d haga pequeña —muy próxima a 0— a $P(d)$. Una vez construido un enunciado de contraste, d, de este tipo, hemos de someter el mismo d a contrastaciones empíricas (es decir, hemos de *intentar* encontrar datos que nos refuten d).

Sea ahora h el enunciado

$$«P(a, b) = r» \tag{5}$$

---

[5] He definido E y C en mi primera nota. Basta recordar ahora que $E(h, d) = (P(d, h) - P(d))/(P(d, h) + P(d))$ y que C está muy cercano a E en la mayoría de los casos importantes. En este *Journal*, 1954, **5**, pág. 324, he propuesto que definamos

$$C(x, y, z) = (P(y, xz) - P(y, z))/(P(y, xz) - P(xy, z) + P(y, z)).$$

A partir de esta fórmula obtenemos $C(x, y)$ al suponer que z (los «conocimientos previos») es tautológico.

[6] Es muy fácil que en los casos calculables numéricamente las funciones logarítmicas propuestas por Hamblin y Good (véase mi «Segunda nota») resulten más ventajosos que las funciones que yo había propuesto originariamente. Debe advertirse, además, que, desde un punto de vista numérico (pero no desde el punto de vista teórico que subyace a nuestros *desiderata)*, mis funciones y el «grado de apoyo fáctico» de Kemeny y Oppenheim llevarán, en casi todos los casos, a resultados parecidos.

y sea d este otro, «en una muestra que tiene el tamaño n y que satisface la condición b (o, que se ha extraído de un modo aleatorio de la población b) se cumple a en $n(r \pm \delta)$ casos» *[1]. Podemos hacer entonces, especialmente para valores pequeños de δ,

$$(6) \qquad \mathrm{P}(d) \approx 2\delta \text{ *[2]}.$$

Cabe incluso que hagamos $\mathrm{P}(d) = 2\delta$: pues tal cosa querría decir que asignamos probabilidades iguales —y, por tanto, las probabilidades $1/n$— a cada una de las proporciones posibles ($1/n$, $2/n$, ..., n/n) con que puede aparecer una propiedad a en una muestra de tamaño n; y de ello se sigue que habríamos de atribuir la probabilidad $\mathrm{P}(d) = (2d + 1)/n$ a un informe estadístico d que nos comunicase que $m \pm d$ miembros de la población de tamaño n tienen la propiedad a: de modo que haciendo $\delta = (d + 1/2)/n$ obtenemos $\mathrm{P}(d) = 2\delta$. (La equidistribución de que aquí nos ocupamos es la que Laplace asume al deducir su regla de sucesión. Es adecuada para evaluar la probabilidad *absoluta* $\mathrm{P}(d)$ si d es un *informe estadístico acerca de una muestra;* pero no lo es para evaluar la probabilidad relativa, $\mathrm{P}(d, h)$ de dicho informe, cuando está dada la hipótesis h según la cual la muestra es lo que se obtiene mediante un experimento que se repite n veces y cuyos posibles resultados ocurren cada uno de ellos con arreglo a cierta probabilidad: pues, en este caso, la *distribución* que es adecuado asumir es *combinatoria* —esto es, *bernoulliana*— y no *laplaciana.*) A partir de (6) se ve que si queremos que $\mathrm{P}(d)$ sea pequeña hemos de hacer δ pequeña.

Por otra parte, $\mathrm{P}(d, h)$ —la verosimilitud de h— estará próxima a 1, *bien* si δ es relativamente grande (aproximadamente, si $\delta \approx 1/2$), *o* si (en caso de que δ sea pequeña) n —el tamaño de la muestra— es un número bastante elevado. Nos encontramos, por tanto, con que $\mathrm{P}(d, h) - \mathrm{P}(d)$ (y, con ella, nuestras funciones E y C) solamente puede ser grande si δ es pequeña y n grande: o, dicho de otro modo, si d es *un informe estadístico que afirma la existencia de un buen ajuste en una muestra grande.*

Así pues, el enunciado de contraste d será tanto mejor cuanto mayor sea su precisión (que será la inversa de $2\,\delta$) —y, en consecuencia, su refutabilidad o contenido— y cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, n, es decir, el material estadístico que se precisa para contrastar d. Y un enunciado de contraste construido de tal modo podrá ser confrontado con los resultados de observaciones reales.

---

*[1] Suponemos aquí que si el tamaño de la muestra es n, la frecuencia dentro de ella puede determinarse, en el mejor de los casos, con una imprecisión de $\pm 1/2n$, de modo que, en caso de n finito, tenemos $\delta \geqslant 1/2n$ (en muestras grandes, tal cosa conduce sencillamente a $\delta > 0$).

*[2] La fórmula (6) es una consecuencia directa de que el contenido informativo de un enunciado crece con su precisión, de modo que su probabilidad lógica absoluta aumenta con su grado de imprecisión: véanse los apartados 34 a 37. (A ello hay que añadir que, en el caso de una muestra estadística, el grado de imprecisión y la probabilidad poseen el mismo mínimo y el mismo máximo, a saber, 0 y 1.)

Observamos que los datos estadísticos que se vayan acumulando aumentarán —si es que son favorables— E y C. En consecuencia, estas últimas funciones podrán adoptarse como medidas del peso de los datos favorables a h; o bien, será posible considerar que sus valores absolutos miden el peso de datos con respecto a h.

8. Puesto que podemos determinar el valor numérico de $P(d, h)$ valiéndonos del teorema del binomio (o de la integral de Laplace), y, especialmente, puesto que cabe hacer —en virtud de (6)— $P(d)$ igual a 2δ (cuando δ es pequeña), es posible calcular numéricamente $P(d, h) - P(d)$, y, asimismo, E.

Todavía más: podemos calcular, para cualquier valor dado de n, el de $\delta = P(d)/2$ para el cual $P(d, h) - P(d)$ se hace máxima (así, para $n = 1.000.000$, obtenemos $\delta = 0{,}0018$). Análogamente, es factible calcular otro valor de $\delta = P(d)/2$ para el que E se hace máxima (para el mismo n que antes obtendríamos $\delta = 0{,}00135$ y $E(h, d) = 0{,}9946$).

Supongamos una ley universal tal como h = «$P(a, b) = 1$», que haya pasado n contrastaciones rigurosas dando en *todas* ellas el resultado a: obtenemos, en primer lugar, $C(h, d) = E(h, d)$, debido a ser $P(h) = 0$; y luego, al evaluar $P(d)$ por medio de la distribución laplaciana y $d = 0$, llegamos a $C(h, d) = (n - 1)/(n + 1) = 1 - 2/(n + 1)$. Debe recordarse, sin embargo, que las teorías científicas no estadísticas tienen, por regla general, una forma enteramente diferente de la que hemos dado aquí para h; y, además, que si se las obliga a entrar en dicha forma, entonces cualquier ejemplo a (y, por tanto, «los datos» d) se convertirá en algo esencialmente no observable *[3].

9. Teniendo en cuenta todo lo anterior, puede advertirse que el modo de contrastar una hipótesis estadística es deductivo (como ocurre con todas las demás hipótesis): se construye primeramente un enunciado de contraste de tal modo que se siga —o casi se siga— de

---

*[3] Podría hablarse, sin embargo, del grado de corroboración de una teoría *con respecto a un campo de aplicación*, en el sentido de los apéndices I y *VIII: y entonces se podría emplear el método de cálculo que hemos descrito. Pero como en dicho método no se tiene en cuenta la estructura fina del contenido y de la probabilidad, es muy tosco en lo que se refiere a teorías no estadísticas; en estos casos, podríamos adoptar el método comparativo explicado en la nota 7 a pie de página de la «Primera nota» incluida más arriba. Es menester subrayar que cuando se formula una teoría en la forma «$(x)Ax$», nos vemos obligados, en general, a hacer que A sea un predicado muy complejo y no observable (véase también el apéndice *VII, especialmente la nota 1 a pie de página).

Creo que tiene cierto interés decir, en esta ocasión, que el método explicado en el texto nos permite obtener *resultados numéricos* —esto es, grados numéricos de corroboración— en todos los casos considerados tanto por Laplace como por los lógicos modernos que introducen sistemas lingüísticos artificiales (con la vana esperanza de llegar de este modo a una métrica *a priori* para la probabilidad de sus predicados, ya que creen que se necesita tal cosa para obtener resultados numéricos). Y, con todo, yo consigo grados numéricos de corroboración en múltiples casos que van mucho más allá de tales sistemas lingüísticos, ya que los predicados mensurables no crean ningún problema nuevo para nuestro método. (Y es una gran ventaja que no tengamos que introducir una métrica para la probabilidad lógica de ninguno de los «*predicados*» que manejamos: véanse mis críticas en el punto 3 de la «Segunda nota», y también mi segundo prefacio, de 1958.)

la hipótesis, si bien tenga un contenido (o contrastabilidad) elevado; y luego se confronta dicho enunciado con la experiencia.

Es interesante darse cuenta de que si d se elige de tal modo que esté constituido por un informe completo de nuestras observaciones —digamos, un informe completo acerca de una larga sucesión de tiradas: cara, cara, cruz, ..., etc., hasta un total de mil elementos—, entonces no será posible utilizarlo como datos acerca de la hipótesis estadística; pues *cualquier* sucesión real de longitud n tiene la misma probabilidad que cualquier otra (dada h), y, por consiguiente, llegamos al mismo valor para $P(d, h)$, y, por tanto, para E y para C (a saber, $E = C = 0$): lo mismo si d contiene —por ejemplo— *solamente* caras que si contiene exactamente la mitad de caras y la mitad de cruces. Lo cual pone de manifiesto que no podemos emplear como datos a favor o en contra de h la *totalidad* de nuestros conocimientos proporcionados por la observación, sino que hemos de extractar, a partir de ellos precisamente, los enunciados *estadísticos* susceptibles de comparación con los enunciados que, o bien se siguen de h, o bien tienen, al menos, una probabilidad elevada, dada h. Así, pues, si d consiste en los resultados completos de una larga sucesión de tiradas, entonces es completamente inutilizable —*en tal forma*— como enunciado de contraste de una hipótesis estadística; mientras que sería posible emplear un enunciado (lógicamente más débil) acerca de la *frecuencia media* de las caras, extraído de aquel d. Pues una hipótesis probabilística puede explicar únicamente resultados *interpretados estadísticamente*, y, por ello, solamente cabe contrastarla y corroborarla por medio de resúmenes estadísticos; y no, por ejemplo, por «todos los datos de que se dispone», si éstos consisten en un informe completo de observaciones (ni siquiera en caso de que sus diversas interpretaciones estadísticas puedan emplearse como enunciados de contraste irreprochables y de gran peso) *[4].

---

*[4] Este punto tiene un interés considerable en relación con el problema del valor numérico de las probabilidades absolutas que se necesitan para la determinación de $C(x, y)$: es decir, para el problema que hemos tratado en el punto 3 de la «Segunda nota» y también en la presente nota (véase, especialmente, la nota *1 a pie de página). Si tuviéramos que determinar la probabilidad absoluta de «todos los datos de que se dispone» —que consistirían en la conyunción de un gran número de descripciones de observaciones—, tendríamos que saber la probabilidad absoluta (o «amplitud») de cada una de estas descripciones, con objeto de poder formar su producto —y ello en el supuesto (de que nos ocupamos en el apéndice anterior *VII) de una independencia absoluta entre ellas—. Mas para determinar la probabilidad absoluta de un resumen estadístico no tenemos que asumir supuesto alguno ni acerca de la probabilidad absoluta de las descripciones de observaciones ni de su independencia: pues es palmario —incluso sin suponer una distribución laplaciana— que (6) ha de cumplirse para valores pequeños de δ, simplemente porque el *contenido* de d ha de ser siempre una medida de su *precisión* (cf. el apartado 36), y, por tanto, la probabilidad absoluta tiene que estar medida por la *amplitud* de d, que vale 2δ. Por consiguiente, podemos aceptar una distribución laplaciana meramente por ser el supuesto equiprobabilitario más sencillo que nos lleva a (6). A este respecto, mencionaremos que cabe decir de esta distribución que está basada en un *universo de muestras*, en lugar de estarlo en un universo de cosas o de eventos (el universo de muestras que

Por tanto, nuestro análisis hace ver que los métodos estadísticos son esencialmente hipotético-deductivos, y que proceden por eliminación de hipótesis inadecuadas; lo mismo que ocurre con todos los demás métodos de la ciencia.

10. Si δ es muy pequeña, y, por ello, también lo es $P(d)$ —lo cual sólo es posible en caso de muestras de gran tamaño—, tenemos, teniendo en cuenta (6),

$$(7) \qquad P(d, h) \approx P(d, h) - P(d).$$

Por consiguiente, en este caso —y sólo en este caso— será posible aceptar la función de verosimilitud de Fisher como medida adecuada del grado de corroboración. Y, viceversa, podemos interpretar nuestra medida de este grado como *una generalización de la función de verosimilitud de Fisher;* generalización que abarca casos —como aquellos en los que δ es relativamente grande— en que la función referida de Fisher es, sin duda alguna, inadecuada: pues la verosimilitud de h a la vista de los datos estadísticos d no llegaría a alcanzar un valor cercano al máximo, simplemente porque (o, en parte porque) los datos estadísticos de que dispondríamos, d, carecerían de precisión.

Es sumamente insatisfactorio —por no decir paradójico— que los datos estadísticos d basados en 1.000.000 de tiradas y en $\delta = 0{,}00135$, puedan dar numéricamente *la misma verosimilitud* —es decir, $P(d, h) = 0{,}9930$— que proporcionarían los datos d' basados únicamente en 100 tiradas con $\delta = 0{,}135$ [*5] (pero es enteramente satisfactorio encontrar que $E(h, d) = 0{,}9946$, mientras que $E(h, d') = 0{,}7606$).

11. Convendría advertir que la probabilidad lógica absoluta de una ley universal h —esto es, $P(h)$— será, en general, igual a cero en un universo infinito. Por esta razón, $P(d, h)$ —es decir, la verosimilitud de h— se convertirá en una cantidad indefinida en la mayoría de los sistemas probabilitarios, ya que en tales sistemas se define $P(d, h)$ como $P(dh)/P(h) = 0/0$. Necesitamos, por tanto, un cálculo de probabilidades formal que nos proporcione valores definidos para $P(d, h)$ incluso cuando $P(h) = 0$, y que nos dé siempre e inequívocamente $P(d, h) = 1$ en todos los casos en que d se siga (o «casi se siga») de h. He publicado hace algún tiempo un sistema que satisface estos requisitos [7].

---

se elige depende, desde luego, de la hipótesis que ha de contrastarse): precisamente dentro de cualquier universo de muestras en donde un supuesto de equiprobabilidad lleva a una distribución laplaciana (o «rectangular»).

[*5] En muchos casos, la «verosimilitud» de Fisher resulta ser poco satisfactoria intuitivamente. Sea x «la próxima tirada con este dado será un seis»; entonces la verosimilitud de x a la vista de los datos y será 1 (y, por tanto, tendrá el valor máximo) si hacemos que y signifique, por ejemplo, «la próxima tirada será par», «la próxima tirada será un número > 4», o incluso «la próxima tirada será un número mayor que 2». (Los valores de $C(x, y)$ son, al parecer, satisfactorios: son, respectivamente, 3/8, 4/7 y 1/10.)

[7] En este *Journal*, 1955, **6**: véase, especialmente, las págs. 56 y sig. En mis trabajos «Philosophy of Science: A Personal Report» (pág. 191) y «The Propensity

12. Cabe interpretar de un modo adecuado nuestra E(h, d) como medida de la capacidad explicativa de h con respecto a d, aun en el caso en que d no sea un informe acerca de unos intentos auténticos y sinceros de refutar h. Pero únicamente podemos interpretar adecuadamente nuestra C(h, d) como el grado de corroboración de h —o la racionalidad de nuestra creencia en h, a la vista de las contrastaciones— si d consiste en un informe de los resultados de nuestros intentos sinceros de refutar h, y no de nuestros intentos de verificarla.

Según he aludido en la frase inmediatamente anterior, en mi opinión, así como es un error creer que cabe interpretar la probabilidad como medida de la racionalidad de nuestras creencias (interpretación que queda excluida por la paradoja de los datos perfectos), es posible interpretar el grado de corroboración de tal modo [8]. En cuanto al cálculo de probabilidades, tiene un gran número de interpretaciones diferentes [9]. Aun cuando el «grado de creencia racional» no se encuentra entre éstas, existe una *interpretación lógica* que considera la probabilidad como una generalización de la deductibilidad; pero esta lógica probabilitaria tiene poco que ver con nuestras estimaciones hipotéticas de riesgos a favor o en contra: pues los enunciados probabilitarios en que expresamos tales estimaciones son siempre evaluaciones hipotéticas de las *posibilidades objetivas* inherentes a la situación del caso, es decir, a las condiciones objetivas de la situación (por ejemplo, al dispositivo experimental que hemos preparado). Dichas estimaciones hipotéticas (que *no son deductibles* de ninguna otra cosa, sino que son fruto de una libre conjetura, aun cuando pueden estar sugeridas por consideraciones de simetría, o por el material estadístico a la vista) pueden ser sometidas, en muchos casos importantes, a contrastaciones estadísticas; nunca son estimaciones de nuestra propia ignorancia, y la opinión contraria es consecuencia —como Poincaré vio tan claramente— de una visión determinista del mundo (posiblemente inconsciente) [10].

Desde este punto de vista, un «jugador racional» trata siempre de estimar los *riesgos objetivos;* los riesgos que está dispuesto a aceptar no representan una medida de su «grado de creencia» (tal como se admite corrientemente), sino que son, más bien, el objeto de su creencia: cree que objetivamente existen tales riesgos, es decir, cree en la hipótesis probabilística h. Si queremos medir desde una posición conductista el grado de su creencia (en tales riesgos o en cualquier otra cosa), tendremos, tal vez, que encontrar qué proporción de su fortu-

Interpretation», etc., a que me he referido en la nota anterior 3 a pie de página, se encontrará una forma simplificada de este sistema axiomático (en el segundo de los dos, pág. 67, nota 3, debe remplazarse «$<$» la última vez que aparece por «$\neq$», y en (B) y (C) debería hacerse punto y aparte después de las segundas flechas). *Véase ahora el apéndice *IV.

[8] Cf. este *Journal*, 1955, 6, 55 (el título del apartado).

[9] Cf. mi nota de *Mind*, 1938, 47, págs. 275 y sig.

[10] Cf. H. Poincaré, *Ciencia y método*, 1914, IV, I (este capítulo se había publicado ya en *La Revue du mois*, 1907, 3, págs. 257-276, y en *The Monist*, 1912, 22, páginas 31-52).

na es capaz de aventurar en una apuesta a la par de que su creencia —su estimación de los riesgos o posibilidades— era exacta (supuesto que sea posible averiguar tal cosa).

En cuanto al grado de corroboración, no es sino una medida del grado en que ha sido contrastada una hipótesis h, y del grado en que ha salido indemne de las contrastaciones. Por tanto, no ha de interpretársela como grado de racionalidad de nuestra creencia en la *verdad* de h, puesto que, en realidad, sabemos que $C(h, d) = 0$ siempre que h sea lógicamente verdadera; sino más bien como medida de la racionalidad de *aceptar* provisionalmente una conjetura problemática, sabiendo que es una *conjetura —si bien una que ha soportado* que se la examine escudriñadoramente.

*13. Los doce puntos precedentes constituían la «Tercera nota», tal como se publicó en el *B. J. P. S.* Podemos añadir dos observaciones más, con objeto de hacer más explícitas algunas de las consideraciones más formales que se encuentran implícitas en esta nota.

El primer problema que me ocupa ahora es, de nuevo, el de la *métrica* de la probabilidad lógica (cf. la Segunda nota, punto 3) y el de sus relaciones con la distinción entre lo que voy a llamar enunciados probabilitarios primarios y secundarios. Mi tesis es que las distribuciones de Laplace y de Bernoulli nos proporcionan una *métrica* —en el nivel secundario.

Podemos operar con un sistema $S_1 = \{a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots\}$ de elementos (en el sentido de nuestro sistema de postulados del apéndice *IV). Estos elementos darán lugar a enunciados probabilitarios de la forma «$p(a, b) = r$», a los que llamaremos «enunciados probabilitarios primarios»; y es posible considerar ahora éstos como elementos de un sistema secundario, $S_2 = \{e, f, g, h, \ldots\}$, en donde «$e$», «$f$», etc., sean los nombres de los enunciados de la forma «$p(a, b) = r$».

Ahora bien, el teorema de Bernoulli nos dice, poco más o menos, lo siguiente: sea h igual a «$p(a, b) = r$»; entonces, si h es verdadera, es sumamente probable que en una sucesión larguísima de repeticiones de las condiciones b, la frecuencia de la aparición de a sea igual a r, o esté muy cercana a este valor. Hagamos que «$\delta_r(a)_n$» denote el enunciado de que a aparecerá con la frecuencia $r + \delta$ en una larga sucesión de repeticiones de un tipo determinado; entonces, el teorema de Bernoulli dice que, dada h (es decir, dado que sea $p(a, b) = r$), la probabilidad de $\delta_r(a)_r$ se acercará a 1 al crecer n (dice también que esta probabilidad se acercará a 0, dado que sea $p(a, b) = s$ y que s se encuentre fuera de $r \pm \delta$: lo cual tiene importancia para la refutación de hipótesis probabilísticas).

Pero esto significa que podemos escribir el teorema de Bernoulli bajo la forma de un enunciado (secundario) de probabilidad *relativa* acerca de elementos g y h de S_2; es decir, que cabe escribirlo del modo siguiente,

$$\lim_{n \to \infty} p(g, h) = 1$$

en donde $g = \delta_r(a)_n$ y h es la información de que $p(a, b) = r$: o sea, que h es un enunciado probabilitario primario y g es un enunciado probabilitario de *frecuencia relativa*.

Estas consideraciones hacen patente que en S_2 hemos de admitir *enunciados frecuenciales* tales como g —esto es, $\delta_r(a)_n$— y suposiciones probabilísticas (o estimaciones probabilísticas hipotéticas) tales como h. Por esta razón, parece pertinente identificar —con vistas a tener un S_2 homogéneo— *todos* los enunciados probabilitarios que forman los elementos de S_2 con *enunciados frecuenciales* (o, dicho de otro modo, asumir cierto tipo de *interpretación frecuencial de la probabilidad* para los enunciados probabilitarios *primarios* e, f, g, h, ..., que constituyen los elementos de S_2). Podemos asumir, al mismo tiempo, la *interpretación lógica de la probabilidad* para los enunciados probabilitarios de la forma

$$P(g, h) = 1$$

es decir, para todos los enunciados probabilitarios *secundarios*, que hacen aseveraciones acerca del grado de probabilidad de los primarios, g y h.

Aun cuando podamos no tener una métrica lógica (o absoluta) de los enunciados probabilitarios primarios —o sea, aunque posiblemente no tengamos idea de los valores de $p(a)$ ni de $p(b)$— cabe que tengamos una métrica lógica o absoluta de los secundarios: pues nos la proporciona la distribución laplaciana, según la cual, $P(g)$ —la probabilidad absoluta de g, es decir, de $\delta_r(a)_n$— es igual a 2δ, ya sea g una hipótesis o esté observada empíricamente; con lo cual, la hipótesis probabilística típica h recibe el valor $P(h) = 0$, ya que h tiene la forma «$p(a, b) = r$» con $\delta = 0$. Dado que los métodos de Bernoulli nos permiten calcular el valor de la probabilidad relativa $P(g, h)$ por medio de un puro análisis matemático, podemos considerar que las probabilidades relativas $P(g, h)$ están determinadas análogamente por razones puramente lógicas. Por consiguiente, parece enteramente oportuno adoptar para el nivel secundario la interpretación lógica del cálculo de probabilidades formal.

Resumiendo: Es posible considerar que los métodos de Bernoulli y de Laplace están encaminados a estatuir una métrica puramente lógica de las probabilidades en el nivel secundario, independientemente de que exista o no una métrica de dicha índole en el nivel primario. Los métodos bernoullianos determinan, por tanto, la métrica lógica de las probabilidades relativas (en términos generales, verosimilitud secundaria de hipótesis primarias), y los de Laplace la métrica lógica de las probabilidades absolutas (en general, de los informes estadísticos acerca de muestras).

Los esfuerzos de estos autores se dirigían, en gran medida, sin duda alguna, a establecer una teoría probabilística de la inducción: es cierto que tendían a identificar C con p. No necesito decir que creo que se equivocaban en ello: las teorías estadísticas, como cualesquiera otras, son hipotético-deductivas, y se las somete a contraste —como a todas las demás hipótesis— intentando falsarlas, es decir, intentando reducir su verosimilitud secundaria a cero (o casi a cero); su «grado de corroboración», C, tiene interés únicamente si constituye el resultado de tales contrastaciones: pues no hay nada más fácil que escoger datos estadísticos que sean *favorables* a una hipótesis estadística, si es que queremos hacer tal cosa.

*14. Podría preguntarse si, después de todo, no he cambiado mi credo inadvertidamente. Pues quizá parezca que nada nos impide llamar a $C(h, d)$ «la probabilidad inductiva de h, dado d», o —si se considera engañosa ésta expresión, teniendo en cuenta que C no obedece a las leyes del cálculo de probabilidades— «el grado de racionalidad de nuestra creencia en h, dado d». Algún crítico inductivista benévolo podría, tal vez, congratularse conmigo por haber resuelto el inmemorial problema de la inducción *en un sentido positivo*, gracias a mi función C: por haber demostrado, finalmente, con esta función la validez del razonamiento inductivo.

Yo contestaría como sigue. No me opongo a que se designe $C(h, d)$ con un nombre cualquiera, adecuado o inadecuado: soy completamente indiferente a la terminología, con tal de que no nos extravíe; ni tampoco objeto nada —siempre que ello no nos extravíe— a que se amplíe el significado de «inducción» (ya sea inadvertidamente o de otra manera). Pero he de insistir en que sólo puede interpretarse $C(h, d)$ como grado de corroboración si d es *un informe acerca de contrastaciones exigentes que hayamos sido capaces de idear;* éste es el punto que marca la diferencia entre la actitud del inductivista —o del verificacionista— y la mía propia. El inductivista o verificacionista quiere una *afirmación* de hipótesis; espera hacerla *más firme* en virtud de los datos d, y busca la «*firmeza*» —o sea, la «*confirmación*»—. En el mejor de los casos, puede darse cuenta de que no hemos de ser parciales en la elección de d, de que no debemos hacer caso omiso de los casos desfavorables, y de que d ha de comprender informes acerca de *todos* los conocimientos procedentes de la observación de que disponemos, ya sean favorables o adversos. (Adviértase que el requisito inductivista de que d tiene que abarcar la *totalidad* de nuestros conocimientos de observación no puede ser representado por medio de ningún formalismo: es un requisito no formal, una condición de adecuación que ha de satisfacerse para que estemos dispuestos a *interpretar* $p(h, d)$ como *grado de nuestro imperfecto conocimiento* de h.)

Frente por frente a la actitud inductivista, yo afirmo que no debe interpretarse $C(h, d)$ como grado de corroboración de h por d a menos que d presente un informe de *nuestros esfuerzos sinceros para derrocar h.* No es posible formalizar el requisito de sinceridad, como tampoco el requisito inductivista de que d ha de representar la totalidad de nuestros conocimientos proporcionados por la observación; mas si d *no* es un informe acerca de los resultados de los esfuerzos sinceros que hemos mencionado, simplemente nos engañaremos a nosotros mismos si consideramos que podemos interpretar $C(h, d)$ como grado de corroboración, o como alguna otra cosa por el estilo.

Mi benévolo crítico podría replicar que sigue sin ver razón alguna por la que mi función C no pudiera ser considerada como una solución positiva del clásico problema de la inducción: diría que mi contestación sería perfectamente aceptable para el inductivista clásico, visto que no consiste sino en una exposición del llamado «método de inducción eliminadora», método perfectamente conocido por Bacon, Whewell y Mill, y que todavía no han olvidado ni siquiera algunos de los teóricos probabilitarios de la inducción (aunque mi crítico bien podría admitir que estos últimos han sido incapaces de incorporarlo de un modo eficaz en sus teorías).

Mi reacción a esta réplica sería lamentar mi continuo fracaso en mis intentos de explicar el punto principal de mi teoría con claridad suficiente. Pues el único propósito de la eliminación defendida por todos aquellos inductivistas era el de *estatuir lo más firmemente posible la teoría superviviente*, la cual —según pensaban— tenía que ser la *verdadera* (o, tal vez, solamente una *sumamente probable*, ya que podríamos no haber logrado completo éxito en la eliminación de toda teoría a excepción de la verdadera).

Mas, contra esta opinión, no considero que podamos nunca reducir seriamente el número de teorías competidoras por eliminación, ya que dicho número es siempre infinito. Lo que sí hacemos —o deberíamos hacer— es *adherirnos, por el momento, a la más improbable de las teorías supervivientes*, o sea —para expresarlo con mayor precisión— a la que pueda ser contrastada de un modo más exigente. «*Aceptamos*» provisionalmente esta teoría, pero sólo en el sentido de que la elegimos como digna de ser sometida a críticas ulteriores, y a las contrastaciones más duras que podamos idear.

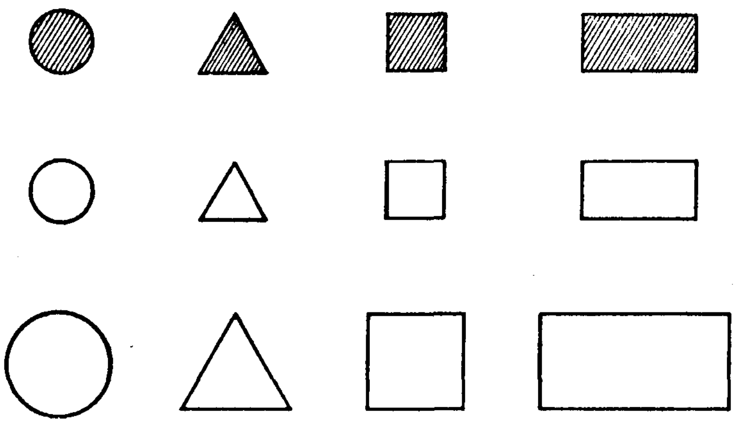
Por el lado positivo quizá estemos autorizados a decir que la teoría sobreviviente es la mejor —y la mejor contrastada— de las que conocemos.

Universales, disposiciones y necesidad natural o física

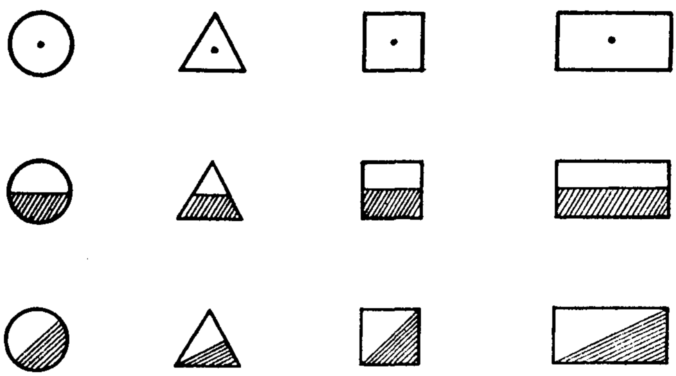
1) La doctrina fundamental que subyace a todas las teorías de la inducción es *la doctrina de la primacía de las repeticiones*, de la cual podemos distinguir dos variantes si recordamos la actitud de Hume. A la primera variante (criticada por Hume) podemos llamarla doctrina de la primacía lógica de las repeticiones: según ella, los ejemplos repetidos proporcionan una especie de *justificación* para que aceptemos una ley universal (la idea de repetición está unida, por regla general, a la de probabilidad). Podemos denominar a la segunda (mantenida por Hume), doctrina de la primacía temporal (y psicológica) de las repeticiones: de acuerdo con ella, éstas, aun cuando no consigan darnos ningún tipo de *justificación* de una ley universal ni de las expectaciones y creencias que ésta entraña, inducen y *suscitan* de hecho en nosotros, sin embargo, tales expectaciones y creencias —por muy poco «justificado» o «racional» que este hecho sea (o estas creencias).

Ambas variantes de semejante doctrina —la más exigente de la primacía lógica de las repeticiones y la más débil de su primacía temporal (o causal, o psicológica)— son insostenibles, como podemos demostrar mediante dos argumentos enteramente diferentes.

He aquí mi primer argumento contra la primacía primero citada. Solamente tenemos experiencia de *repeticiones aproximadas;* y al decir que una repetición es aproximada me refiero a que la repetición B de un suceso A no es idéntica a A, ni indistinguible de ella, sino solamente *más o menos parecida* a A. Pero si la repetición está basada, por consiguiente, en un mero parecido, ha de participar de una de las principales características del parecido: su relatividad. Dos cosas parecidas lo son siempre *en ciertos respectos*, como podemos hacer visible con un sencillo diagrama.



Mirando este diagrama nos encontramos con que algunas de las figuras son parecidas a otras en lo que respecta al sombreado (rayado) o a su ausencia; otras lo son con respecto a la forma, y otras respecto del tamaño. Podríamos ampliar la tabla como sigue:



Puede verse fácilmente que no hay fin en cuanto a los tipos posibles de parecido.

Estos diagramas ponen de manifiesto que las cosas pueden ser parecidas en *diferentes respectos*, y que dos cosas cualesquiera que sean parecidas desde un punto de vista cabe que sean diferentes desde otro. De un modo general, el parecido —y con él la repetición— presupone siempre la adopción de *un punto de vista:* ciertos parecidos o ciertas repeticiones nos sorprenderán si estamos interesados por un problema, y otros si nos preocupa otro problema. Pero si el parecido y la repetición presuponen que se adopta un punto de vista

—o un interés, o una expectación— es lógicamente necesario que los puntos de vista, los intereses o las expectaciones sean previos lógicamente a la repetición: resultado que destruye tanto la doctrina de la primacía lógica de las repeticiones como la de la primacía temporal [1].

Puede añadirse la observación de que, dado un grupo o conjunto finito de cosas —por variadas que las hayamos escogido— podemos siempre, con un poco de ingenio, encontrar puntos de vista tales que si las consideramos desde uno cualquiera de ellos, todas las cosas del conjunto serán parecidas (o parcialmente iguales): lo cual significa que puede decirse de cualquier cosa que es una «repetición» de cualquier otra cosa, con tal de que adoptemos el punto de vista apropiado. Lo cual hace ver hasta qué punto es ingenuo considerar la repetición como algo último o dado. La reflexión que acabamos de hacer se encuentra en estrecha relación con el hecho (mencionado en el apéndice *VII, nota 9; cf. la propiedad B) de que podemos encontrar, para una sucesión *cualquiera* finita de ceros y unos, una regla o «ley» matemática con la que construir una sucesión infinita que comience por la sucesión finita dada.

Paso ahora a mi segundo argumento contra la primacía de las repeticiones, que es el siguiente. Hay leyes y teorías de un carácter enteramente distinto del que tiene «todos los cisnes son blancos», aun cuando puedan formularse de un modo parecido a éste. Paremos mientes en la teoría atómica antigua: es innegable que puede expresarse (en una de sus formas más sencillas) por «todos los cuerpos materiales están compuestos por corpúsculos»; pero es evidente que la forma de «todos...» carece relativamente de importancia en el caso de esta ley. Quiero decir lo siguiente: el problema de mostrar que un solo cuerpo físico —digamos, un trozo de hierro— esté compuesto por átomos o «corpúsculos» es, por lo menos, tan difícil como el de mostrar que *todos* los cisnes son blancos: en ambos casos nuestras aserciones trascienden toda experiencia de observación. Y lo mismo ocurre con casi todas las teorías científicas: no podemos hacer ver directamente, ni siquiera de *un* cuerpo físico, que en ausencia de fuerzas se mueva en línea recta; ni que atraiga y sea atraído (con respecto a otro cuerpo físico) de acuerdo con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. Todas estas leyes describen lo que podríamos llamar *propiedades estructurales del mundo*, y todas trascienden toda posible experiencia; la dificultad inherente a ellas no reside tanto en asentar la universalidad de la ley a partir de casos repetidos, cuanto en asentar que se cumpla en un solo caso.

Muchos inductivistas se han percatado de esta dificultad. La mayoría de los que han caído en la cuenta de ella han intentado, como

[1] En los apartados IV y V de mi trabajo «Philosophy of Science: A Personal Report» (en *British Philosophy in the Mid-Century*, ed. por C. A. Mace, 1957) se encontrarán algunos ejemplos aclaratorios de esta argumentación, en cuanto que dirigida contra la doctrina de la primacía temporal de las repeticiones (esto es, contra Hume).

Berkeley hizo, trazar una distinción tajante entre las puras generalizaciones de observaciones y las teorías más «abstractas» u «ocultas», como la teoría corpuscular o la de Newton; y, por regla general, han tratado de resolver el problema —como trató Berkeley— diciendo que las teorías abstractas no son auténticas aserciones acerca del mundo, sino que no son *nada más que instrumentos:* instrumentos para la predicción de fenómenos observables. He llamado «*instrumentalismo*» a esta tesis, y la he sometido a crítica en otro lugar [2]; aquí diré solamente que rechazo el instrumentalismo, y daré no más que una razón de esta repulsa: la de que no resuelve el problema de las propiedades «abstractas», «ocultas» o «estructurales». Pues dichas propiedades no sólo aparecen en las teorías «abstractas» en que piensan Berkeley y sus sucesores: se las menciona constantemente, por todo el mundo, y en el lenguaje cotidiano; casi todos los enunciados que hacemos trascienden la experiencia; no existe una frontera neta entre un «lenguaje empírico» y un «lenguaje teórico»: *teorizamos constantemente,* incluso cuando hacemos el enunciado singular más trivial que pueda haber. Y con esta observación hemos llegado al problema principal que pretendo examinar en este apéndice.

2) Es innegable que si decimos «todos los cisnes son blancos», entonces la blancura que predicamos es una propiedad observable; y en la misma medida podemos decir que un enunciado singular tal como «este cisne es blanco» está basado en la observación. Y, con todo, trasciende la experiencia: no debido a la palabra «blanco», sino a la de «cisne»; pues al llamar «cisne» a algo le atribuimos propiedades que van mucho más allá de la mera observación —casi tan lejos como si afirmáramos que está compuesto de «corpúsculos».

Así pues, no solamente las teorías explicativas más abstractas trascienden la experiencia, sino que también lo hacen los enunciados singulares más corrientes: pues incluso éstos son siempre *interpretaciones de «los hechos» a la luz de unas teorías* (y lo mismo ocurre hasta con «los hechos» del caso: contienen *universales,* y los universales entrañan siempre un comportamiento *legal).*

Al final del apartado 25 he explicado sucintamente de qué modo cuando se utilizan universales como «vaso» o «agua» en un enunciado tal como «aquí hay un vaso de agua», necesariamente se trasciende la experiencia. Se debe al hecho de que las palabras como «vaso» o «agua» se usan para caracterizar el *comportamiento legal* de determinadas cosas, lo cual puede expresarse llamándoles «palabras de disposiciones». Ahora bien; puesto que toda ley trasciende la experiencia —lo cual es simplemente otra manera de decir que no es verificable—, todo predicado que expresa un comportamiento legal la trasciende también; y, por ello, el enunciado «este recipiente contiene agua» es una hipótesis contrastable pero no verificable, y tras-

---

[2] Cf. mis estudios «A note on Berkeley as a Precursor of Mach», en *B. J. P. S.* 4, 1953, y «Three Views Concerning Human Knowledge», en *Contemporary British Philosophy,* III, ed. por H. D. Lewis, 1956. Véanse también los apartados *11 a *15 de mi *Postscript.*

ciende la experiencia [3]. Por esta razón, es imposible «constituir» ningún término verdaderamente universal (como Carnap ha tratado de hacer), es decir, definirlo en términos puramente experimentales o de observación (o «reducirlo» a términos puramente de experiencia o de observación): como *todos los universales corresponden a disposiciones* no es posible reducirlos a la experiencia; hemos de introducirlos como términos indefinidos, a excepción de los que podemos definir a partir de otros universales que no son de experiencia (como ocurre con «agua» si preferimos definirla por «una combinación de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno»).

3) Suele no prestarse atención a que *todos* los universales corresponden a disposiciones, debido al hecho de que pueden hacerlo en grados diversos. Así, «soluble» y «rompible» corresponden, sin duda alguna, a disposiciones en mayor grado que «disuelto» y «roto»; pero, a veces, no nos damos cuenta de que también lo hacen estos últimos términos: un químico no diría que el azúcar o la sal se han *disuelto* en agua si no esperase poder recuperarlos evaporando ésta, de modo que «disuelto» denota un estado de disposición; y en cuanto a «roto», basta considerar de qué modo procedemos *cuando dudamos* acerca de si una cosa está rota o no (cualquier cosa que se nos haya caído, o bien uno de nuestros huesos, por ejemplo): contrastamos el comportamiento de la cosa en cuestión, tratando de averiguar si muestra cierta movilidad indebida; de modo que «roto», lo mismo que «disuelto», describe ciertas disposiciones a comportarse de una manera regular o legal. Análogamente, decimos de una superficie que es roja, o blanca, si tiene la disposición para reflejar la luz roja o blanca, respectivamente, y si tiene, en consecuencia, la disposición a presentar un aspecto rojo o blanco a la luz del día. En general, el carácter de cualquier propiedad universal de corresponder a disposiciones se hace patente si consideramos qué contrastaciones emprendemos cuando dudamos sobre si una propiedad se presenta o no en un caso particular.

Así pues, el intento de distinguir entre predicados de disposiciones y otros que no lo sean está equivocado, lo mismo que le ocurre al de distinguir entre términos (o bien, lenguajes) teóricos y términos (lenguajes) no teóricos, empíricos, de observación, fácticos u ordinarios. Quizá ocurra lo siguiente: se tiende a considerar fáctico u «ordinario» lo que se ha aprendido antes de llegar a determinada edad crítica, y teórico —o, tal vez, «meramente instrumental»— aquello

[3] Como se trata de un enunciado singular, en este caso es menos incorrecto hablar de una simetría entre la no verificabilidad y la no falsabilidad que lo era con los enunciados universales: pues con objeto de falsar aquél hemos de aceptar como verdadero otro enunciado singular, que tampoco será verificable. Pero también aquí hay un residuo de asimetría: pues —con toda generalidad— al asumir la verdad (o la falsedad) de un enunciado de contraste, lo único que podemos demostrar es la *falsedad* del enunciado que sometemos a contraste, no su verdad; y ello por la razón de que este último entraña un número infinito de enunciados de contraste. Véase también el apartado 29 del libro y el *22 del *Postscript*.

de que se oye hablar después. (Al parecer, la edad crítica depende del tipo psicológico.)

4) Las leyes universales trascienden la experiencia, aunque no sea más que por ser universales y trascender, por ello, cualquier número finito de sus ejemplos observables; y los enunciados singulares la trascienden también debido a que los términos universales que aparecen normalmente en ellos entrañan disposiciones a comportarse de una manera legal, de suerte que entrañan leyes universales (o cierto grado inferior de universalidad, por regla general). Según esto, las leyes universales trascienden la experiencia, al menos, de dos modos: debido a su universalidad, y por efecto de la aparición en ellas de términos universales (o de disposiciones); y también lo hacen en grado más elevado si los términos de disposiciones que se encuentran en ellas tienen este carácter en grado más alto o son más abstractos. Hay estratos sucesivos de grados de universalidad cada vez más elevados, y, por tanto, lo mismo de trascendencia. (En el apartado *15 del *Postscript* trato de explicar en qué sentido existen también estratos de lo que podría llamarse «profundidad».)

Naturalmente, las leyes o las teorías científicas no son verificables por causa de dicha trascendencia, y debido a ésta la *contrastabilidad* o *refutabilidad* es lo único que las distingue, en general, de las teorías metafísicas.

Si se pregunta por qué empleamos estas leyes universales trascendentes en lugar de ceñirnos más a la «experiencia», pueden darse dos tipos de respuesta.

a) Porque las necesitamos: es decir, porque no existe tal «pura experiencia», sino solamente la experiencia interpretada a la luz de expectaciones o de teorías que son «trascendentes».

b) Porque un teórico es un hombre que *quiere explicar* las experiencias, y porque toda explicación conlleva la utilización de hipótesis explicativas, que (para ser contrastables independientemente: véase el apartado *15 del *Postscript)* han de trascender lo que esperamos explicar.

La razón encabezada con *a)* es pragmática o instrumentalista, y aunque creo que es verdadera, no considero que sea comparable en importancia a la que he marcado con *b):* pues, aun en caso de que tuviese éxito un programa destinado a eliminar las teorías explicativas para los fines prácticos (digamos, para la predicción), las metas del teórico no resultarían afectadas por ello [4].

---

[4] Carnap —en *Logical Foundations of Probability*, págs. 574 y sig.— asevera que es posible manejarse sin teorías; y, con todo, no existe la menor razón para que el análisis de Carnap, aun cuando fuese defendible por lo demás, pueda transferirse legítimamente de su modelo de lenguaje al «lenguaje de la ciencia» (véase mi prefacio de 1958). En dos artículos muy interesantes, W. Craig ha examinado ciertos programas de reducción (véanse, *Journal of Symb. Logic* **18**, 1953, págs. 30 y sig., y *Philosophical Review* **65**, 1956, págs. 38 y sigs.); puede añadirse lo que sigue a sus propios y excelentes comentarios críticos sobre su método de eliminar ideas «auxiliares» (o «trascendentes»). 1) Este autor logra esencialmente eliminar las teorías explicativas ascendiendo un número infinito de teoremas a la categoría de axiomas (o rem-

5) En muchos lugares de este libro he aseverado que las teorías trascienden la experiencia, en el sentido que aquí indico, a la vez que describía las teorías como enunciados estrictamente universales.

William Kneale ha planteado una crítica sumamente penetrante de la tesis de que es posible expresar de un modo adecuado las teorías —o las leyes de la Naturaleza— por medio de enunciados universales, tales como «todos los planetas se mueven en elipses». He tenido grandes dificultades para entender la crítica de Kneale, e incluso ahora no estoy enteramente seguro de entenderle correctamente; pero confío en que sí lo hago [5].

Creo que la cuestión que señala Kneale puede exponerse del modo siguiente. Aunque los enunciados de leyes naturales *entrañan* enunciados universales, aquéllos son lógicamente más exigentes que los últimos: no solamente aseveran que «todos los planetas se mueven en elipses», sino algo así como «todos los planetas se mueven *necesariamente* en elipses». Kneale llama a un enunciado de esta índole un «principio de necesariedad» [en ingl., *necessitation*], pero a mi entender no logra aclarar enteramente cuál sería la diferencia entre un enunciado universal y un «principio de necesariedad»: habla de que «es menester una formulación más precisa de las nociones de contingencia y de necesidad» [6], pero un poco más adelante leemos, con gran sorpresa: «En realidad, la palabra 'necesidad' es la más innocua de todas con las que tenemos que ocuparnos en esta parte de la filosofía» [7]. Admito, desde luego, que entre estos dos pasajes de Kneale trata de persuadirnos de que «el sentido de esta diferencia —la existente entre contingencia y necesidad— puede comprenderse fácilmente con unos ejemplos» [8]; pero sus ejemplos me dejan perplejo. En el supuesto siempre de que mis esfuerzos por entender a Kneale hayan tenido éxito, he de decir que su teoría positiva de

---

plazando la definición de «teorema» por una nueva definición de «axioma» coextensa con aquélla dentro de los límites del sublenguaje «purificado»); II) desde luego, en la construcción real del sistema purificado está *guiado por nuestro conocimiento de las teorías* que han de eliminarse, y III) el sistema purificado ya no es un sistema explicativo, ni es contrastable —en el sentido de que estos últimos sistemas pueden serlo cuando su contrastabilidad está relacionada esencialmente con su *contenido* informativo y su *profundidad* (podría muy bien decirse que los axiomas del sistema purificado tienen profundidad cero en el sentido del apartado *15 de mi *Postscript*).

[5] Cf. WILLIAM KNEALE, *Probability and Induction*, 1949. Entre las dificultades secundarias que he tenido para entender la crítica de Kneale se encuentra el hecho de que en ciertos lugares bosqueja con gran perfección algunas de mis tesis, mientras que en otros parece no acertar en absoluto con lo que yo quería decir (véase, por ejemplo, más adelante, la nota 17).

[6] *Op. cit.*, pág. 32.

[7] *Op. cit.*, pág. 80.

[8] *Op. cit.*, pág. 32. Una de las dificultades mencionadas es que en ocasiones Kneale parece aceptar la opinión de Leibniz («Una verdad es necesaria cuando su negación implica una contradicción; y cuando no es necesaria, se la llama contingente»: *Die Philosophischen Schriften*, ed. por Gerhardt, 3, pág. 400; véase también 7, págs. 390 y sigs.), mientras que otras veces emplea «necesario», al parecer, en un sentido más amplio.

las leyes naturales es para mí absolutamente inaceptable. Y, con todo, sus críticas me parecen del máximo valor.

6) Voy a explicar ahora, valiéndome de un ejemplo, aquello en que, según creo, consiste esencialmente la crítica de Kneale de la tesis para la cual pueden caracterizarse las leyes de la Naturaleza de un modo *lógicamente suficiente* y, asimismo, *intuitivamente adecuado*, diciendo que son enunciados universales.

Consideremos un animal extinguido, digamos la moa, un ave gigantesca cuyos huesos abundan en algunas ciénagas de Nueva Zelanda (yo mismo he excavado buscándolos). Decidimos utilizar el nombre de «moa» como nombre universal (en lugar de como nombre propio: cf. el apartado 14) de cierta estructura biológica; pero hemos de admitir que es completamente probable —e incluso completamente creíble— que no hayan existido en el universo moas ningunas, ni vayan a existir, excepto las que vivieron en otro tiempo en Nueva Zelanda; y asumamos que esta tesis creíble es exacta.

Supongamos ahora que la estructura biológica del organismo de la moa es de tal índole que un animal de esta especie pueda vivir fácilmente, en condiciones muy favorables, hasta sesenta años o más; y supongamos, además, que las condiciones con que se encontró la moa en Nueva Zelanda distaban mucho de ser ideales (debido, tal vez, a la presencia de cierto virus), de modo que ninguna moa llegó jamás a tener cincuenta años. En este caso, el enunciado estrictamente universal «todas las moas mueren antes de tener cincuenta años» será verdadero: pues, según los supuestos asumidos, no ha habido, hay, ni habrá moa en todo el universo con más de cincuenta años de edad. Pero este enunciado universal no será una ley de la Naturaleza, pues —de acuerdo con las asunciones hechas— sería *posible* que una moa viviese durante más tiempo, y el hecho de que ninguna haya vivido más se debe únicamente a unas condiciones *accidentales o contingentes* (tales como la copresencia de cierto virus).

Este ejemplo pone de manifiesto que puede haber *enunciados estrictamente universales y verdaderos* que tengan un carácter accidental, en lugar del de verdaderas leyes de la Naturaleza; y, en consecuencia, la caracterización de éstas como enunciados estrictamente universales es lógicamente insuficiente e intuitivamente inadecuada.

7) También indica este ejemplo en qué sentido cabe describir las leyes naturales como «principios de necesidad» o «principios de imposibilidad», tal y como Kneale propone. Pues, según nuestras asunciones —que son perfectamente razonables— sería *posible* que una moa alcanzase una edad más elevada de la que realmente ha alcanzado moa alguna, con tal de que se diesen unas condiciones favorables. Pero si existiera una ley natural que limitase la edad de cualquier organismo del tipo moa a cincuenta años, *entonces no sería posible* que moa ninguna viviera más años que éstos. Así pues, las leyes naturales imponen ciertos límites a lo que es posible.

Todo esto me parece aceptable intuitivamente; y, en realidad, cuando he dicho en varios lugares de este libro que las leyes naturales *prohiben* que ocurran determinados eventos, o que tienen el carácter de *prohibiciones*, expresaba la misma idea intuitiva. Pienso también que es enteramente posible, y tal vez incluso conveniente, hablar de «necesidad natural» o de «necesidad física» para describir dicho carácter de las leyes naturales y de sus consecuencias lógicas.

8) Pero, a mi juicio, es un error infravalorar las diferencias existentes entre esta necesidad natural o física y otros tipos de ella, por ejemplo, la necesidad lógica. Poco más o menos, podemos llamar lógicamente necesario aquello que sería válido en cualquier mundo concebible. Ahora bien, aunque es concebible que la ley de Newton de la inversa del cuadrado de la distancia sea una verdadera ley de la Naturaleza en algún mundo, y que en esa medida sea naturalmente necesaria en él, es perfectamente *concebible* un mundo en que no fuese válida.

Kneale ha criticado este argumento señalando que *podemos concebir* que la conjetura de Goldbach (según la cual todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos) sea verdadera, y también que sea falsa, y ello aun cuando muy bien pueda ser demostrable (o refutable) y, por tanto, sea matemáticamente —o lógicamente— necesaria (o imposible). De aquí saca el argumento de que «no ha de tomarse el que podamos concebir lo contradictorio como prueba negativa de la necesidad en las matemáticas»[9]; pero si esto es así, ¿por qué —pregunta— «tendríamos que suponer que nos proporcione una prueba negativa en la ciencia natural»?[10]. Ahora bien, a mi entender esta argumentación se apoya excesivamente en la *palabra* «concebible», y además maneja un sentido de ella que es distinto del que nosotros tenemos en cuenta: una vez que disponemos de una demostración del teorema de Goldbach, podemos decir que dicha demostración estatuye precisamente que es inconcebible un número par (mayor que dos) que no sea la suma de dos primos (en el sentido de que lleva a resultados contradictorios, entre otros, a la aserción de que $0 = 1$, lo cual es «inconcebible»). En otro sentido, $0 = 1$ puede ser perfectamente concebible, y hasta cabe utilizarlo —del mismo modo que cualquier otro enunciado matemáticamente falso— como supuesto para una demostración indirecta. Ciertamente, podemos disponer una demostración indirecta del modo siguiente: «*Concibamos* que *a* sea verdadero; entonces tendríamos que admitir que *b* sea verdadero; pero sabemos que *b* es absurdo, luego es *inconcebible* que *a* sea verdadero». Es evidente que, aunque este empleo de «concebible» e «inconcebible» es un poco vago y ambiguo, nos engañaríamos si pretendiéramos que este modo de razonar tiene que no ser válido, basándonos en que la verdad de *a* no puede ser inconcebible, ya que habíamos empezado precisamente concibiéndola.

Así pues, en lógica y en matemáticas, «inconcebible» es simplemente una palabra para «conducente a una contradicción manifiesta»: cualquier cosa que no nos lleva a una contradicción manifiesta es *lógicamente* posible o «concebible», y cualquier otra que nos lleva es

[9] *Op. cit.*, pág. 80.
[10] *Ibíd.*

lógicamente imposible o «inconcebible». Cuando Kneale dice que el enunciado contradictorio de un teorema puede ser «concebible», emplea esta palabra en otro sentido —que también es irreprochable.

9) Por tanto, una suposición es lógicamente posible si no es contradictoria en sí misma, y físicamente posible si no contradice a las leyes naturales. Estos dos sentidos de «posible» tienen de común lo suficiente para explicar por qué empleamos la misma palabra; pero si ocultamos sus diferencias bajo una uniformidad superficial sólo nos veremos llevados a toscas confusiones.

Cuando se las compara con las tautologías lógicas, las leyes de la Naturaleza tienen un carácter accidental, contingente. Leibniz reconoce tal cosa al enseñar (cf. *Philos. Schriften*, Gerhardt, 7, pág. 390) que el mundo es la obra de Dios, en un sentido parecido a como un soneto, un rondó, una sonata o una fuga son la obra de un artista. Este puede elegir libremente cierta *forma*, con lo cual restringe su libertad por medio de una elección: impone a su creación ciertos principios de imposibilidad, por ejemplo, sobre su ritmo (y, en menor medida, sobre sus palabras, que en comparación con el ritmo pueden parecer contingentes, accidentales: pero esto no quiere decir que su elección de la forma o del ritmo no haya sido también contingente, pues podría haber elegido otros).

Análogamente ocurre con las leyes naturales. Restringen la elección (lógicamente) posible de hechos singulares: son, por tanto, principios de imposibilidad con respecto a éstos, que parecen enormemente contingentes comparados con las leyes naturales. Pero éstas, si bien son necesarias cuando se las compara con los hechos singulares, son contingentes frente a las tautologías lógicas, ya que puede haber *mundos estructuralmente diferentes*, es decir, mundos con leyes naturales diferentes.

Así pues, la necesidad —o imposibilidad— natural es como la necesidad —o imposibilidad— musical: es como la imposibilidad de un compás de cuatro por cuatro en un minué clásico, o la de acabar éste con un intervalo de séptima disminuida o con cualquier otra disonancia. Impone principios *estructurales* sobre el mundo; pero todavía permite una libertad muy grande a los hechos contingentes y singulares, o sea, a las condiciones iniciales.

Si comparamos la situación existente en la música con la de nuestro ejemplo de la moa, podemos decir: no hay ninguna ley musical que prohiba escribir un minué en *sol* sostenido menor, pero, a pesar de ello, es muy posible que no se haya escrito ni se escriba jamás minué alguno en dicha clave tan desusada. Por tanto, podemos decir que las leyes necesarias musicales pueden distinguirse de los enunciados universalmente verdaderos acerca de los hechos históricos de la composición musical.

10) Parece que lo que Kneale propone —si le entiendo correctamente— es la tesis opuesta, o sea, la de que las leyes naturales no son contingentes en ningún sentido; lo cual, para mí, es algo tan equivocado como la tesis que él critica con razón: la de que las leyes de la Naturaleza no son sino enunciados universales verdaderos.

Podría tal vez expresarse en términos religiosos la opinión de Kneale de que las leyes de la Naturaleza son necesarias en el mismo sentido en que lo son las tautologías lógicas, del modo siguiente: Dios puede haberse enfrentado con la elección entre crear un mundo físico o no crearlo, pero una vez que eligió ya no fue libre para escoger la forma —o estructura— del mundo; pues dado que dicha estructura —las regularidades de la Naturaleza descritas por las leyes naturales— es necesariamente lo que es, lo único que ha podido elegir libremente han sido las condiciones iniciales.

Me parece que Descartes sostuvo una tesis muy parecida a ésta. Según él, todas las leyes de la Naturaleza se siguen necesariamente de un solo principio analítico (la definición esencial de «cuerpo»), según el cual «ser un cuerpo» significa lo mismo que «ser extenso»: lo cual viene a implicar dos cuerpos *diferentes* no pueden ocupar la misma extensión o espacio (en realidad, este principio es semejante al ejemplo habitual de Kneale, el de «que nada que sea rojo será también verde» [11]). Pero la teoría física —a partir de Newton— ha conseguido una profundidad de penetración que sobrepasa inmensamente la posición cartesiana gracias a haber ido más allá de estas «verdades de Perogrullo» [en ingl., *truisms*] (como Kneale las llama, acentuando su parecido con las tautologías lógicas [12]).

Considero que la doctrina de que las leyes de la Naturaleza *no son contingentes en ningún sentido* es una forma particularmente extrema de una tesis que he descrito y criticado en otro lugar con el nombre de «esencialismo» [13], ya que entraña la doctrina de la existencia de *explicaciones últimas:* es decir, la existencia de teorías explicativas que a su vez no necesitasen ninguna explicación ulterior ni fuesen capaces de tenerla. Pues si lográsemos reducir todas las leyes de la Naturaleza a verdaderos «principios de necesariedad» —a verdades de Perogrullo como la de que dos cosas esencialmente extensas no pueden ocupar la misma extensión, o la de que nada que sea rojo será también verde—, toda explicación ulterior se haría, al mismo tiempo, innecesaria e imposible.

No encuentro razón para creer que la doctrina de la existencia de explicaciones últimas sea verdadera, y sí muchas para creer que es falsa. Cuanto más sabemos acerca de las teorías —o de las leyes de la Naturaleza— tanto menos nos recuerdan a las verdades de Perogrullo cartesianas, que se explican a sí mismas, o a las definiciones esencialistas. Lo que la ciencia descubre no son perogrulladas; antes bien, parte de la grandeza y de la belleza de la ciencia consiste en que podemos aprender, mediante nuestras propias investigaciones críticas, que el mundo es enteramente diferente de cuanto habíamos ima-

[11] Cf. KNEALE, *op. cit.*, pág. 32; véase, asimismo, por ejemplo, la pág. 80.

[12] *Op. cit.*, pág. 33.

[13] Cf. mi *Poverty of Historicism* [vers. cast., *La miseria del historicismo (T.)*], apartado 10; *The Open Society* [vers. cast., *La sociedad abierta (T.)*], capítulo 3, apartado VI y capítulo 11, «Three Views Concerning Human Knowledge» *(Contemporary British Philosophy*, III, ed. por H. D. Lewis, 1956) y mi *Postscript*, por ejemplo, los apartados *15 y *31.

ginado nunca —hasta que enardecimos la imaginación al quedar refutadas nuestras teorías anteriores—. No parece haber razón alguna para que se ponga fin a este proceso [14].

El apoyo más fuerte en favor de cuanto he dicho proviene de nuestras consideraciones sobre el contenido y la probabilidad lógica (absoluta). Si las leyes de la Naturaleza no son meramente enunciados estrictamente universales, han de tener *mayor fuerza lógica* que los enunciados universales correspondientes, ya que estos últimos tienen que ser deductibles de ellas. Pero, como hemos visto (al final del apéndice *V), podemos definir la *necesidad lógica* de *a* por medio del *definiens.*

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 1$$

Por otra parte, obtenemos para enunciados *a* universales (cf. el mismo apéndice y los *VII y *VIII):

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 0;$$

y lo mismo tiene que ocurrir con cualquier enunciado de mayor fuerza lógica. Según esto, y por su mayor contenido, toda ley de la Naturaleza está todo lo lejos de ser un enunciado lógicamente necesario que puede estarlo un enunciado coherente; y en cuanto a su significación lógica, se encuentra mucho más cerca de un enunciado universal «meramente accidental» que de una verdad lógica de Perogrullo.

11) El fruto de toda esta discusión es que estoy dispuesto a aceptar las críticas de Kneale en la medida en que lo estoy a aceptar la tesis de que existe una categoría de enunciados —las leyes de la Naturaleza— que tienen mayor fuerza lógica que los enunciados universales correspondientes. En mi opinión, esta doctrina es incompatible con cualquier teoría de la inducción, pero causa pocos efectos, o ninguno, en mi propia metodología. Por el contrario, es evidente que será preciso someter a contraste cualquier principio —propuesto o conjeturado— que declare la imposibilidad de determinados eventos: y ello tratando de hacer ver que dichos eventos son posibles. Pero éste es precisamente el procedimiento de contrastar por que yo abogo.

Por tanto, no es necesario cambiar absolutamente nada desde el punto de vista que hemos adoptado —en lo que se refiere a metodología—. El cambio afectará al nivel ontológico, metafísico; y podemos describirlo diciendo que si conjeturamos que *a* es una ley natural, conjeturamos que *a* expresa una *propiedad estructural de nuestro mundo:* propiedad que impide que acontezcan ciertos eventos singulares —lógicamente posibles— o ciertas situaciones de determinado tipo (de parecido modo a como hemos explicado en los apartados 21 a 23 del libro, y, asimismo, en los 79, 83 y 85).

12) Como Tarki ha puesto de manifiesto, es posible explicar la *necesidad lógica* a partir de la universalidad: cabe decir de un

[14] Cf. el *Postscript*, en especial el apartado *15.

enunciado que es lógicamente necesario si y sólo si es deductible (por ejemplo, gracias a una particularización) de una función de enunciados «*universalmente válida*», es decir, de una función de enunciados que *se satisface por todo modelo*[15] (esto quiere decir que es verdadera en todos los mundos posibles).

Considero que podemos explicar por el mismo método lo que queremos decir por *necesidad natural;* pues cabe adoptar la siguiente definición.

Cabe decir que un enunciado es naturalmente —o físicamente— necesario si y sólo si es deductible de (la clausura de) una función de enunciados que se satisfaga en todos los mundos que, a lo más, difieran del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales.

Desde luego, no podemos nunca *saber* si una supuesta ley lo es auténticamente, o si parece serlo pero depende, en realidad, de ciertas condiciones iniciales peculiares existentes en nuestra zona del universo (cf. el apartado 79). Por tanto, no llegaremos jamás a averiguar si un enunciado dado no lógico es de hecho naturalmente necesario: la conjetura de que lo es no deja jamás de serlo (no solamente porque no podemos escudriñar la totalidad de nuestro mundo para asegurarnos de que no exista ningún ejemplo en contra, sino por la razón aún más fuerte de que no nos es posible escudriñar todos los mundos que difieran del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales). Pero aunque la definición que hemos propuesto excluye la posibilidad de obtener un *criterio positivo* de necesidad natural, podemos aplicar en la práctica aplicarla de un modo *negativo:* encontrando condiciones iniciales bajo las que la supuesta ley resulte perder su validez, podemos hacer patente que no era necesaria, o sea, que no es una ley de la Naturaleza. Con lo cual, la definición que hemos propuesto se ajusta perfectamente a nuestra metodología.

Según esta definición, todas las leyes de la Naturaleza, juntamente con todas sus consecuencias lógicas, serían, desde luego, *natural o físicamente necesarias*[16].

Puede advertirse inmediatamente que la definición propuesta se encuentra de perfecto acuerdo con los resultados a que habíamos llegado en nuestra discusión del ejemplo de la moa (cf. los puntos anteriores 6 y 7): precisamente porque pensábamos que las moas podrían vivir un tiempo más largo bajo otras condiciones diferentes —y más favorables— es por lo que nos parecía que un enunciado universal verdadero acerca de su máxima edad real tenía carácter accidental.

13) Introducimos ahora el símbolo «N» como nombre de la clase de los enunciados que son necesariamente verdaderos en el sentido de la necesidad natural o física: esto es, verdaderos cualesquiera que sean las condiciones iniciales.

---

[15] Cf. mi «Note on Tarski's Definition of Truth», en *Mind* 64, 1955, especialmente la pág. 391.

[16] Incidentalmente diré que los enunciados lógicamente necesarios se harán ahora también físicamente necesarios (simplemente porque se siguen de cualquier enunciado); pero, desde luego, esto no hace al caso.

Valiéndonos de «N» podemos definir «$a \underset{N}{\rightarrow} b$» (o, expresado lingüísticamente, «si a, entonces necesariamente b») por la siguiente definición, bastante obvia:

(D) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ es verdadero si y solamente si $a \rightarrow b \in N$;

que quizá pueda formularse del modo siguiente: «si a, entonces necesariamente b» es válido si y solamente si «si a entonces b» es necesariamente verdadero. Aquí «$a \rightarrow b$» es, desde luego, el nombre de un condicional corriente, cuyo antecedente sea a y cuyo consecuente sea b; si hubiéramos tenido la intención de definir el entrañamiento lógico o «implicación estricta» podríamos utilizar también (D), pero interpretando «N», sin embargo, como «lógicamente necesario» (en lugar de como «natural o físicamente necesario»).

En virtud de la definición (D), podemos decir de «$a \underset{N}{\rightarrow} b$» que es el nombre de un enunciado con las siguientes propiedades.

(A) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ no siempre es verdadero si a es falso, frente a lo que ocurre con $a \rightarrow b$.

(B) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ no siempre es verdadero si b es verdadero, frente a lo que sucede con $a \rightarrow b$.

(A′) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ es siempre verdadero si a es imposible —o necesariamente falso—, o si su negación, $\bar{a}$, es necesariamente verdadera —ya se trate de una necesidad lógica o física—. (Cf., más adelante, las páginas 410-11 y la nota 26.)

(B′) $a \underset{N}{\rightarrow} b$ es siempre verdadero si b es necesariamente verdadero (bien por necesidad lógica o física).

En todo lo anterior, a y b pueden ser tanto enunciados como funciones de enunciados.

Podemos llamar a «$a \underset{N}{\rightarrow} b$» un «condicional necesario» o «condicional nómico»; y expresa, según creo, lo que algunos autores han llamado «condicionales subjuntivos» o «condicionales contrafácticos» (me parece, sin embargo, que otros autores mientan algo diferente con «condicional contrafáctico»: consideran que este nombre implica que a es fácticamente falso[17]; a mi entender no debe recomendarse este empleo).

Basta una ligera reflexión para darse cuenta de que la clase de los enunciados naturalmente necesarios, N, no solamente comprende la clase de todos los enunciados que —del mismo modo que ocurre

[17] En mi «Note on Natural Laws and the so-called Contrary-to-Fact Conditionals» (*Mind* 58, N. S., 1949, págs. 62-66) utilicé el término «condicional subjuntivo» para lo que aquí llamo «condicional necesario» o «nómico»: y he explicado repetidamente que dichos condicionales subjuntivos tienen que ser deductibles de leyes naturales. Por tanto, es difícil de comprender cómo Kneale (*Analysis* 10, 1950, pág. 122) ha podido atribuirme, ni siquiera de un modo provisional, la tesis de que un condicional subjuntivo —o un «condicional contrario a los hechos»— tenga la forma «$\sim\varphi(a).(\varphi(a) \supset \psi(a))$». Me pregunto si Kneale se ha dado cuenta de que esta expresión suya

con las verdaderas leyes universales de la Naturaleza— es posible describir intuitivamente como los que no quedan afectados por cambios de las condiciones iniciales, sino también todos aquellos enunciados que *se siguen* de verdaderas leyes universales de la Naturaleza, o de teorías estructurales verdaderas acerca del mundo. Entre éstos habrá enunciados que describirán un conjunto perfectamente definido de condiciones iniciales: por ejemplo, unos que tengan la forma, «si en este matraz se mezclan hidrógeno y oxígeno a la temperatura ordinaria y a una presión de 1.000 g/cm^2, ..., entonces ...». Si los enunciados condicionales de este tipo son deductibles de verdaderas leyes naturales, entonces su verdad será invariante con respecto a todos los cambios de condiciones iniciales: o bien éstas (que se describen en el antecedente) se satisfarán, y entonces el consecuente será verdadero (y, por tanto, todo el condicional), o bien dichas condiciones (iniciales) expresadas en el antecedente no se satisfarán, y serán, por tanto, fácticamente falsas («contrafácticas»); y, en tal caso, el condicional será verdadero satisfaciéndose de un modo vacío. Así pues, el satisfacerse de un modo vacío —de que se ha discutido tanto— desempeña su propio papel para asegurar que los enunciados deductibles de leyes naturalmente necesarias son también «naturalmente necesarios» en el sentido de nuestra definición.

Es verdad que podríamos haber definido N sencillamente como la clase de las leyes naturales y de sus consecuencias lógicas; pero quizá es algo más ventajoso definirla valiéndose de la idea de condiciones iniciales (o sea, de una clase simultánea de enunciados singulares): por ejemplo, si definimos N como la clase de los enunciados que son verdaderos en todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales, evitamos emplear un modo de expresión subjuntivo (o contrafáctico), tal como «que serían verdaderos incluso si (en nuestro mundo) prevalecieran condiciones iniciales distintas de las que prevalecen realmente».

Con todo, la frase «todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales» contiene implícitamente la idea de leyes de la Naturaleza: lo que queremos decir es «todos los mundos que tienen la misma estructura —o las mismas leyes naturales— que el nuestro». En la medida en que nuestro *definiens* contiene implícitamente la idea de leyes de la Naturaleza puede decirse que (D) adolece de circularidad; pero todas las definiciones tienen que ser circulares *en este sentido*, y precisamente todas las deducciones (frente a las demostraciones[18]) —por ejemplo, todos los silogismos— son circulares: la conclusión tiene que estar contenida en las premisas. Sin embargo, nuestra definición no es circular

era solamente una forma complicada de decir «$\sim\varphi(a)$»; pues, ¿quién podría haber pensado nunca en aseverar que «$\sim\varphi(a)$» es deductible de la ley «$(x)(\varphi(x)\supset\psi(x))$»? *(Añadido en 1959.) Veo ahora que Kneale se percató de tal cosa; lo cual hace todavía más difícil de entender cómo pudo atribuirme semejante tesis.

[18] Me ocupo de la diferencia entre deducción y demostración en mi trabajo «New Foundations of Logic», *Mind* 56, 1947, págs. 193 y sig.

en un sentido más técnico: su *definiens* maneja una idea intuitiva perfectamente clara, la de que varíen las condiciones iniciales de nuestro mundo (idea con la que se encuentra habitualmente cualquier experimentador todos los días); interpreta el resultado de tales cambios como la construcción de una especie de «modelo» de nuestro mundo (modelo o «copia» que no necesita ser fiel en lo que respecta a las condiciones iniciales), e imita luego el conocido sistema de llamar «necesarios» a los enunciados que son verdaderos en (el universo de) *todos* estos modelos (es decir, para todas las condiciones iniciales *lógicamente posibles*).

14) El modo en que he tratado ahora este problema es diferente intuitivamente del de una versión anteriormente publicada [19]. A mi entender, ha habido un perfeccionamiento considerable, y reconozco con gusto que, en gran medida, debo dicho perfeccionamiento a las críticas de Kneale. No obstante tal cosa, desde un punto de vista más técnico (y ya no intuitivo) los cambios son leves. Pues en aquel trabajo yo partía: *a)* de la idea de leyes naturales; *b)* de la idea de los condicionales que *se siguen* de éstas —ahora bien, *a)* y *b)* juntamente tienen la misma extensión que N, como hemos visto—; sugería, además, *c)* que los «condicionales subjuntivos» son los que se siguen de *a)* —esto es, son justamente los de la clase *b)*— y, en el último párrafo, *d)* que tal vez tengamos que introducir la suposición de que todas las condiciones iniciales lógicamente posibles (y, por tanto, todos los eventos y procesos compatibles con las leyes) se realizan en algún lugar y en algún momento del mundo: lo cual es una forma algo tosca de decir poco más o menos lo que digo actualmente apoyándome en la idea de todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en cuanto a condiciones iniciales [20].

En realidad, podría formularse mi posición de 1949 con ayuda del enunciado siguiente: aunque nuestro mundo no comprenda quizá todos los mundos lógicamente posibles, ya que tal vez sean posibles mundos de estructura diferente —o sea, con diferentes leyes—, comprende todos los mundos físicamente posibles, en el sentido de que en él están realizadas —en algún lugar, en algún momento— todas las condiciones iniciales físicamente posibles. Mi tesis actual es que es enteramente obvio que esta suposición metafísica posiblemente sea

[19] Cf. «A Note of Natural Laws and so-called Contrary-to-Fact Conditionals», *Mind* **58**, N. S., 1949, págs. 62-66. Véase también mi *Poverty of Historicism,* 1957 (1.ª ed. de 1945), nota de la pág. 123 [vers. cast. de P. Schwartz, *Miseria del historicismo*, Madrid, Taurus, 1961, pág. 152 *(T.)*].

[20] Llamo «tosca» a mi antigua formulación porque equivale a introducir la suposición de que en algún sitio han vivido o vivirán moas en condiciones ideales: lo cual me parece que es decir un poco demasiado. Prefiero actualmente remplazar dicha suposición por otra: la de que entre todos los «modelos» de nuestro mundo —que no suponemos reales, sino algo así como construcciones lógicas— habrá al menos uno en el que las moas vivan bajo condiciones ideales; lo cual me parece que realmente no sólo es admisible, sino evidente. Aparte de modificaciones terminológicas, éste parece ser el único cambio con respecto a mi postura anterior, reflejada en mi nota de *Mind* de 1949; pero, a mi entender, es un cambio importante.

verdadera —en ambos sentidos de «posible»—, pero que es mucho mejor no cargarnos con ella.

Mas una vez que se adopta la suposición metafísica mencionada, mis tesis antigua y actual se convierten en equivalentes (excepto en cuanto a diferencias puramente terminológicas) en lo que se refiere al *estatuto de las leyes*. De modo que mi antigua tesis es, todo lo más, más «metafísica» (o menos «positivista») que la de ahora, aun cuando no emplea la *palabra* «necesario» al describir dicho estatuto.

15) Para un estudioso de la metodología que se oponga a la doctrina de la inducción y se adhiera a la de la falsación, hay poca diferencia entre la tesis de que las leyes universales no son sino enunciados estrictamente universales y la de que son «necesarios»: en uno y otro caso, sólo podemos someter a contraste nuestras conjeturas intentando refutarlas.

Para el inductivista, en este punto reside una diferencia crucial: tendría que rechazar la idea de leyes «necesarias», ya que éstas, por tener mayor fuerza lógica, serán aún menos accesibles a la inducción que los meros enunciados universales.

Mas los inductivistas, de hecho, no razonan siempre de esta manera: por el contrario, algunos parecen pensar que quizá pueda utilizarse de algún modo, para justificar la inducción, un enunciado que afirme que las leyes de la Naturaleza son necesarias; tal vez algo por el estilo de un «principio de uniformidad de la Naturaleza».

Pero es evidente que ningún principio de esta índole podría justificar jamás la inducción: nunca podría hacer válidas, ni siquiera probables, las conclusiones inductivas.

Es enteramente verdad, desde luego, que podríamos apelar a un enunciado tal como «existen leyes de la Naturaleza» si quisiéramos justificar nuestra búsqueda de tales leyes [21]. Pero en el contexto de la observación que he hecho, «justificar» tiene un sentido muy diferente del que adquiere en el contexto acerca de la cuestión sobre si podemos justificar la inducción. En este último caso, queremos estatuir ciertos enunciados (las generalizaciones inducidas); en el primero, se trata simplemente de justificar una actividad, la búsqueda de leyes. Además, aun cuando esta actividad pueda justificarse —en cierto sentido— por el conocimiento de que existan verdaderas leyes (o sea, de que en el mundo existan regularidades estructurales), podría quedar justificada lo mismo incluso sin tal conocimiento: la esperanza de que haya alimentos en algún sitio «justifica», sin duda, su búsqueda —especialmente si desfallecemos de hambre—, aunque dicha esperanza esté muy lejos de un conocimiento. Así pues, podemos decir

[21] Cf. el *Tractatus* de WITTGENSTEIN, 6.36: «Si existiera una ley de causalidad, diría: 'existen leyes naturales'. Pero es claro que no puede decirse tal cosa, como es evidente». En mi opinión, lo que es evidente —si algo lo es— es que *puede* decirse tal cosa, como es claro: *ha* sido dicha por Wittgenstein, por ejemplo. Y lo que es claro que no puede hacerse es *verificar* el enunciado de que existan leyes naturales (ni siquiera falsarlo). Pero el hecho de que un enunciado no sea verificable (o incluso que no sea falsable) no significa que carezca de sentido, que no pueda ser comprendido o que sea «claro que no puede decirse» como Wittgenstein creía.

que, si bien el conocimiento de que existan verdaderas leyes aumentaría algo la justificación de nuestra búsqueda de ellas, tal indagación está justificada —aun en caso de que nos falte dicho conocimiento— por nuestra curiosidad, o por la mera esperanza de tener éxito.

Todavía más: la distinción entre leyes «necesarias» y enunciados estrictamente universales no parece tener trascendencia para este problema: sean necesarias o no, el conocimiento de que existan leyes aumentaría algo la «justificación» de nuestra búsqueda, sin ser preciso para este tipo de «justificación».

16) Creo, sin embargo, que la idea de que haya leyes necesarias en la Naturaleza, en el sentido de la necesidad natural o física expuesta en el punto 12), tiene importancia metafísica u ontológica, y un gran significado intuitivo en relación con nuestras tentativas de comprender el mundo. Y aunque es imposible estatuir esta idea metafísica ni apoyándose en razones empíricas (pues no es falsable) ni en razones de otra índole, creo que es verdadera, como he indicado en los apartados 79 y 83 a 85. Mas trato actualmente de ir más allá de lo que dije en tales apartados, acentuando el peculiar estatuto ontológico de las leyes universales (por ejemplo, hablando de su «necesidad» o de su «carácter estructural») y subrayando también que el carácter metafísico —o la irrefutabilidad— de la aserción de que las leyes de la Naturaleza existan, no tiene por qué impedirnos discutir discha aserción de un modo racional: esto es, de un modo crítico (véase mi *Postscript*, especialmente los apartados *6, *7, *15 y *120).

Pese a lo cual, considero —en disconformidad con Kneale— que «necesario» es una mera palabra: un marbete útil para distinguir *la universalidad de las leyes* de la universalidad «accidental». Desde luego, cualquier otro marbete valdría lo mismo, pues apenas hay relación alguna con la necesidad lógica; y estoy fundamentalmente de acuerdo con el espíritu de la paráfrasis wittgensteiniana de Hume: «No existe necesidad alguna de que ocurra una cosa por haber ocurrido otra. No hay más necesidad que la necesidad lógica»[22]. $a \underset{N}{\rightarrow} b$ está relacionado con la necesidad lógica de un solo modo: no se encontrará el lazo necesario entre a y b ni en a ni en b, sino en el hecho de que el condicional correspondiente, $a \rightarrow b$ (sin «N»), se sigue con *necesidad lógica* de una ley de la Naturaleza —de que es necesario, relativo a una ley de la Naturaleza[23]—. Y puede decirse que una ley natural es necesaria a su vez por ser lógicamente deductible de una ley de un grado de universalidad aún más elevado, o de mayor «profundidad» —o explicable por ella—. (Véase mi *Postscript*, apartado *15.) Podría suponerse que la conjetura de que exista esta dependencia, lógicamente necesaria, de enunciados verdaderos de mayor universalidad, es lo que ha sugerido inicialmente la idea de la «conexión necesaria» entre causa y efecto[24].

---

[22] Cf. *Tractatus*, 6.3637.

[23] He señalado tal cosa en *Aristotelian Society Supplementary Volume* 22, 1948, páginas 141 a 154, apartado 3; véase, especialmente, la pág. 148. En este trabajo esbocé brevemente un programa que luego he llevado a cabo en gran parte.

[24] Cf. el trabajo citado en la nota precedente.

17) Hasta donde puedo entender las discusiones modernas acerca de «condicionales subjuntivos» (o «condicionales contrarios a los hechos», o «condicionales contrafácticos»), me parece haber surgido principalmente de la situación problemática creada por las dificultades inherentes al inductivismo, al positivismo, al operacionismo o al fenomenismo.

El fenomenista, por ejemplo, quiere traducir los enunciados sobre objetos físicos en enunciados sobre observaciones. Por ejemplo, «hay un tiesto en el alféizar de la ventana» sería traducible por algo así como «si alguien situado en el lugar apropiado mira en la dirección apropiada, verá lo que ha aprendido a llamar tiesto». La objeción más sencilla (pero en modo alguno la más importante) que se puede oponer al segundo enunciado como traducción del primero es señalar que mientras el segundo será verdadero (de un modo vacío) cuando nadie mira el alféizar, sería absurdo decir que siempre que nadie mira a cierto alféizar tiene que haber en él un tiesto; mas el *fenomenista siente la tentación de contestar* que el *argumento* depende de la tabla veritativa del condicional (o de la «implicación material»), y que hemos de percatarnos de la necesidad de interpretar éste de un modo diferente: una interpretación *modal* que tenga en cuenta el hecho de que lo que queremos decir es algo así como «si alguien mira —o si alguien estuviese mirando—, verá —o vería— un tiesto»[25].

Podrá pensarse que nuestro $a \overrightarrow{_N} b$ es capaz de proporcionarnos el condicional modal deseado, y, en cierto modo, así es: en realidad, cumple este papel del mejor modo que es posible cumplirlo. No obstante lo cual, subsiste nuestra objeción primera, porque sabemos que si $\bar{a}$ es necesario —esto es, si $\bar{a} \epsilon$ N— entonces se cumple $a \overrightarrow{_N} b$ para todo b: esto quiere decir que si, por la razón que sea, el sitio en que está situado (o no lo está) un tiesto es tal que es físicamente *imposible* que nadie lo mire, entonces, «si alguien mira —o si alguien estuviese mirando— a dicho *sitio*, verá —o vería— un tiesto» será verdadero, simplemente por no *poder* mirar nadie tal lugar; pero esto significa que la traducción modal fenomenista de «hay un tiesto en el sitio x» será verdadera en todos los sitios en que, por la razón física que sea, nadie *pueda* mirarlo (así pues, hay un tiesto —o cualquier otra cosa que queramos— en el centro del sol). Ahora bien, esto es absurdo.

Por esta razón, y por otras muchas, no creo que haya muchas posibilidades de rescatar el fenomenismo por este método.

En cuanto a la doctrina del operacionismo —que exige que puedan definirse los términos científicos, tales como longitud o solubili-

[25] Fue R. B. Braithwaite quien contestó de un modo análogo al indicado a las objeciones planteadas por mí frente al satisfacer de un modo vacío, que él había expuesto en un trabajo sobre fenomenismo leído en el seminario de la profesora Susan Stebbing, en la primavera de 1936; era la primera vez que yo oía hablar —en un contexto de esa índole— de lo que en el día de hoy se llama "condicional subjuntivo". Para una crítica de los "programas de reducción" del fenomenismo, véase, más arriba, la nota 4 y el texto correspondiente.

dad, a base de un procedimiento experimental apropiado—, puede hacerse ver muy fácilmente que todas las llamadas definiciones operativas adolecerán de circularidad; lo cual haré patente brevemente en el caso de «soluble»[26].

En los experimentos mediante los cuales contrastamos si una substancia, por ejemplo el azúcar, es *soluble en agua*, se llevan a cabo contrastaciones tales como la recuperación del azúcar disuelto a partir de la disolución (digamos, evaporando el agua: cf. el punto anterior 3). Es evidente que es necesario identificar la substancia que se ha recuperado, es decir, averiguar si posee las mismas propiedades que el azúcar, entre las cuales una de ellas es la *solubilidad en agua*. Así, pues, para definir «x es soluble en agua» por medio de una contrastación operativa típica tendríamos que decir, por lo menos, algo análogo a lo siguiente:

«x es *soluble en agua* si y sólo si, *a)* cuando se introduce x en agua (necesariamente), desaparece, y *b)* cuando, una vez que se ha evaporado el agua se recupera (necesariamente) una substancia que, a su vez, es *soluble en agua*».

La razón fundamental de la circularidad de este tipo de definición es muy sencilla: los experimentos no son nunca concluyentes; y han de ser contrastables, a su vez, por medio de experimentos ulteriores.

Al parecer, los operacionistas han creído que, una vez resuelto el problema de los condicionales subjuntivos (de suerte que pudiera evitarse el satisfacerse en vacío el condicional definidor), no se encontrarían con ningún otro obstáculo que estorbase la definición operacional de términos de disposiciones; y todo indica que el gran interés manifestado en el llamado problema de los condicionales subjuntivos (o contrafácticos) se ha debido, principalmente, a dicha creencia. Pero me parece haber mostrado que incluso en caso de haber resuelto el problema de analizar lógicamente los condicionales subjuntivos (o «nómicos»), no podemos abrigar la esperanza de definir operativamente los términos de disposiciones (o términos universales): pues éstos trascienden la experiencia, según he explicado en el presente apéndice en los puntos 1 y 2, y en el apartado 25 del libro.

[26] Este argumento se encuentra en un trabajo de colaboración (enviado en 1955) para el volumen de Carnap de la *Library of Living Philosophers*, editado por P. A. Schilpp —volumen aún no publicado—. En cuanto a la circularidad de la definición operativa de longitud, cabe advertirla teniendo en cuenta los dos hechos siguientes: *a)* la definición operativa de *longitud* exige que se apliquen correcciones de temperatura y *b)* la definición operativa (corriente) de *temperatura* requiere mediciones de *longitud*.

Sobre el uso y abuso de experimentos imaginarios, especialmente en la teoría cuántica

Las críticas que presento en la parte final de este apéndice son de carácter lógico. No trato de refutar ciertos argumentos, algunos de los cuales —según tengo entendido— quizá hace bastante tiempo que han sido dados de lado por sus creadores, sino que intento más bien poner de manifiesto que ciertos *métodos de argumentar* son inadmisibles: métodos que se han empleado durante muchos años en las discusiones acerca de la interpretación de la teoría cuántica, sin que nadie los haya puesto en tela de juicio. Lo que aquí crítico es, fundamentalmente, el *empleo apologético* de experimentos imaginarios, y no ninguna teoría en concreto en cuya defensa se hayan esgrimido tales argumentos [1]. Y menos aún quiero dar lugar a la impresión de que dudo de la utilidad de los experimentos imaginarios.

1) Uno de los experimentos imaginarios más importantes de la historia de la filosofía natural, y uno de los argumentos más sencillos y más ingeniosos de la historia del pensamiento racional acerca de nuestro universo, están contenidos en la crítica de Galileo de la teoría del movimiento aristotélico [2]. Allí se desaprueba la suposición aristotélica de que la velocidad natural de un cuerpo más pesado sea mayor que la de un cuerpo más ligero. «Si tuviésemos dos móviles —argumenta el portavoz de Galileo— de velocidades naturales diferentes, sería de esperar que, uniendo el más tardo con el más veloz, éste sería en parte retardado por el más tardo, y el más tardo en parte acelerado por el más veloz»; así pues, «si esto es así, y es también verdad que una piedra grande se mueve, supongamos, con ocho grados de velocidad, y una menor con cuatro, al unir las dos, el sistema compuesto tendrá que moverse con velocidad menor que ocho grados; sin embargo, las dos piedras unidas hacen una piedra mayor que la

[1] Más en particular, no tengo intención aquí de criticar la teoría cuántica, ni ninguna interpretación determinada de ella.

[2] El mismo Galileo dice con orgullo de su argumentación (poniendo las palabras en boca de Simplicio): «Tu raciocinio se desarrolla admirablemente bien». Cf. *Discorsi intorno a due nuove scienze,* 1638, primera jornada, pág. 109 (pág. 66 del tomo XIII, 1855, de las *Opere Complete;* págs. 62 y 64 de la ed. ingl. de Crew y Salvio, 1914 [página 93 de la vers. cast. por J. SAN ROMÁN VILLASANTE, *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, Buenos Aires, Losada, 1945, traducción verdaderamente óptima que utilizamos en el texto *(T.)*].

primera, que se movía con ocho grados de velocidad; *sin embargo, este compuesto (que es mayor que la primera piedra sola) se moverá más lentamente que la primera piedra sola, que es menor:* lo que está en contra de tu suposición»[3]. Y como se había partido para el razonamiento de dicha suposición de Aristóteles, ésta queda ahora refutada, pues se pone de manifiesto que es absurda.

Encuentro en el experimento imaginario de Galileo un modelo perfecto del empleo mejor de los experimentos imaginarios: se trata del *empleo crítico*. No quiero sugerir, sin embargo, que no haya ningún otro modo de utilizarlos: su uso *heurístico*, en especial, es muy valioso; pero también existen otros usos menos valiosos.

Un ejemplo antiguo de lo que yo llamo empleo heurístico de experimentos imaginarios es el que constituye la base heurística del atomismo. Imaginamos que tomamos un trozo de oro, o de otra substancia, y que lo partimos en trozos cada vez más pequeños «hasta que llegamos a partes tan pequeñas que no pueden subdividirse más»: se trata de un experimento mental que se emplea para explicar los «átomos indivisibles». Los experimentos imaginarios heurísticos han adquirido especial importancia en la termodinámica (ciclo de Carnot), y últimamente se han puesto algo de moda debido a su empleo en las teorías de la relatividad y de los cuantos. Uno de los mejores ejemplos de este tipo es el experimento de Einstein de la elevación acelerada: nos da una imagen de la equivalencia local de la aceleración y la gravedad, y sugiere que los rayos de luz puedan avanzar en un campo gravitatorio a lo largo de trayectorias curvilíneas. Este empleo tiene importancia y es legítimo.

El propósito principal de esta nota es poner en guardia frente a lo que podría llamarse *empleo apologético de los experimentos imaginarios:* el cual proviene, según creo, de las discusiones sobre el comportamiento de metros y de relojes desde el punto de vista de la relatividad especial. Estos experimentos se utilizaron primeramente a modo de ejemplo o con fines de exponer algo claramente, lo cual es perfectamente legítimo; pero más tarde —y también en los debates sobre la teoría cuántica— se han empleado a veces como argumentos, lo mismo con talante crítico como apologético (el microscopio imaginario de Heisenberg —a través del cual podrían observarse electrones— ha desempeñado un importante papel en este proceso: véanse, más adelante, los puntos 9 y 10).

Ahora bien; no cabe duda de que el empleo de experimentos imaginarios en la argumentación crítica es legítimo: pues equivale al intento de poner de manifiesto que el autor de una teoría ha pasado por alto ciertas posibilidades; y es claro que también ha de ser legítimo enfrentarse con tales objeciones críticas mostrando, por ejemplo, que el experimento imaginario propuesto es imposible en principio, y que —al menos en el caso de que se trata— no se había

[3] *Op. cit.*, pág. 107 (1638), pág. 65 (1855), pág. 63 (1914) [pág. 91 (1945) *(T.)*].

dejado de tener en cuenta ninguna posibilidad [4]. Generalmente, puede permitirse un experimento imaginario ideado con espíritu crítico (es decir, con objeto de criticar una teoría haciendo ver que no se habían tomado en consideración ciertas posibilidades), pero ha de guardarse un cuidado extremo al replicarle: cuando para defender dicha teoría se reconstruye el experimento controvertido, tiene una importancia especial *no introducir idealizaciones algunas* ni otras suposiciones especiales, a menos que sean favorables a un contradictor, o a menos que ningún objetante que utilice el experimento imaginario en cuestión tenga que aceptarlas.

2) De un modo más general, considero que el empleo de experimentos imaginarios para fines de argumentación es legítimo solamente si se enuncian con claridad las tesis del que se opone a nuestros argumentos, y si se observa estrictamente la regla de que *las idealizaciones que se hagan han de ser concesiones a nuestro oponente, o al menos aceptables por él.* Por ejemplo, en el caso del ciclo de Carnot todas las idealizaciones introducidas aumentan el rendimiento de la máquina, de modo que el objetante a la teoría —quien afirma que una máquina térmica puede producir trabajo mecánico sin hacer pasar calor de una temperatura más elevada a otra más baja— ha de reconocer que se trata de concesiones. Es evidente que siempre que se infringe esta regla no han de permitirse idealizaciones con fines de argumentación crítica.

3) Puede aplicarse la regla mencionada, por ejemplo, al debate iniciado con el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (experimento que Einstein vuelve a enunciar de un modo sucinto en una carta que reproducimos aquí en el apéndice *XII; y debate sobre el que hago comentarios ulteriores en mi *Postscript*, apartado *109). En su argumentación crítica, Einstein, Podolski y Rosen tratan de emplear idealizaciones aceptables por Bohr —y, en su réplica, este físico no cuestiona la validez de las mismas—: introducen (cf. el apartado *109 citado y el apéndice *XII) dos partículas, A y B, cuya interacción es tal que gracias a medir la posición (o el momento) de B, la teoría nos permite calcular la posición (o el momento) de A, que, mientras tanto, se ha alejado mucho y no puede sufrir perturbaciones procedentes de la medición efectuada sobre B. Así pues, el momento (o la posición) de A no puede hacerse difuso —o «borroso», por emplear un término de Schrödinger—, como quería Heisenberg [5]. En su contestación, Bohr parte de la idea de que sólo

[4] Por ejemplo, Einstein ha hecho ver —en su carta reproducida en el apéndice *XII (véase nota *3 del apartado 77)— que mi propio experimento del apartado 77 es imposible en principio (desde el punto de vista de la teoría cuántica).

[5] Heisenberg pensaba, desde luego, en una sola partícula que se hacía borrosa: la que se sometía a medición. Einstein, Podolski y Rosen ponen de manifiesto que esto ha de extenderse a otra partícula: una que haya sufrido una interacción con el corpúsculo medido en algún momento, quizá años antes. Pero si esto es así, ¿cómo podemos evitar que todo —el mundo entero— se nos vuelva «borroso» por una sola observación? Posiblemente haya que contestar que, debido a la «reducción del paquete de ondas», la observación aniquila la antigua *imagen* del sistema, pero crea simultá-

puede medirse una posición por medio de «algún aparato *fijado rígidamente al soporte que define el marco espacial de referencia*», mientras que habría que medir el momento con una «diafragma» *móvil* cuyo «momento se mida tanto antes como después del paso de la partícula»[6]; y esgrime el argumento de que al elegir uno de estos dos sistemas de referencia «nos separamos de cualquier... posibilidad» de emplear el otro en el sistema físico que estamos investigando. Si le entiendo correctamente, Bohr sugiere que aunque no se interfiere con A, sus coordenadas pueden quedar borrosas debido a haberse hecho borroso el *marco de referencia.*

4) La respuesta de Bohr me parece inaceptable por tres razones distintas, por lo menos.

En primer lugar, la razón que se había dado antes del experimento imaginario propuesto por Einstein, Podolski y Rosen para que se hiciera borrosa la posición —o el momento— de un sistema, era que, al medir esta magnitud, habíamos interferido con el sistema. En mi opinión, Bohr abandona subrepticiamente este argumento y lo reemplaza por otro al decir (con mayor o menor claridad) que la razón de tal cosa es que interferimos con nuestro marco de referencia —o con el sistema de coordenadas— en lugar de hacerlo con el sistema físico. Se trata de una modificación demasiado grande para pasar inadvertida: debería haberse reconocido explícitamente que el experimento imaginario había refutado la posición antes adoptada, y también por qué con tal cosa no se destruye el principio en que aquélla se fundaba.

A este respecto no hemos de olvidar qué es lo que se pretendía hacer ver con el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen: únicamente se intentaba refutar ciertas *interpretaciones* de las fórmulas de *indeterminación*, y en modo alguno se pretendía refutar las fórmulas mismas. En cierto sentido —si bien de un modo no explícito—, la contestación de Bohr reconocía que el experimento imaginario había logrado su propósito, ya que este físico trataba meramente de defender las relaciones de indeterminación como tales, y abandonaba la tesis de que la medición interfiriera con el sistema A, al cual se había supuesto que hacía borroso. Aún más: el argumento de Einstein, Podolski y Rosen puede llevarse un poco más adelante si suponemos que (accidentalmente) medimos la posición de A en el mismo instante en que medimos el momento de B: obtenemos entonces, *para dicho instante*, las posiciones y los momentos tanto de A como de B (hemos de admitir, desde luego, que el momento de A y la posición de B habrán quedado alterados o borrosos en virtud de tales mediciones); y esto basta para demostrar lo que Einstein, Podolski

---

neamente otra nueva; por tanto, la interferencia no es ya con el mundo entero, sino meramente con nuestro modo de representárnoslo. Tenemos un ejemplo ilustrativo de esta situación, como se verá, en la respuesta de Bohr, que viene a continuación en el texto.

[6] Bohr, *Physical Review* **48**, 1935, págs. 696-702. Las citas son de las págs. 699 y 700 (la cursiva es mía).

y Rosen pretendían: que es incorrecto interpretar las fórmulas de indeterminación como si afirmaran que el sistema no puede tener a la vez una posición y un momento netos —aun cuando tengamos que admitir que no podemos *predecir* ambos simultáneamente (para una interpretación que tiene en cuenta todo esto, véase mi *Postscript).*

En segundo término, el argumento que da Bohr de que «nos aislamos» del otro marco de referencia parece ser *ad hoc:* pues, evidentemente, es posible medir el momento espectroscópicamente (ya de un modo directo, ya utilizando el efecto Doppler), y el espectroscopio estará unido rígidamente al mismo marco que el primer «aparato» (el hecho de que el espectroscopio absorba la partícula B carece de importancia para la argumentación acerca de la suerte que ha de sufrir A). Así pues, no podemos aceptar que un dispositivo con un marco de referencia móvil constituya una parte esencial del experimento.

En cuanto a lo tercero, Bohr no explica cómo habría que medir *el momento de B valiéndose de su diafragma móvil; en un trabajo* posterior describe un método de hacerlo, pero me vuelve a parecer inaceptable tal método [7]: pues consiste en medir (dos veces) la *posición* de un «diafragma provisto de una ranura ... colgado por medio de resortes muy suaves de una horquilla rígida» [8]; pero puesto que la medición del momento con un dispositivo de esta clase depende de mediciones de posición, no vale para apoyar los argumentos de Bohr frente a Einstein, Podolski y Rosen; ni sirve tampoco para nada, ya que, de esta forma, no podemos obtener el momento «con *precisión tanto antes como después del paso*» de B [9]: la primera de las mediciones de momento interferirá con el momento del diafragma (ya que utiliza una medición de *posición),* y, por tanto, será solamente retrospectiva, y no tendrá ninguna utilidad para calcular el momento del diafragma en el instante inmediatamente anterior a la interacción con B.

Por consiguiente, no parece que Bohr se haya adherido en su contestación al principio de hacer solamente las idealizaciones o suposiciones especiales que favorezcan a su contradictor (independientemente de que dista mucho de ser claro qué es lo que trataba de impugnar).

5) Esto hace patente que, en relación con experimentos imaginarios de este tipo, existe un grave peligro de llevar el análisis justamente hasta el punto en que es útil para nuestros propios propósitos, y nunca más allá; peligro que sólo podría evitarse si nos adhiriéramos estrictamente a los principios arriba mentados.

Hay tres casos parecidos a los que quiero referirme también, ya que los encuentro muy instructivos.

6) Con objeto de hacer frente a un experimento imaginario crítico de Einstein, basado en su famosa fórmula $E = mc^2$, Bohr ha re-

---

[7] Véase Bohr, en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist,* ed. por P. A. Schilpp, 1949; véase, especialmente, el diagrama de la pág. 220.

[8] *Op. cit.,* pág. 219.

[9] Bohr, *Physical Review* 48, 1935, pág. 699.

currido a argumentos tomados de la teoría gravitatoria einsteiniana (esto es, a la relatividad general) [10]; pero es posible deducir $E = mc^2$ de la relatividad especial, e incluso de razonamientos no relativistas; y, en todo caso, al suponer la fórmula antedicha no asumimos —desde luego— la validez de la teoría de Einstein de la gravitación. Por tanto, si, como sugiere Bohr, hemos de suponer ciertas fórmulas características de esta última teoría para rescatar la compatibilidad de la teoría cuántica (en presencia de $E = mc^2$), ello equivale a la extraña aserción de que la teoría de los cuantos contradice a la teoría gravitatoria de Newton, y, además, a la aserción aún más extraña de que la validez de la teoría einsteiniana de la gravitación (o al menos, las fórmulas características que se emplean, que son parte de la teoría del campo gravitatorio) pueden deducirse de la teoría cuántica. No creo que este resultado agrade mucho ni siquiera a los que estén dispuestos a aceptarlo.

Una vez más tenemos un experimento imaginario que hace suposiciones extravagantes con propósito apologético.

7) La réplica de David Bohm al experimento de Einstein, Podolski y Rosen me parece también sumamente insatisfactoria [11]. Cree que tiene que mostrar cómo la partícula einsteiniana A, que se ha apartado mucho de B y del aparato de medida, se hace, sin embargo, borrosa en su posición (o en su momento) cuando se mide el momento (o la posición) de B: y con este fin trata de hacer ver que A, pese a haberse alejado, sigue sufriendo una interferencia de un modo imposible de predecir. Embarcado en esta empresa, pretende poner de manifiesto que su propia teoría está de acuerdo con la interpretación de Heisenberg de las relaciones de indeterminación. Pero no lo logra: lo cual queda patente si consideramos que las ideas de Einstein, Podolski y Rosen nos permiten, mediante una leve ampliación de su experimento, determinar simultáneamente las posiciones *y* los momentos tanto de A como de B —si bien el resultado de esta determinación sólo tendrá significación *predictiva* para la posición de una de las partículas y el momento de la otra. Pues, según hemos explicado en el punto anterior 4), podemos medir la posición de B, y alguien situado a gran distancia puede medir el momento de A en el mismo instante de un modo accidental, o, en todo caso, antes de que haya posibilidad de que ningún efecto de hacer borroso (procedente de nuestra medición de B) pueda alcanzar A. Pero esto es todo lo que se necesita para mostrar que la tentativa de Bohm de salvar la idea de Heisenberg sobre la interferencia que producimos en A está fuera de lugar.

---

[10] Bohr, en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. por P. A. Schilpp: este caso se discute en las págs. 225-228. El doctor J. Agassi me ha hecho fijarme en que la argumentación no es válida.

[11] Véase D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 1951, págs. 166 y sigs. y 180 y sigs. (véanse, en especial, las págs. 186 y sig.). (Según tengo entendido, Bohm no mantiene ya algunas de las opiniones que expresaba en los *trabajos* que *aquí* critico; pero me parece que, al menos, parte de mi razonamiento puede ser aplicable a sus teorías posteriores.)

La contestación de Bohm a esta objeción está implícita en su aserto de que el efecto de hacer borroso avanza con una velocidad superior a la de la luz, o incluso instantáneamente (cf. la velocidad superior a la de la luz propuesta por Heisenberg, que comentamos en el apartado 76), suposición que ha de apoyarse en otra más: la de que este efecto no podrá emplearse para transmitir señales. Pero, ¿qué *es* lo que ocurre si ambas mediciones se llevan a cabo simultáneamente?; ¿comienza acaso a bailar a la vista de uno la partícula que suponemos se observa a través del microscopio de Heisenberg?; y si lo hace, ¿no se trata de una señal? (Este efecto de hacer borroso, peculiar de Bohm, no forma parte de su formalismo, sino de su interpretación, lo mismo que ocurre con la «reducción del paquete de ondas».)

8) La respuesta de Bohm a otro experimento imaginario crítico propuesto por Einstein (con el que resucitaba las críticas de Pauli a la teoría de la onda piloto de De Broglie) [12], es otro experimento parecido.

Einstein propone que consideremos una «partícula» macroscópica (puede ser una cosa bastante grande, por ejemplo, una bola de billar) que se mueve en ambos sentidos con cierta velocidad constante entre dos paredes paralelas, en las que es reflejada elásticamente; hace ver que este sistema puede representarse en la teoría de Schrödinger por una onda estacionaria, y, además, que la teoría de la onda piloto de De Broglie —o la llamada «interpretación causal de la teoría cuántica» de Bohm— conduce al resultado paradójico (señalado por primera vez por Pauli) de que la velocidad de la partícula (o de la bola de billar) se hace nula: dicho de otro modo, nuestra suposición de partida de que la partícula se mueva con una velocidad arbitrariamente elegida conduce, en esta teoría y cualquiera que sea la velocidad que hayamos elegido, a la conclusión de que la velocidad es cero y de que aquélla no se mueve.

Bohm acepta esta conclusión, y contesta del modo siguiente: «El ejemplo considerado por Einstein —escribe— es el de una partícula que *se mueve libremente* entre dos paredes perfectamente lisas y reflectoras» [13] (no necesitamos entrar en más detalles sobre todo el dispositivo); «ahora bien, en la interpretación causal de la teoría cuántica —esto es, en la interpretación de Bohm— ... la partícula está *en reposo*», sigue escribiendo; y continúa diciendo que si queremos *observar* la partícula, hemos de «disparar» un proceso que hará que la partícula se mueva [14]. Pero este razonamiento acerca de la observación, pese a sus méritos, no nos interesa ya; lo que nos interesa es que la interpretación de Bohm paraliza la partícula en libre movimiento: su argumentación equivale a afirmar que no puede moverse entre las dos paredes mientras no se la observe, pues la suposición de que se *mueva* lleva a Bohm a concluir que está en *reposo* has-

---

[12] Véase A. EINSTEIN, en *Scientific Papers presented to Max Born*, 1935, páginas 33 y sigs., en particular, la pág. 39.

[13] D. BOHM, en el mismo volumen, pág. 13; la cursiva es mía.

[14] *Op. cit.*, pág. 14; véase, asimismo, la segunda nota al pie de dicha página.

ta que una observación la dispare. Bohm se percata de dicho efecto paralizador, pero simplemente no lo estudia; en lugar de tal cosa, pasa a afirmar que aunque la *partícula* no se mueve, nuestras *observaciones* nos la mostrarán moviéndose (que no es la cuestión que se debatía); y, sobre ello, a construir un experimento imaginario completamente nuevo en el que se describe cómo nuestra observación —la señal de radar o el fotón empleado para observar la velocidad de la partícula— podría disparar el movimiento deseado. Pero, en primer lugar, éste no era el problema, repetimos; y, en segundo término, Bohm no consigue explicar cómo el fotón que dispara la partícula podría revelarnos ésta con toda su velocidad propia, y no en un estado de aceleración hasta alcanzarla: pues tal cosa parece exigir que la partícula (que puede ser tan rápida y pesada como queramos) adquiera toda su velocidad y nos revele tenerla durante el tiempo extremadamente corto de su interacción con el fotón que la dispara; y todo ello son suposiciones *ad hoc* que pocos de sus contradictores aceptarán.

Pero podemos desarrollar el experimento imaginario de Einstein manejando dos partículas (o dos bolas de billar), una de las cuales se mueva en uno y otro sentido entre la pared izquierda y el centro de la caja, mientras que la otra se mueva entre la pared derecha y el centro; y que en éste ambas partículas choquen elásticamente entre sí. Este ejemplo nos conduce de nuevo a las ondas estacionarias, y, por tanto, a la desaparición de la velocidad, al mismo tiempo que las críticas de Pauli-Einstein permanecen inalteradas. Pero el efecto de disparo de Bohm se hace aún más precario; pues supongamos que observamos la partícula izquierda lanzando sobre ella un fotón de disparo desde la izquierda: según Bohm, así se romperá el equilibrio de fuerzas que mantenía la partícula en reposo, y ésta comenzará a moverse (es de presumir que de izquierda a derecha); pero aunque hemos disparado solamente la partícula izquierda, la derecha tendrá que comenzar simultáneamente, y en la dirección opuesta. Es pedir demasiado a un físico pretender que asienta a la posibilidad de todos estos procesos —todos ellos asumidos *ad hoc*, con objeto de evitar las consecuencias del argumento de Pauli y de Einstein.

Este último hubiera respondido a Bohm del modo siguiente, según pienso.

En el caso considerado, nuestro sistema físico era una bola grande, macroscópica; nadie ha presentado razón alguna por la que fuese inaplicable en este caso la doctrina clásica, normal, de la medición; y, después de todo, se trata de una doctrina cuyo acuerdo con la experiencia es tan bueno como pueda desearse.

Pero, dejando a un lado la medición, ¿se asevera en serio que simplemente *no puede* existir una bola oscilante (o dos bolas oscilantes según la disposición simétrica descrita) mientras no se la observe? O —lo cual equivale a lo mismo— ¿se afirma seriamente que la suposición de que se mueva —u oscile— mientras no se la observa ha de llevar a la conclusión de que no lo hace? ¿Y qué ocurre si, una vez que nuestra observación ha puesto en movimiento la bola, el sistema deja de sufrir interferencias asimétricas, de suerte que el sistema se convierta de nuevo en estacionario? ¿Se detiene la partícula súbitamente, como había empezado a moverse? ¿Y se transforma su energía en energía de campo?; ¿o es irreversible el proceso?

Incluso si suponemos que pueda responderse de algún modo a todas estas preguntas, en mi opinión bastan para darnos un ejemplo visible de la significación de las críticas de Pauli y de Einstein, y del empleo crítico de experimentos imaginarios, especialmente del experimento de Einstein, Podolski y Rosen. Y, a mi entender, nos ofrecen, asimismo, un buen ejemplo del peligro que entraña la utilización apologética de los experimentos imaginarios.

9) Hasta ahora hemos tratado del problema de las *parejas de partículas*, introducidas en el debate por Einstein, Podolski y Rosen. Ahora me voy a ocupar de algunos de los experimentos *imaginarios*, más antiguos, que manejaban corpúsculos aislados, como el famoso microscopio imaginario de Heisenberg a través del cual podían «observarse» electrones y «medir», ya sus posiciones, ya sus momentos. Pocos experimentos imaginarios han ejercido una influencia mayor que éste en el pensamiento acerca de la física.

Valiéndose de su experimento imaginario, Heisenberg trataba de estatuir diversos puntos, de los cuales mencionaré tres: *a)* la *interpretación* de las fórmulas de indeterminación de Heisenberg en el sentido de que enunciasen la existencia de *barreras insuperables frente a la precisión de nuestras mediciones; b)* la *perturbación* del objeto medido por el proceso de medición, *ya fuese de la posición o del momento*, y *c)* la *imposibilidad de someter a contraste la «trayectoria» espacio-temporal* de la partícula. Creo que los *argumentos* de Heisenberg que tienden a estatuir estos tres puntos carecen, sin duda, de validez, cualesquiera que sean los méritos que tengan éstos en sí mismos. Y ello por la razón de que el estudio de Heisenberg *no logra demostrar que las mediciones de posición y de momento sean simétricas:* esto es, simétricas con respecto a la perturbación que sufre el objeto medido en virtud del proceso de medición. Pues Heisenberg, con ayuda de su experimento, *sí* muestra que para medir la *posición* del electrón hemos de emplear luz de frecuencia muy elevada, o sea, fotones de gran energía: lo cual quiere decir que impartimos al electrón un momento de valor desconocido y, por tanto, lo *perturbamos*, ya que hacemos algo así como darle un fuerte golpe. Pero *no* muestra que la situación sea análoga si queremos medir el *momento* del electrón, en lugar de su posición; pues, en este caso, dice Heisenberg, hemos de observarlo con una luz de frecuencia baja, tan baja que podamos suponer que *no perturbamos el momento del electrón mediante nuestra observación;* la observación resultante, aunque revelará el momento, no logrará revelar la posición del electrón, que permanecerá, por ello, indeterminada.

Consideremos ahora este último razonamiento. En él no se afirma que hayamos *perturbado* (o hecho «borrosa») la posición del electrón, pues lo único que asevera Hisenberg es que *no hemos conseguido descubrirla.* En realidad, su argumentación implica que no hemos perturbado el sistema en absoluto (o tan poco que podemos despreciar la perturbación causada): hemos empleado fotones de un nivel de energía tan bajo que simplemente no teníamos energía suficiente para perturbar al electrón. Así pues, *los dos casos —el de medición de posición y el de medición de momento— están muy lejos de ser análogos o simétricos*, según el razonamiento de Heisenberg; hecho que, sin embargo, queda velado por el parloteo usual (positivista, operacionista o instrumentalista) acerca de los «*resultados de medida*», cuya incertidumbre admitimos todos que es simétrica con respecto a la posición y el momento; pero en incontables estudios del experimento —comenzando por el del propio Heisenberg— se asume siempre que esta argumentación estatuye la *simetría de las perturbaciones* (en cuanto al formalismo de la teoría, la simetría entre la posición y el momento es completa, desde luego, pero esto no quiere decir que el experimento imaginario de Heisenberg dé cuenta de dicha simetría). Por tanto, se asume —de un modo enteramente erróneo—que *perturbamos la posición del electrón* si medimos su momento con el microscopio de Heisenberg, y este efecto de hacer «borroso» ha sido estatuido por el estudio de Heisenberg sobre su experimento imaginario.

Mi propio experimento imaginario del apartado 77 estaba basado en gran medida en dicha simetría del experimento heisenberguiano (cf. la nota *1 del apéndice VI); pero aquél no es válido justamente porque la asimetría invalida toda la discusión que hace Heisenberg del experimento: sólo pueden servir como ejemplos para las *fórmulas* de Heisenberg las mediciones que se obtengan mediante una *selección física* (como yo la llamo), y ésta ha de satisfacer siempr (como he señalado de un modo enteramente correcto en el libro) las «relaciones de dispersión» (la selección física *sí* perturba el sistema).

Si las «mediciones» de Heisenberg fuesen posibles, podríamos comprobar incluso el momento de un electrón entre dos mediciones de posición sin perturbarlo, lo cual nos permitiría también —frente a lo que hemos dicho más arriba, en el punto *c)*— comprobar (parte de) su «trayectoria» espacio-temporal que es calculable a partir de dichas dos mediciones de posición.

Sin duda, la insuficiencia del razonamiento de Heisenberg ha permanecido inadvertida durante tanto tiempo debido al hecho de que las *fórmulas* de indeterminación se siguen claramente del formalismo de la teoría cuántica (la ecuación de onda), y de que en este formalismo se halla implícita la simetría entre la posición (q) y el momento (p). Esto puede explicar por qué muchos físicos han dejado de escudriñar con suficiente cuidado el experimento de Heisenberg: no lo tomaban en serio, supongo, sino meramente como un ejemplo ilustrativo de una fórmula deductible. Yo sostengo que es un ejemplo malo —justamente porque no da cuenta de la simetría entre posición y momento—: y, por ello, es enteramente inadecuado como base para interpretar tales fórmulas (no digamos la totalidad de la teoría cuántica).

10) Estoy convencido de que la inmensa influencia del expe-

rimento imaginario de Heisenberg se debe a que este físico logró comunicar a través de él una nueva imagen metafísica del mundo físico, a la vez que pretendía no tener nada que ver con la metafísica (con lo cual rendía culto a una curiosa obsesión ambivalente de nuestra época postrracionalista: su preocupación por matar al Padre —esto es, la Metafísica— y por mantenerle a la vez inatacable —bajo otra forma distinta— y más allá de toda crítica. En el caso de algunos físicos cuánticos, parece, a veces, como si el padre fuese Einstein). La imagen metafísica del mundo, transmitida de cierta manera a través de la discusión de Heisenberg de su experimento imaginario (si bien nunca realmente implicada en ella), es la siguiente. La *cosa en sí* es incognoscible: podemos conocer solamente sus apariencias, que han de entenderse (como señaló Kant) que resultan de la cosa en sí y de nuestro aparato perceptivo; de modo que las apariencias provienen de una especie de interacción entre las cosas en sí mismas y nosotros. Y esto es por lo que una cosa puede aparecérsenos de formas distintas, según las diferentes maneras que tenemos de percibirla: es decir, de observarla y de entrar en interacción con ella. Intentamos algo así como atrapar la cosa en sí misma, pero nunca lo logramos: sólo encontramos apariencias en nuestros armadijos; podemos montar, bien un *cepo de partículas* clásico o un *cepo de ondas* clásico («clásico» porque podemos construirlos y montarlos como el clásico cepo para ratones): y en el proceso en que la cosa dispara el cepo —y, por tanto, entra en interacción con él— se la induce a asumir la apariencia de una partícula o de una onda. Todavía más: al montar el armadijo no solamente hemos de proporcionar un estímulo a la cosa con objeto de inducirla a asumir una de sus dos apariencias clásicas, sino que hemos de poner en él el cebo de la energía —la que se necesita para que se haga real o se materialice la incognoscible cosa en sí— ; y de este modo se salvan las leyes de conservación.

Esta es la imagen metafísica transmitida por Heisenberg y tal vez también por Bohr.

Ahora bien; estoy muy lejos de poner objeciones a una metafísica de este tipo (aun cuando no me atrae demasiado esta mezcla especial de positivismo y de trascendentalismo); ni tampoco lo hago a que se nos comunique mediante metáforas. A lo que sí objeto es a la diseminación casi inconsciente de esta imagen metafísica, frecuentemente combinada con pretensiones de ser un antimetafísico: pues considero que no nos debe estar permitido sumergirnos en lo inadvertido, y, por tanto, en lo inalcanzable por la crítica.

A mi entender, es una cosa interesante que gran parte de la obra de David Bohm parezca estar inspirada por la misma metafísica; podría describírsela incluso como una valiente tentativa de construir una teoría física que hiciera clara y explícita la metafísica mencionada; lo cual es admirable. Pero me pregunto si esta metafísica, en concreto, es suficientemente buena, y si merece realmente la pena, teniendo en cuenta que no es posible apoyarla (como hemos visto) en el experimento imaginario de Heisenberg, que es la fuente intuitiva de todo lo demás.

A mi parecer, existe una relación obvia entre el «principio de complementaridad» de Bohr y esta tesis metafísica de una realidad incognoscible —tesis que sugiere la «renuncia» (para emplear un término favorito de Bohr) de nuestras aspiraciones al conocimiento, y la restricción de nuestros estudios físicos a apariencias y a sus relaciones mutuas—. Pero no he de discutir semejante relación aquí: en vez de ello, me limitaré a proceder a la discusión de ciertos argumentos en favor de la complementaridad que se han basado en otros experimentos imaginarios.

11) En relación con su «principio de complementaridad» (de que trato más a fondo en mi *Postscript;* cf. también mi trabajo «Three Views Concerning Human Knowledge», *Contemporary British Philosophy*, III, ed. por H. D. Lewis, 1956), Bohr ha analizado un gran número de sutiles experimentos imaginarios con un temple parecidamente apologético. Como las formulaciones de Bohr del principio de complementaridad son vagas y difíciles de debatir, recurriré a un libro muy conocido y excelente en muchos respectos, *Anschauliche Quantentheorie*, de P. Jordan (libro en que, incidentalmente, se sometía a discusión brevemente mi *Logik der Forschung)* [15].

Jordan formula (sólo parte de) el contenido del principio de complementaridad de tal modo, que pone a éste en una relación muy estrecha con el problema del *dualismo entre partículas y ondas.* Lo expresa de este modo: «Cualquier experimento que hiciese aparecer *simultáneamente* las propiedades ondulatorias y corpusculares de la luz, no solamente estaría en contradicción con las teorías clásicas (que se han ido acostumbrando a contradicciones de esta índole), sino que, a más y por encima de ello, sería absurdo en sentido lógico y matemático» [16].

Jordan ilustra este principio con un ejemplo: el famoso experimento de la ranura doble (véase el apéndice —antiguo— V). «Supongamos que tenemos una fuente luminosa de la cual emana una luz monocromática que cae sobre una pantalla negra, provista de dos ranuras [paralelas] muy próximas. Supongamos ahora, *por una parte*, que las ranuras y sus distancias son lo suficientemente pequeñas (comparadas con la longitud de onda de la luz) como para que se obtengan franjas de interferencia sobre una placa fotográfica que registre la luz que pasa por las dos ranuras; y, *por otra parte*, que mediante cierto dispositivo experimental fuese posible averiguar, para un fotón aislado, por cuál de las dos ranuras ha pasado» [17].

Jordan afirma «que estas dos suposiciones contienen una contradicción» [18].

No voy a impugnar esto, aun cuando tal contradicción no sería

---

[15] JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie*, 1936, pág. 282.
[16] *Op. cit.*, pág. 115.
[17] *Op. cit.*, págs. 115 y sig. (la cursiva es de Jordan).
[18] *Op. cit.*, pág. 116.

un contrasentido lógico o matemático (como él sugiere en una de las frases antes citadas), sino que, más bien, las dos suposiciones juntas contradirían el formalismo de la teoría cuántica. Quiero objetar a una cuestión diferente: Jordan emplea este experimento como ejemplo ilustrativo de su formulación del contenido del principio de complementaridad; mas cabe poner de manifiesto que el mismo experimento de que se vale para dicho fin lo refuta.

En efecto, consideremos la descripción de Jordan del experimento de la ranura doble, si bien omitiendo primero su segunda suposición (la precedida por las palabras «*por otra parte*»); conseguimos unas franjas de interferencia en la placa fotográfica, con lo cual tenemos un experimento que «hace aparecer las propiedades ondulatorias de la luz». Supongamos ahora que la intensidad de la luz es lo suficientemente débil como para obtener en la placa impactos de fotones distinguibles entre sí; dicho de otra forma: tan débil que las franjas al ser analizadas revelen deberse a la distribución de densidad del impacto de un fotón aislado: hemos obtenido «un experimento» que «hace aparecer *simultáneamente* las propiedades ondulatorias y corpusculares de la luz» (por lo menos, algunas de ellas). Es decir, este experimento logra precisamente lo que, según Jordan, tiene que ser «absurdo en sentido lógico y matemático».

Es indudable que si, además, fuésemos capaces de averiguar a través de cuál de las ranuras ha pasado un fotón concreto, seríamos capaces de determinar su trayectoria; y podríamos decir entonces que este experimento (que es de presumir sea imposible) habría hecho aparecer las propiedades corpusculares del fotón de un modo aún más destacado. Reconozco todo esto; pero no hace al caso. Pues lo que afirmaba el principio de Jordan no era que *algunos* experimentos que a primera vista parecen posibles resultan luego imposibles —lo cual es baladí—, sino que *ningún* experimento en absoluto puede «hacer aparecer *simultáneamente* las propiedades ondulatorias y las corpusculares de la luz». Aserción que, como hemos visto, es simplemente falsa: está refutada por *casi todos* los experimentos típicos de la mecánica cuántica.

Pero, ¿qué quería afirmar Jordan? ¿Tal vez que ningún experimento haría aparecer *todas* las propiedades ondulatorias y *todas* las propiedades corpusculares de la luz? Es evidente que su intención no pudo haber sido ésa, ya que incluso un experimento que hiciese aparecer simultáneamente *todas* las propiedades ondulatorias es algo imposible, y ello aun cuando renunciemos al requisito de que haga aparecer alguna propiedad corpuscular (y lo mismo ocurre al revés).

Lo que incomoda tanto en este razonamiento de Jordan en su arbitrariedad. Teniendo en cuenta lo que hemos dicho, es algo obvio que tiene que haber ciertas propiedades ondulatorias y otras corpusculares que ningún experimento pueda combinar. Jordan generaliza este hecho primeramente, y lo formula como un principio (cuya formulación por este físico, en todo caso, hemos refutado); y luego pone como ejemplo ilustrativo un experimento imaginario que él demuestra ser imposible. Pero, según hemos visto, la parte del experimento que todo el mundo admite que es posible refuta en realidad aquel principio, al menos tal como lo formula Jordan.

Pero, fijémonos un poco más en la otra mitad del experimento imaginario (la precedida por las palabras «por otra parte»). Si preparamos unos dispositivos que determinen la ranura por la que ha pasado el fotón, se nos dice, acabamos con las franjas. Bien. Pero, ¿acabamos con las propiedades ondulatorias? Supongamos el dispositivo más sencillo posible: tapamos una de las ranuras; si hacemos esto, todavía sigue habiendo muchos signos del carácter ondulatorio de la luz (incluso con una sola ranura tenemos una distribución ondulatoria de la densidad). Mas ahora nuestros oponentes admiten que las propiedades corpusculares se manifiestan con plenitud, ya que podemos trazar la trayectoria de la partícula.

12) Desde un punto de vista racional, todos estos argumentos son inadmisibles. No dudo de que exista una interesante idea intuitiva tras el principio de complementaridad de Bohr; pero ni él ni ningún otro miembro de su escuela han sido capaces de explicarlo, ni siquiera a aquellos críticos que, como Einstein, han tratado de entenderlo durante años[19].

Mi impresión es que muy bien pueda tratarse de la idea metafísica descrita más arriba, en el punto 10); puedo estar equivocado; pero sea lo que sea, me parece que Bohr nos debe una explicación mejor.

---

[19] Cf. *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. por P. A. Schilpp, 1949, página 674.

El experimento de Einstein, Podolski y Rosen

Una carta de Albert Einstein (1935)

La carta de Albert Einstein que reproduzco aquí traducida, acaba sucinta y decisivamente con mi experimento imaginario del apartado 77 del libro (y también hace referencia a una versión ligeramente distinta incluida en un trabajo no publicado) y pasa a describir con claridad y brevedad admirables el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (que exponemos, asimismo, en el punto 3 del apéndice *XI).

Se encontrarán entre estos dos temas unas pocas observaciones acerca de las relaciones existentes en general entre teoría y experimento, y sobre la influencia de las ideas positivistas en la interpretación de la teoría cuántica.

Los dos últimos párrafos se ocupan también de un problema que trato en el libro (y en mi *Postscript):* el de las probabilidades subjetivas y de cómo sacar conclusiones estadísticas de la ignorancia. Sobre este punto sigo no estando de acuerdo con Einstein: creo que sacamos estas conclusiones probabilísticas de conjeturas sobre la equidistribución (a menudo, conjeturas muy naturales, y que, por ello, tal vez no se hacen de un modo consciente), y, por tanto, de premisas probabilísticas.

Los albaceas literarios de Einstein pedían que si se había de publicar una traducción de la carta, se publicase a la vez el texto original: ello me ha sugerido la idea de reproducir la carta de Einstein tal como aparece de su puño y letra.

Old Lyme, 11. IX. 35.

Querido Sr. Popper:

He mirado su opúsculo, y estoy de acuerdo con él en gran parte [*weitgehend*][×]. Solamente, no creo que sea factible un «caso super puro» que nos permitiera pronosticar con una precisión «inadmisible» la posición y el impulso (color) de un cuanto luminoso. Tengo por ineficaces en principio los medios que usted propone (una pantalla con obturador instantáneo juntamente con un equipo selectivo

[×] Cuestión principal: la función ψ caracteriza un *agregado* de sistemas, no un solo sistema: lo cual resulta también de las consideraciones expuestas más abajo. Esta concepción hace superfluo distinguir en particular entre casos «puros» y «no puros».

de filtros de vidrio), por la razón de que creo firmemente que semejante filtro haría «borrosa» la posición, como ocurre con una red espectroscópica.

Mi argumentación es como sigue. Figúrese usted una señal luminosa breve (posición exacta), que, para poder ver cómodamente los efectos producidos por el filtro de absorción, considero analizada de un modo puramente formal en un gran número de trenes de onda monocromáticos, W_n. El equipo de filtros de absorción eliminará todos los W_n (colores) excepto W_1; mas este grupo de ondas tendrá una extensión considerable (una posición borrosa), debido a ser casi monocromático: lo cual quiere decir que la acción del filtro necesariamente hace «borrosa» la posición.

De un modo general, no me agrada todo el aferrarse «positivista» a lo observable, que ahora está de moda. Me parece una cosa trivial que no se pueda pronosticar en el campo de lo atómico con una precisión arbitraria, y pienso (como usted, por lo demás) que no se puede fabricar la teoría a partir de resultados de observación, sino sólo inventarla.

No tengo aquí ejemplares del trabajo que he escrito con los señores Rosen y Podolski, pero puedo decirle sucintamente de qué se trata.

Cabe preguntarse si, desde el punto de vista de la teoría cuántica actual, el carácter estadístico de nuestros resultados experimentales *es meramente efecto de una intervención desde el exterior —incluyendo la medición—*, mientras que los sistemas como tales —descritos por una función ψ— se conducen en sí mismos de un modo determinista. Heisenberg coquetea [*liebäugelt*] con semejante interpretación, sin adoptarla de una forma consecuente. Pero puede preguntarse también: ¿no hemos de interpretar la función ψ, que en cuanto al tiempo cambia —según la ecuación de Schrödinger— de un modo determinista, como una descripción *completa* de la realidad física, y, con ello, que la intervención desde el exterior (insuficientemente conocida) sea totalmente responsable de que las prognosis tengan solamente un carácter estadístico?

Llegamos al resultado de que no puede interpretarse la función ψ como una descripción completa del estado físico de un sistema.

Consideramos un sistema compuesto, que consta de los sistemas parciales A y B, los cuales se encuentran en interacción mutua sólo durante un tiempo limitado.

Sea conocida la función ψ del sistema compuesto *antes* de la interacción (por ejemplo, un choque entre dos partículas libres); entonces la ecuación de Schrödinger nos da la función ψ del sistema compuesto *después* de aquélla.

Ahora (después de la interacción) se llevará a cabo sobre el sistema parcial A una medición (lo más acabada posible [*vollständige*]), que, sin embargo, es posible realizar de modos diversos, según las variables a conocer (con precisión) —por ejemplo, el impulso *o* la coordenada espacial—. La mecánica cuántica nos da entonces la función ψ

para el sistema parcial B, que será *en cada caso distinta, según la elección hecha de la medición a ejecutar sobre* A.

Como no es razonable suponer que el estado físico de B dependa de cuál medición yo haya llevado a cabo sobre el sistema A, que está [ya] enteramente separado de aquél, esto quiere decir que al mismo estado físico B pertenecen dos funciones distintas. Puesto que una descripción *completa* de un estado físico tiene que ser necesariamente una descripción *unívoca* (descontando superficialidades tales como unidades, elección de las coordenadas, etc.), no puede interpretarse la función ψ como la descripción *completa* de aquel estado.

Naturalmente, un teórico cuántico ortodoxo dirá que no existe una descripción completa, de modo que tendremos solamente la descripción estadística de un *agregado* de sistemas, y no de *un* sistema. Pero, primeramente, ha de *decirlo* (y, en segundo término, no creo que nos contentemos duraderamente con una descripción tan vaga de la Naturaleza).

Es de advertir que las prognosis (exactas) para el sistema B a que puedo llegar (de acuerdo con la libre elección de la forma de medir A), muy bien pueden estar entre sí como lo están las mediciones de impulso y de posición. Así pues, no se puede eludir fácilmente la concepción de que el sistema B tenga un impulso y una coordenada espacial determinados; pues lo que puedo predecir tras haber elegido libremente [esto es, sin interferir con ello], tiene que existir, asimismo, en la realidad.

En mi opinión, la [forma de] descripción contemporánea, que es, en principio, estadística, sólo es un estadio de transición.

He de decir de nuevo * que no considero verdadera su tesis de que a partir de una teoría determinista no se puedan seguir conclusiones estadísticas. Piense solamente en la mecánica estadística clásica (teoría de los gases, teoría del movimiento browniano). Por ejemplo, un punto material se mueve con movimiento uniforme sobre una circunferencia; puedo calcular la probabilidad de encontrarle en un momento determinado en una parte determinada de la periferia. Lo esencial es únicamente que no conozco el estado inicial, o que no lo conozco con exactitud.

Le saluda amistosamente,

A. Einstein.

* Alude aquí a una carta anterior.—*K. R. P.*

(Facsímil reducido
de la carta de A. Einstein)

Old Lyme. 11. IX. 35.

Lieber Herr Popper!

Ich habe Ihre Abhandlung angesehen und stimme weitgehend überein.* Nur glaube ich nicht an die Herstellbarkeit eines „überreinen Falles", der es erlauben würde, Ort und Impuls (Farbe) eines Lichtquants mit „unzulässiger" Genauigkeit zu prognostizieren. Ihr Mittel (Blende mit Momentan-Verschlussklappe in Verbindung mit selektiv durchlässigem Gläsersatz) halte ich aus dem Grunde für prinzipiell unwirksam, weil ich bestimmt glaube, dass ein solches Filter „ortsverschmierend" wirkt wie etwa ein Beugungsgitter.

Meine Begründung ist folgende. Denken Sie an ein kurzes Lichtsignal (genauer Ort). Um die Wirksamkeit des Absorptionsfilters bequem zu übersehen, denke ich mir dieses rein formal in eine grosse Anzahl von quasi-monochromatischen Wellenzügen W_n zerlegt. Der Absorptionssatz wirke auf alle W_n (Farben) zerstörend bis auf W_1. Diese Wellengruppe hat aber eine erhebliche Ausdehnung, weil sie quasi-monochromatisch ist (Ortsverschmierung); d. h. das Filter wirkt notwendig „ortsverschmierend".—

Mir gefällt das ganze modische „positivistische" Kleben am Beobachtbaren überhaupt nicht. Ich

* Hauptsache: Die ψ-Funktion charakterisiert eine (statistische) System-Gesamtheit, nicht ein Einzelsystem. Dies ist auch das Ergebnis der weiter unten dargelegten Betrachtung. Diese Auffassung macht es auch überflüssig, zwischen „reinen" und „nicht-reinen" Fällen besonders zu unterscheiden.

halte es für trivial, dass man auf atomistischem Gebiete nicht beliebig genau prognostizieren kann und denke, dass Theorie nicht aus Beobachtungsresultaten fabriziert sondern nur erfunden werden kann (wie Sie übrigens auch).–

Ich habe keine Exemplare meiner mit den Herrn Rosen und Podolski zusammen verfassten Arbeit hier, kann Ihnen aber kurz sagen, um was es sich handelt.

~~Wie Sie schon hervorgehoben haben.~~

Man kann sich fragen, ob der statistische Charakter unserer experimentellen Befunde gemäss der heutigen Quantentheorie erst durch die fremden Eingriffe exklusive Messungen veranlasst wird, während die Systeme als solche – durch eine ψ-Funktion beschrieben – sich an sich deterministisch verhalten. Heisenberg liebäugelt mit einer solchen Auffassung, ohne sie konsequent zu vertreten. Man kann auch so fragen: Ist die ψ Funktion, die sich nach der Schrödingergleichung zeitlich deterministisch verändert, nicht als vollständige Beschreibung der physikalischen Realität aufzufassen, wobei lediglich der fremde (ungenau bekannte) Eingriff durch Beobachtung dafür verantwortlich ist, dass die Prognosen nur statistischen Charakter haben?

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die ψ-Funktion nicht als vollständige Beschreibung des physikalischen Zustandes eines Systems aufgefasst werden kann.

Wir betrachten ein Gesamtsystem, das aus den Teilsystemen A und B besteht, die nur während einer beschränkten Zeit in Wechselwirkung miteinander stehen.

Die ψ-Funktion des Gesamtsystems vor der Wechselwirkung (z. B. Zusammenstoss zweier freier Teilchen) sei bekannt. Die Schrödinger-Gleichung liefert dann die ψ Funktion des Gesamtsystems nach der Wechselwirkung. (nach der Wechselwirkung)

Es werde nun am Teilsystem A eine (vollständige) Messung ausgeführt, was aber in verschiedener Weise möglich ist, je nach den Variabeln, die man (genau) misst (z. B. Impuls oder Koordinate). Die Quanten-Mechanik liefert dann die ψ Funktion für das Teilsystem B, und zwar verschiedene, je nach der Wahl der Messung, die man an A ausgeführt hat.

Da es aber ungereimt ist, anzunehmen, dass der physikalische Zustand von B davon abhängig sei, was für eine Messung ich an dem von ihm getrennten System A vornehme, so heisst dies, dass zu demselben physikalischen Zustande von B zwei verschiedene ψ-Funktionen gehören. Da eine vollständige Beschreibung eines physikalischen Zustandes notwendig eine eindeutige Beschreibung (abgesehen von Äusserlichkeiten wie Einheiten, Koordinatenwahl) sein muss, so kann die ψ-Funktion nicht als die vollständige Beschreibung des Zustandes aufgefasst werden.

Natürlich wird ein orthodoxer Quantentheoretiker sagen, es gebe eben keine vollständige Beschreibung bezw. nur die statistische Beschreibung einer Systemgesamtheit und nicht eines Systems. Aber erstens soll er dies sagen (und zweitens glaube ich nicht, dass wir uns für die Dauer mit einer so fadenscheinigen Naturbeschreibung werden begnügen müssen).

Zu beachten ist, dass die (exakten!) Prognosen, zu welchen ich (je nach freier Wahl der Messungsart an A) für das System B gelangen kann, sich zu einander sehr wohl wie Impulsmessung und Ortsmessung verhalten können. Man kann also nicht wohl um die Auffassung herumkommen, dass das System B thatsächlich einen bestimmten Impuls und eine bestimmte Koordinate hat. Denn was ich nach freier Wahl prophezeihen kann, das muss auch in der Wirklichkeit existieren. —

Meiner Meinung nach ist die gegenwärtige prinzipiell statistische Beschreibung nur ein Durchgangsstadium. — Ich möchte nochmals sagen, dass ich Ihre Behauptung, dass aus einer deterministischen Theorie keine statistischen Sätze gefolgert werden können, nicht für richtig halte. Denken Sie nur an die klassische statistische Mechanik (Gastheorie, Theorie der Brown'schen Bewegung). Beispiel: ein materieller Punkt läuft gleichförmig auf einer geschlossenen Kreisbahn; ich kann die Wahrscheinlichkeit rechnerisch bestimmen, ihn zu einer bestimmten Zeit auf einem bestimmten Teil der Peripherie anzutreffen. Wesentlich ist nur, dass ich den Anfangszustand nicht oder nicht genau kenne!

Freundlich grüsst Sie Ihr

A. Einstein

INDICES

preparados por J. Agassi**

** Corregidos y completados en esta versión castellana *(T.)*

Indice de autores

(«*n*» significa «*nota*»; «*c*» indica que se cita al autor correspondiente; los paréntesis encuadran las páginas con alusiones o citas no explícitas)

Indice de materias

(«*n*» significa «*nota*»; «*t*» indica que se estudia el término correspondiente; las cifras en cursiva señalan referencias de importancia especial, y las encuadradas entre paréntesis responden a páginas en que la alusión a las cuestiones del epígrafe es meramente implícita)